









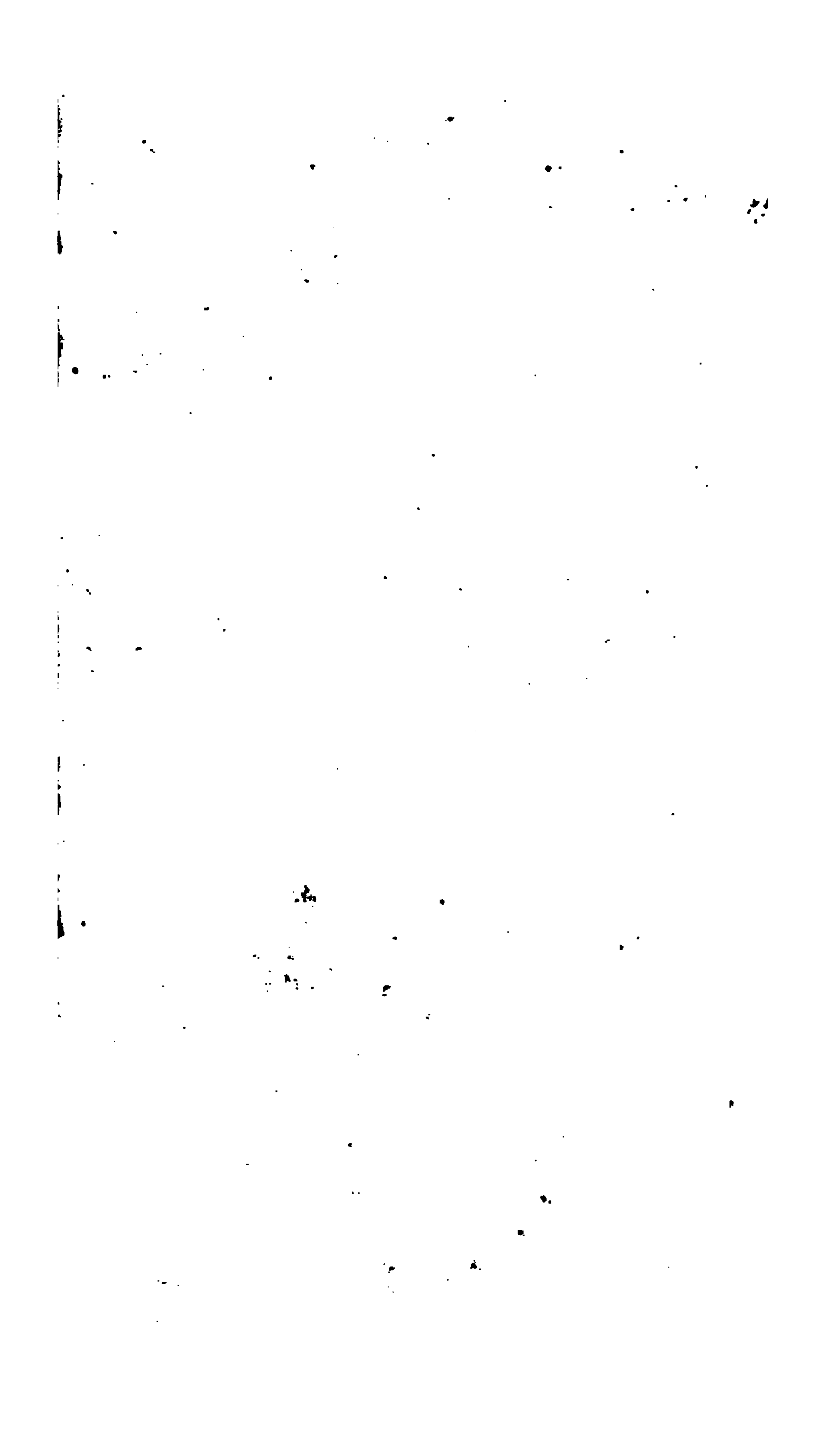


















LEHRBUCH

DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

BEARBEITET

VON

O. FORT UND **O. SCHLÖMILCH,**

PROFESSOREN AN DER POLYTECHNISCHEN SCHULE ZU DRESDEN.

ERSTER THEIL.

ANALYTISCHE GEOMETRIE DER EBENE

VON

O. FORT.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1855.



Vorrede.

Das Lehrbuch, welches hiermit den Schülern und Freunden der Mathematik übergeben wird, ist zunächst bestimmt, als Grundlage der Vorträge zu dienen, welche an der hiesigen polytechnischen Schule von mir über analytische Geometrie der Ebene und von Herrn Professor Schlömilch über analytische Geometrie des Raumes gehalten werden. Diese in dem Lehrplane der Anstalt, an welcher wir vereint wirken, begründete Theilung des Unterrichtsstoffes bildet die Veranlassung zur gemeinschaftlichen Herausgabe des vorliegenden Werkes.

Was den von mir speciell bearbeiteten Theil betrifft, so habe ich eine zweifache Bemerkung vorauszuschicken, die sich eines Theils in materieller Hinsicht auf die Auswahl des Stoffes, anderen Theils formell auf seine Behandlung und Anordnung bezieht. Um nach der ersteren Seite hin wenigstens innerhalb bestimmter Grenzen eine gewisse Vollständigkeit zu erzielen, war mein Augenmerk hauptsächlich darauf gerichtet, aus dem reichen Materiale, welches namentlich die Theorie der Linien zweiten Grades darbietet, solche Sätze auszuwählen, die eine constructive Anwendung gewähren. Es ist dabei möglich gewesen, Einzelnes aufzunehmen, was in anderen Lehrbüchern von gleichem elementaren Standpunkte gewöhnlich ausgeschlossen bleibt, wohin ich unter Anderem die Theorie der Krümmungskreise gerechnet wissen möchte. Die mehr praktische Richtung meiner näheren Schüler war bei dieser Auswahl massgebend; doch hoffe ich, dass mich deshalb auch nach anderer Seite hin kein Vorwurf treffen wird, wenn es mir gelungen ist, innerhalb des gebotenen Raumes den be-

handelten Stoff zu einem organischen Ganzen abzurunden. — In Beziehung auf die Darstellung war mein Streben besonders auf Vereinfachung des Calcüls mittelst geometrischer Deutung der Gleichungen und auf eine möglichst natürliche Verknüpfung der einzelnen Untersuchungen gerichtet. Wenn mir in letzterer Hinsicht entgegengehalten werden sollte, dass in einem Lehrbuche der analytischen Geometrie der Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades eine andere Stellung, als bei mir geschehen, nämlich vor der Betrachtung der einzelnen Kegelschnitte zuzuweisen sein möchte, so gebe ich dies in systematischer Hinsicht gern zu; praktisch hat es mir aber nicht geschienen mit Rücksicht auf den mathematischen Standpunkt der Schüler, welche ich im Auge hatte. Meine Erfahrungen im Lehrfache haben mir die Ueberzeugung gewährt, dass die allgemeinen Untersuchungen der analytischen Geometrie nur dann Nutzen zu schaffen im Stande sind, wenn ihnen eine längere Uebung in speciellen Discussionen, welche an Bekanntes anknüpfen, vorhergegangen ist, dass sie aber dann mit um so grösserer Strenge geführt werden können.

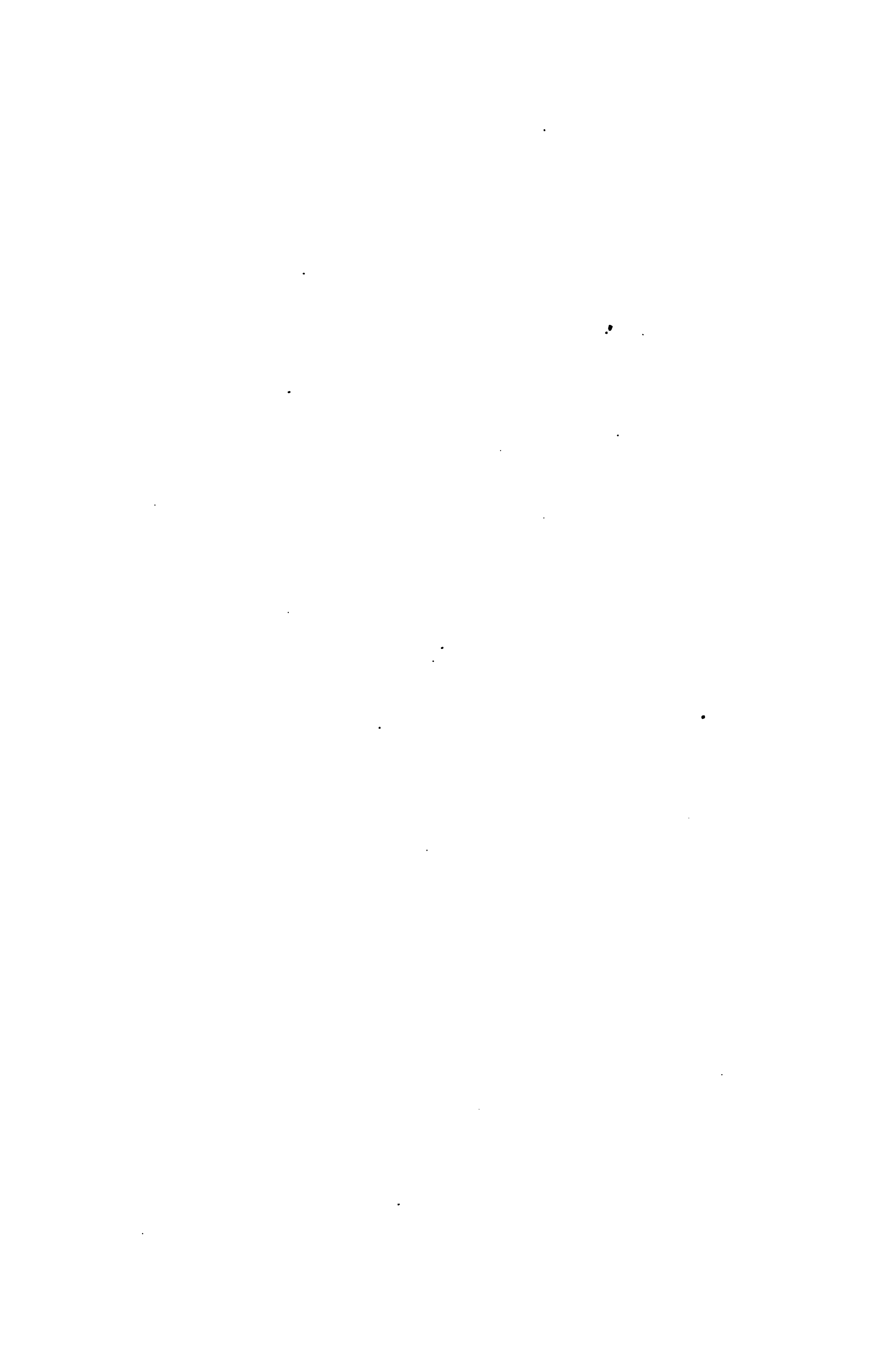
Schliesslich habe ich noch zu bemerken, dass die mir zu Gebote stehenden literarischen Hilfsmittel von mir benutzt worden sind, ohne dass ich deshalb Citate gebe, weil dies in einem Schulbuche nicht am rechten Platze sein dürfte. Auf Neuheit des Stoffes macht meine Arbeit keinen Anspruch; kann die Art der Darstellung zur weiteren Verbreitung eines wichtigen Zweiges der Mathematik etwas beitragen, so bin ich vollkommen befriedigt.

Dresden, im September 1855.

O. Fort.

Inhalt.





Einleitung.

Das Gebiet der niederen Geometrie beschränkt sich auf die Untersuchung der Eigenschaften derjenigen räumlichen Gestalten, welche mit Benutzung des Lineals und Zirkels darstellbar sind, d. i. der geradlinigen Gebilde und des Kreises, sowie derjenigen Flächen und Körper, deren Entstehung in einfacher Weise auf diese beiden Grundformen zurückgeführt werden kann. Ihre Methode geht dabei im Wesentlichen von der Anschauung aus, und wenn sie sich zu ihren Untersuchungen auch der reichen Hilfsmittel der Algebra bedient, so geschieht dies doch nur zu dem Zwecke, um die Formen von Grössenbeziehungen, welche ursprünglich der geometrischen Construction entnommen wurden, umzubilden und dadurch zu Lehrsätzen oder zur Lösung von Aufgaben zu gelangen. Dieser Art von Anwendung der Arithmetik auf die Raumlehre gehört die sogenannte rechnende Geometrie und die gewöhnlich als besonderer Theil davon getrennte Trigonometrie an.

Jede Benutzung der Zahlenlehre zu geometrischen Untersuchungen setzt die Möglichkeit voraus, die Zahlen ebenso, wie wir uns den Raum an keiner Stelle unterbrochen denken, als stetig veränderlich auffassen zu können. Hierzu geben die Erweiterungen, welche die Zahlenreihe durch die Operationen der Buchstabenrechnung erlangt, die Mittel an die Hand. Während die Weite der Sprünge, welche beim Uebergange von einer Zahl zu ihrer nächstfolgenden oder nächstvorhergehenden stattfinden müssen, durch die Einschiebung der gebrochenen Zahlen beliebig klein gemacht werden kann, gewährt die Einführung der Irrationalzahlen die Möglichkeit, die auch hierbei noch bleibenden Lücken

auszufüllen; mittelst der negativen Zahlen wird aber die anfänglich vorhandene einseitige Begrenzung aufgehoben. Durch diese Erweiterungen wird die Reihe der auf einander folgenden Zahlen mit einer nach beiden Seiten unbegrenzten geraden Linie vergleichbar; der Uebergang von einem Punkte dieser Geraden zu einem andern mit Durchlaufung aller möglichen Zwischenpunkte lässt sich durch den Uebergang von einer Zahl zu einer andern darstellen.

Diese durch die stetige Veränderlichkeit der Zahlen erlangte Analogie zwischen den Zahl- und Raumgrössen ist für die Entwickelung der geometrischen Wissenschaft von der grössten Wichtigkeit geworden. Descartes (1596—1650) fand hierin die Mittel, auch Beziehungen der Lage in das Gebiet der Arithmetik hinüberzuspielen und dadurch der Geometrie eine Untersuchungsmethode zu eröffnen, welche fast vollkommen unabhängig von der unmittelbaren Anschauung der zu untersuchenden Raumgebilde bleibt.

Wenn man eine von zwei Zahlen, welche durch eine Gleichung an einander gebunden sind, der Reihe nach alle möglichen Werthe annehmen lässt, so erlangt die andere Zahl eine von der jedesmaligen Grösse der ersten abhängige Folge von Werthen. Descartes legte solchen am Faden einer Gleichung fortlaufenden veränderlichen Zahlen geometrische Deutungen unter und gewann durch dieses Hilfsmittel aus jeder Gleichung eine stetige Folge von Punkten der Ebene, die sich durch ein bestimmtes, von der besonderen Natur der benutzten Gleichung abhängiges Bewegungsgesetz an einander gereiht zeigen. Die Gleichung ward für ihn der arithmetische Ausdruck der Form einer Linie. Hiermit war einer neuen Wissenschaft, der analytischen Geometrie, die Entststehung gegeben*), durch welche die Raumlehre eine völlige Umgestaltung erlangt hat. Die Lehre von den Gleichungen zwischen veränderlichen Zahlen wird in ihr zu einer unerschöpflichen Bildungsquelle räumlicher Gestalten; zugleich gewährt sie aber auch die Mittel, durch neue, rein algebraische Untersuchungsmethoden die Eigenschaften dieser Gebilde zu entdecken.

---

*) Die Grundlagen der neuen Wissenschaft sind in einem kleinen Werke von Descartes enthalten, welches 1637 unter dem einfachen Titel ‚Geometrie' in französischer Sprache erschien.

Während dieser Zweig der Geometrie durch Descartes auf Betrachtung der Linien in der Ebene beschränkt blieb, so erlangte er durch die Nachfolger desselben bald eine wesentliche Erweiterung, indem er sich auch des nach drei Dimensionen ausgedehnten Raumes bemächtigte. Parent (1666—1716) wendete zuerst drei veränderliche Zahlen an, um eine krumme Oberfläche durch eine Gleichung auszudrücken; namentlich aber erhielt diese erweiterte Anwendung der analytischen Geometrie ihre vollständige Entwickelung durch Clairaut (1713—1765) in einem Werke über die Linien doppelter Krümmung und die krummen Oberflächen. Seitdem hat eine grosse Zahl anerkannter Mathematiker sich die Fortbildung der neuen Disciplin zur Aufgabe gemacht.

Ihrem historischen Entwickelungsgange getreu zerfällt die analytische Geometrie, in Uebereinstimmung mit der Eintheilung der niederen Geometrie in Planimetrie und Stereometrie, in zwei Hauptheile: die analytische Geometrie der Ebene und die analytische Geometrie des Raumes. Die erstere benutzt die Lehre von den veränderlichen Zahlen zur Untersuchung der Linien in der Ebene, die letztere beschäftigt sich mit den Linien im Raume und den Flächen.

Die analytische Geometrie der Ebene, die hier zunächst unsere Aufgabe bilden soll, hat ihren Ausgang zu nehmen von den Methoden, mittelst deren die Lage eines Punktes der Ebene in der Bezeichnungsweise dieser Wissenschaft ausgedrückt wird.

Erstes Capitel.

Die Punkte in der Ebene.

---

§. 1.

Punkte in einer Geraden. Rechtwinkliges Coordinatensystem.

In einer im Punkte A einseitig begrenzten geraden Linie AX (Fig. 1) wird die Lage eines beliebigen Punktes P durch die Strecke AP, d. i. durch seinen Abstand vom Anfangspunkte vollständig bestimmt. Die Beschränkung, hierbei die Linie in A begrenzt anzunehmen, scheint deshalb nothwendig, weil ausserdem derselbe Abstand zweien zu beiden Seiten von A gelegenen Punkten zukommen würde. Wir gelangen jedoch dahin, diese vorläufige Einschränkung zu beseitigen, wenn wir einen neuen Punkt A_1 zum Ausgange für die Messung der Abstände wählen und den Beziehungen, durch welche die frühere und jetzige Entfernung des Punktes P vom Anfange der Messung an einander geknüpft sind, allgemeine Geltung zuschreiben. Setzen wir nämlich $AP = x$, $A_1P = x_1$ und $AA_1 = a$, so folgt:

Fig. 1.

A P' A₁ P X

1) $$x = x_1 + a$$

und

2) $$x_1 = x - a.$$

Die letztere und somit auch die erste Gleichung findet aber für jede beliebige Lage des Punktes P Anwendung, wenn man für solche Punkte, deren $x < a$ ist, den Werth von x_1 negativ in Rechnung bringt. Haben daher z. B. P und P' gleiche Abstände von A_1, so kommen den Strecken A_1P und A_1P' gleiche, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Zahlwerthe zu.

Sowie wir in der obigen Figur von einem links gelegenen Punkte A der Linie AX ausgingen, konnten wir uns auch dieselbe Gerade anfänglich nach rechts begrenzt vorstellen und ganz wie vorher von ihrem Endpunkte nach A_1 übergehen. Wir gelangen hierdurch ohne Schwierigkeit zu ganz entsprechenden Beziehungen, gewinnen aber zugleich die Ueberzeugung, dass es lediglich Sache eines vorläufigen Uebereinkommens ist, auf welcher Seite vom beliebig gewählten Ausgangspunkte aus die Entfernungen aller übrigen Punkte derselben Geraden als positiv oder negativ in Rechnung zu ziehen sind.

Werden die in 1) und 2) gewonnenen Gleichungen in der Form

$$x = x_1 + (+a) \quad \text{und} \quad x_1 = x + (-a)$$

geschrieben, so erhalten beide eine gemeinschaftliche Schreibweise und zeigen, wie man von den Entfernungen, welche einem anfänglich gewählten Ausgangspunkte zugehören, zu den auf einen neuen Anfang bezogenen übergeht. Beachtet man hierbei, dass in Uebereinstimmung mit dem Vorigen entgegengesetzten Verschiebungen des Anfangspunktes entgegengesetzte Vorzeichen zukommen, so kann die Formel 1) als Inbegriff beider Gleichungen angesehen werden.

Wir gelangen nach diesen Vorbetrachtungen zu der Bestimmung der Lage eines an beliebiger Stelle in einer Ebene gelegenen Punktes, wenn wir zunächst eine gerade Linie als seinen geometrischen Ort fixiren und in dieser seinen Abstand von einem festen Anfangspunkte angeben. Zu diesem Zwecke seien XX' und YY' (Fig. 2) zwei der Lage nach gegebene, auf einander senkrechte und im Punkte O sich schneidende Gerade derjenigen Ebene, in welcher die Lage eines Punktes P_1 bestimmt werden soll. Zieht man von P_1 die Gerade P_1N senkrecht auf YY', also parallel mit XX', so wird durch die Strecke $P_1N = MO$ der Abstand der Geraden P_1P_4, in welcher der zu bestimmende Punkt gelegen ist, von der Linie YY' gemessen. Wählt man hierauf in P_1P_4 den Punkt M als Ausgang für die Messung der Entfernung aller übrigen Punkte, so ist in dieser Geraden durch die Strecke

Fig. 2.

$P_1 M = NO$ die Lage von P_1 vollständig bestimmt. Dasselbe Resultat, nämlich die Abhängigkeit der Lage des Punktes P_1 von den Entfernungen $P_1 N$ und $P_1 M$, wird gewonnen, wenn wir anfänglich durch $P_1 M$ die Lage der Geraden $P_1 P_2$ fixiren und in ihr N als Anfangspunkt der Strecke $P_1 N$ wählen.

Fassen wir das Vorhergehende zusammen, so kommt es im Wesentlichen darauf hinaus, die Lage eines Punktes in der Ebene durch seine senkrechten Abstände von zwei in dieser Ebene gelegenen, auf einander senkrechten Geraden zu bestimmen. Durch diese beiden festen Linien, auf welche die Lage aller anderen Punkte der Ebene bezogen werden soll, wird dieselbe in vier Felder, die Winkelräume XOY, YOX', $X'OY'$ und $Y'OX$ zerlegt. Insofern nun jedesmal ein Punkt in jedem dieser Felder dieselben Entfernungen von XX' und YY' besitzt, geht die bei Punkten in einer Geraden bereits vorhandene Unbestimmtheit in eine Vierdeutigkeit über, der wir uns jedoch, wie dort, entziehen, wenn wir nach Analogie der früheren Untersuchungen den Begriff der entgegengesetzten Grössen zu Hilfe nehmen. Da es hierbei nur Sache des Uebereinkommens ist, wohin man die positiven und wohin die negativen Strecken zu verlegen hat, so soll ein für allemal die Bestimmung getroffen werden, dass, wo nichts Anderes besonders festgesetzt wird, die Distanzen nach der rechten Seite von YY' und nach Oben von XX' als positive, die entgegengesetzt gelegenen dagegen negativ in Rechnung gebracht werden. Haben daher z. B. in Fig. 2 die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 die gleichen Abstände $P_1 N = P_2 N = P_3 N' = P_4 N' = a$ und $P_1 M = P_2 M' = P_3 M' = P_4 M = b$, so ist nach unserem Uebereinkommen die Entfernung des Punktes

P_1 von der Geraden $YY' = +a$, von der Geraden $XX' = +b$,
P_2 „ „ „ „ $= -a$, „ „ „ „ $= +b$,
P_3 „ „ „ „ $= -a$, „ „ „ „ $= -b$,
P_4 „ „ „ „ $= +a$, „ „ „ „ $= -b$ *).

Die beiden Linien XX' und YY', von denen die Lage aller Punkte der Ebene abhängig gemacht ist, haben die Namen Co-

*) Für den Anfänger dürfte es nicht ohne Nutzen sein, wenn er vorläufig auf die Uebereinstimmung der Zeichenwechsel der Grössen a und b mit den Vorzeichen der Functionen Cosinus und Sinus in den vier Quadranten aufmerksam gemacht wird.

ordinatenachsen erhalten und bilden zusammengenommen ein rechtwinkliges Coordinatensystem. Ihr Durchschnittspunkt O führt die Benennung Anfangspunkt der Coordinaten oder Mittelpunkt des Coordinatensystems; die Strecken PM und PN werden die Coordinaten des Punktes P genannt. Um zu einer Auseinanderhaltung der beiden Coordinatenachsen, sowie ihrer zugehörigen Coordinaten zu gelangen, giebt man ersteren nach ihrer gewöhnlichen Bezeichnung den Namen X-Achse und Y-Achse; die Coordinaten dagegen werden mit dem der Benennung der parallelen Achse entsprechenden kleinen Buchstaben x oder y bezeichnet und führen die Namen x-Coordinate und y-Coordinate des zugehörigen Punktes. So ist nach dem Obigen für P_1 die x-Coordinate $x = +a$ und die y-Coordinate $y = +b$, für P_2 aber $x = -a$, $y = +b$ u. s. f.

Insofern in Fig. 2 $P_1N = OM$ ist, muss es auch ausreichen, zur Bestimmung der Lage von P_1 nur die y-Coordinate P_1M zu construiren und die auf der X-Achse vom Anfangspunkte O aus abgeschnittene Strecke OM als die zugehörige x-Coordinate zu betrachten. Bei dieser zur Abkürzung des Verfahrens gebräuchlichen Construction führt die auf der X-Achse abgeschnittene Coordinate den Namen Abscisse, das entsprechende y den Namen Ordinate des Punktes P_1. Beide Benennungen lassen sich dann auch auf die Achsen übertragen, so dass die X-Achse den Namen Abscissen- und die Y-Achse den Namen Ordinatenachse erhält. Mit demselben Rechte kann allerdings auch die x-Coordinate P_1N direct als Ordinate construirt und das zugehörige y als Abscisse ON auf der Y-Achse abgeschnitten werden; man entgeht jedoch dieser Unbestimmtheit, wenn man in letzterem Falle auch die Bezeichnung der Achsen verwechselt.

Die zuletzt mitgetheilten abgekürzten Constructionen gewinnen besonders dann eine nutzbare Anwendung, wenn in einer gegebenen Bildebene ein bestimmter Punkt mittelst seiner Coordinaten aufgetragen werden soll. Aus dem Früheren erhellt, dass diese Aufgabe nur eine Lösung haben kann, wenn das Coordinatensystem und die zur Abmessung der geradlinigen Strecken dienende Längeneinheit fixirt ist.

Wird zur Darstellung eines Punktes nur eine seiner beiden Coordinaten gegeben, so genügt der gestellten Aufgabe jeder Punkt derjenigen Geraden, welche in einem der gegebenen Coordinate

gleichen Abstande parallel zur andern Achse gelegt werden kann*). Die Gleichung

3) $$x = a$$

umfasst also die Lagen aller Punkte einer in der Entfernung a zur Y-Achse gezogenen Parallelen, während die Gleichung

4) $$y = b$$

einer Parallelen zur X-Achse angehört. In gleicher Weise beziehen sich die Formeln

5) $$x = 0 \text{ und } y = 0$$

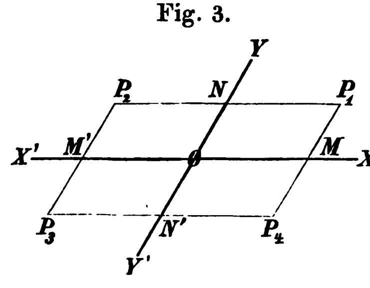
auf alle in den beiden Coordinatenachsen gelegenen Punkte, und zwar die erstere auf die Y-, die letztere auf die X-Achse. Durch das Zusammentreffen der beiden letzten Gleichungen wird der Coordinatenanfang bestimmt.

§. 2.

Schiefwinkliges Coordinatensystem. Polarcoordinaten.

Dieselben Beziehungen, welche im vorigen Paragraphen für die Lage eines Punktes gegen ein rechtwinkliges Coordinatensystem aufgestellt wurden, finden auch für zwei einen beliebigen schiefen Winkel einschliessende Coordinatenachsen Anwendung, wenn man nur die Coordinaten des Punktes nicht mehr in senkrechter Richtung, sondern in einer zu den Achsen parallelen Lage misst. Fig. 2 geht hierbei in Fig. 3 über, an welcher alle auf die erstere Figur bezüglichen Betrachtungen wiederholt werden können. — Der von den positiven Achsenseiten eingeschlossene Winkel YOX führt hier den Namen Coordinatenwinkel, das System selbst heisst ein schiefwinkliges Coordinatensystem. Alle übrigen Benennungen werden vom rechtwinkligen System übertragen. Die rechtwinkligen und schiefwinkligen Coordinaten lassen sich in dem Namen Parallelcoordinaten zusammenfassen.

Fig. 3.



*) Durch die nöthige Rücksicht auf die Vorzeichen der Coordinaten werden hierbei die beiden in gleichem Abstande von einer Geraden gelegenen Parallelen unterschieden.

Die Anwendung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes ührt grossentheils zu einfacheren Rechnungen, als die Wahl eines chiefwinkligen; doch werden wir auch Fälle kennen lernen, wo lurch letzteres eine grössere Eleganz bedingt wird. Vorläufig beıchränken wir uns auf eine Untersuchung, welche unabhängig vom Coordinatenwinkel für beide Arten von Parallelcoordinaten Giltigkeit hat.

Wird die Y-Achse eines Parallelcoordinatensystems parallel mit sich selbst um eine auf der X-Achse gemessene Strecke a verschoben, so verkleinern sich hierdurch die Abscissen um diese Grösse a, wenn die Verschiebung nach der Seite der positiven x vor sich geht; sie nehmen dagegen um dieselbe Strecke zu, sobald die Verschiebung im entgegengesetzten Sinne stattfindet. Bezeichnen wir mit x die auf die anfängliche Y-Achse bezogene Abscisse eines beliebigen Punktes, dagegen mit x_1 die entsprechende Entfernung desselben Punktes von der neuen Achse, so lassen sich beide Fälle in der Formel

1) $$x = x_1 + a$$

zusammenfassen, wenn nur ein nach der Seite der negativen x liegendes a auch als negative Abscisse in Rechnung gezogen wird. Die Analogie mit der in §. 1 besprochenen Verschiebung des Anfangspunktes für Messung der Abstände von Punkten in einer Geraden enthält hierfür den Beweis. — Wird ferner die X-Achse um eine auf der Y-Achse gemessene Strecke b parallel zu sich selbst verschoben und bezeichnet man dabei mit y und y_1 die alten und neuen Ordinaten eines Punktes der Coordinatenebene, so ergiebt sich in gleicher Weise, wie vorhin, das Resultat:

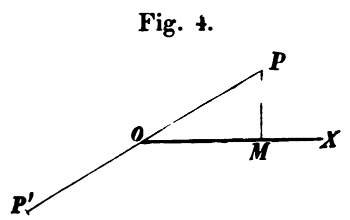
2) $$y = y_1 + b.$$

Insofern a und b die nach der Richtung der x und y gemessenen Verschiebungen beider Achsen bezeichnen, stellen sie zugleich die Verschiebungen des den Achsen gemeinschaftlichen Punktes dar, oder bilden mit anderen Worten die Coordinaten des neuen Anfangspunktes. Bestätigt wird dieses Resultat, wenn man in 1) und 2) nach Anleitung von 5) in §. 1 für den neuen Coordinatenanfang $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$ setzt.

Zu einer von dem Vorigen wesentlich verschiedenen Methode, die Lage eines Punktes in einer Ebene zu bestimmen, gelangt man durch Vertauschung der parallel mit sich selbst verschiebbaren Linie, welche bei Anwendung der Parallelcoordinaten alle Punkte

der Ebene in sich aufnehmen muss, mit einer um einen festen Punkt drehbaren Geraden. Dies geschieht in den sogenannten **Polarcoordinaten**, welche die Lage eines jeden Punktes der Coordinatenebene durch seine Distanz von einem festen Punkte — dem **Pol** — und den Winkel ausdrücken, den seine geradlinige Entfernung vom Pole mit einer festen durch den Pol gelegten Achse einschliesst. Stellt nämlich OX in Fig. 4 die Achse des Polarcoordinatensystems dar, die wir uns im Pole O begrenzt, nach X zu aber unbegrenzt denken müssen, so wird die Lage des Punktes P durch den Abstand PO — seinen sogenannten **Radius vector** oder **Leitstrahl** — bestimmt, wenn ausserdem der Winkel POX gegeben ist, den dieser Radiusvector mit der Achse bildet. Wir wollen den Leitstrahl PO mit r und den Winkel POX — die **Anomalie** — mit φ bezeichnen; r und φ bilden dann die Polarcoordinaten des Punktes P.

Fig. 4.



Lässt man den Winkel φ immer in derselben Richtung von OX aus von 0 bis 360^0 wachsen, so geht der bewegliche Radiusvector, der hierbei von O nach P hin unbegrenzt angenommen werden muss, durch alle Punkte der Ebene hindurch, ohne dass er rückwärts über O hinaus verlängert zu werden braucht. Haben daher z. B. die in eine Gerade zusammenfallenden Strecken PO und $P'O$ dieselbe Grösse, so kommen den Punkten P und P' gleiche Werthe von r zu, während die Anomalie des letzteren Punktes um 180^0 grösser ist, als die des Punktes P. So lange es daher nur gilt, die Lage aller Punkte der Ebene durch Polarcoordinaten zu fixiren, können negative Leitstrahlen eben so wohl ausgeschlossen werden, als Anomalien ausserhalb der Grenzen 0 und 360^0*).

Zwischen den Polar- und den rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes finden sehr einfache Beziehungen statt, wenn man den Pol mit dem Coordinatenanfange des rechtwinkligen Systems und die Achse der Polarcoordinaten mit der positiven Seite der

*) Später, namentlich bei der Theorie der Spiralen, muss allerdings diese Beschränkung aufgehoben werden; vorläufig jedoch, wo wir uns der Polarcoordinaten grossentheils nur als eines Hilfsmittels zur Umgestaltung der für Parallelcoordinaten giltigen Formeln bedienen werden, kann durch Beibehaltung dieser Grenzen manche Betrachtung vereinfacht werden.

X-Achse zusammenfallen lässt, wobei die Anomalien in der Drehrichtung von OX aus nach der Seite der positiven y hin wachsen sollen. Aus Fig. 4, worin unter den gegebenen Bedingungen OM und PM die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P darstellen, ergiebt sich dann unmittelbar:

3) $$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi.$$

Die allgemeine Giltigkeit dieser beiden Relationen zeigt sich, sobald man in Fig. 2 die Leitstrahlen der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 construirt, wobei die Anomalien die Werthe φ, $180^0 - \varphi$, $180^0 + \varphi$ und $360^0 - \varphi$ durchlaufen. Die Grösse von r, sowie die absoluten Werthe von x und y bleiben hierbei ungeändert, während die früher genannten verschiedenen Vorzeichen der rechtwinkligen Coordinaten der vier Punkte P sich aus den Vorzeichen der Sinus und Cosinus ebenfalls richtig ergeben.

Sowie die Formeln 3) dazu dienen, um von den gegebenen Polarcoordinaten eines Punktes zu seinen rechtwinkligen überzugehen, so erhält man Gleichungen zur Lösung der entgegengesetzten Aufgabe, wenn man in den genannten Formeln auf r und φ reducirt. Werden nämlich beide Gleichungen quadrirt und addirt, so entsteht:

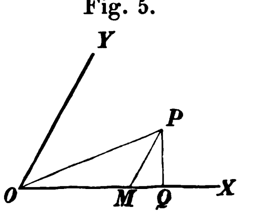
4) $$r^2 = x^2 + y^2, \quad \text{also } r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

während man durch Division zu der Gleichung

5) $$\tan \varphi = \frac{y}{x} \text{ *)}$$

gelangt. Es wird nicht die geringste Schwierigkeit gewähren, die Richtigkeit dieser Formeln auch in der Figur nachzuweisen.

Fig. 5.



Etwas complicirter gestalten sich die Beziehungen zwischen den schiefwinkligen und Polarcoordinaten eines Punktes, wobei wieder beide Systeme den oben aufgestellten Bedingungen unterworfen werden sollen. Wir halten uns hierbei an Fig. 5, wo $OM = x$ und $PM = y$ die schiefwink-

---

*) Die Zweideutigkeit, welche diese Formel insofern zu enthalten scheint, als zweien um eine halbe Umdrehung verschiedenen Winkeln gleiche trigonometrische Tangenten zukommen, verschwindet, sobald man nicht allein auf das Vorzeichen des Quotienten $\frac{y}{x}$, sondern auch auf die besonderen Zeichen seines Dividenden und Divisors Rücksicht nimmt.

ligen Coordinaten des Punktes P, $OP = r$ und $\angle MOP = \varphi$ seine Polarcoordinaten darstellen. Wird der Coordinatenwinkel XOY mit ω bezeichnet, so findet man aus einem bekannten trigonometrischen Gesetze die Proportionen:

$$x : r = \sin(\omega - \varphi) : \sin\omega$$
$$y : r = \sin\varphi : \sin\omega$$

und hieraus

6) $$x = \frac{r \sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega}, \qquad y = \frac{r \sin\varphi}{\sin\omega}.$$

Ferner gewährt das Dreieck OMP die Gleichung:

7) $$r^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega$$

und aus

$$\tan\varphi = \frac{PQ}{OQ}$$

ergiebt sich die Formel:

8) $$\tan\varphi = \frac{y \sin\omega}{x + y\cos\omega} \text{ *)}.$$

Auch hier wird, wenn man die Coordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 3) in beiden Systemen verfolgt, mit Leichtigkeit die allgemeine Geltung dieser Relationen nachgewiesen. — Die Gleichungen 6) bis 8) sind insofern als allgemeinere zu betrachten, als man aus ihnen zu den Formeln 3) bis 5) zurückkommt, wenn man $\omega = 90^0$ setzt.

§. 3.

Aufgaben.

Durch die bis jetzt gewonnenen Coordinatenbegriffe nebst ihren gegenseitigen Beziehungen sind wir in den Stand gesetzt, mehrfache Aufgaben zu lösen. Folgende mögen hier Platz finden.

I. Durch die gegebenen Coordinaten zweier Punkte P und P_1 ihre Entfernung PP_1 auszudrücken.

---

*) Dieselbe Gleichung lässt sich auch aus Nr. 6) durch Elimination von r gewinnen. Durch Division erhält man zunächst:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\varphi},$$

worin man $\sin(\omega - \varphi)$ zu entwickeln und Zähler und Nenner der rechten Seite durch $\cos\varphi$ zu dividiren hat, um zu der Formel

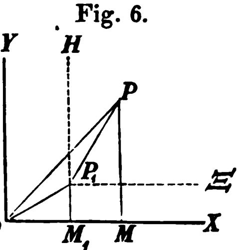
$$\frac{x}{y} = \frac{\sin\omega - \cos\omega \tan\varphi}{\tan\varphi}$$

zu gelangen. Hierin kann nachher leicht auf $\tan\varphi$ reducirt werden.

A. **Bei Anwendung rechtwinkliger Coordinaten (Fig. 6).**

Es seien x und y die rechtwinkligen Coordinaten OM und PM des Punktes P und $x_1 y_1$ die entsprechenden Grössen für P_1; ferner werde die Entfernung PP_1 mit e bezeichnet.

Fig. 6.



Wir verschieben die gegebenen Coordinatenachsen parallel zu sich selbst in die Lage $\Xi P_1 H$, so dass P_1 zum neuen Coordinatenanfange wird, und bezeichnen mit ξ und η die auf dieses neue System bezogenen Coordinaten des Punktes P. Dann ist nach Formel 4) in §. 2

$$e^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Zugleich entsteht aus 1) und 2) desselben Paragraphen

$$x = \xi + x_1 \quad \text{und} \quad y = \eta + y_1,$$

also auch:

$$\xi = x - x_1 \quad \text{und} \quad \eta = y - y_1.$$

Die Verbindung dieser Formeln giebt:

$$1) \qquad e^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

oder

$$e = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}.$$

Die allgemeine Geltung der zu Grunde gelegten Formeln lässt dieses Resultat als unabhängig von der besonderen Lage der Punkte P und P_1 erscheinen.

B. Sind P und P_1 durch ihre Polarcoordinaten $r\varphi$ und $r_1\varphi_1$ bestimmt, so dass z. B. $OP = r$ und $\angle MOP = \varphi$, so erhalten wir aus dem Dreieck POP_1:

$$2) \qquad e^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\varphi - \varphi_1)$$

oder

$$e = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\varphi - \varphi_1)},$$

und es ist auch hier leicht, die Allgemeinheit dieser Formel nachzuweisen. Befinden sich nämlich zunächst die beiden Punkte in einer solchen Lage, dass die Differenz $\varphi - \varphi_1$ negativ wird, so ist dies bekanntlich ohne Einfluss auf die Cosinusfunction und somit bleibt die Richtigkeit der gefundenen Formel erhalten. Liegen ferner P und P_1 so zu beiden Seiten von OX, dass die den beiden Punkten zugehörigen Anomalien um mehr als 180° verschieden sind, so geht die Formel 2) über in die Gleichung:

$$e^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos[\varphi + (360^0 - \varphi_1)],$$

Die Eckpunkte heissen P, P_1, P_2, ihre Coordinaten der Reihe nach xy, x_1y_1, x_2y_2, und die Dreiecksfläche werde wieder mit $\varDelta$ bezeichnet. Verschieben wir beide Achsen parallel zu sich selbst, bis der Punkt P_2 Coordinatenanfang wird, so sollen $\xi\eta$ und $\xi_1\eta_1$ die auf das neue System bezogenen Coordinaten der Punkte P und P_1 sein.

Wird zunächst ein rechtwinkliges Coordinatensystem angewendet, so ergiebt sich aus Formel 5)

$$2\varDelta = \eta\xi_1 - \xi\eta_1.$$

Nach Analogie der bei Aufgabe I. unter A. angestellten Betrachtungen ist aber

$$\xi = x - x_2, \qquad \eta = y - y_2,$$
$$\xi_1 = x_1 - x_2, \qquad \eta_1 = y_1 - y_2;$$

folglich erhält man:

$$2\varDelta = (y - y_2)(x_1 - x_2) - (x - x_2)(y_1 - y_2)$$

und nach Ausführung der Rechnung und geänderter Ordnung der einzelnen Glieder:

$$7)\quad 2\varDelta = (yx_1 - xy_1) + (y_1x_2 - x_1y_2) + (y_2x - x_2y)$$

oder auch:

$$8)\quad 2\varDelta = y(x_1 - x_2) + y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1).$$

Beide Formeln sind nicht allein sehr symmetrisch, sondern können auch ohne Weiteres hingeschrieben werden, wenn man den Kreislauf beachtet, welcher im Wechsel der Stellenzeiger der einzelnen Coordinaten stattfindet. Jenachdem man bei der Numerirung der einzelnen Eckpunkte dieselben nach der einen oder nach der entgegengesetzten Richtung durchläuft, erhält man für den Flächeninhalt einen positiven oder einen negativen Ausdruck; nach der oben bei Gleichung 4) gemachten Bemerkung kann aber jedesmal nur der absolute Zahlwerth in Frage kommen.

Wiederholen wir die vorhergehende Untersuchung für ein schiefwinkliges Coordinatensystem, so geht die Gleichung 6) in den der Formel 8) entsprechenden Ausdruck:

$$9)\quad 2\varDelta = [y(x_1 - x_2) + y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1)] \sin\omega$$

über, worin ω den Coordinatenwinkel bezeichnet.

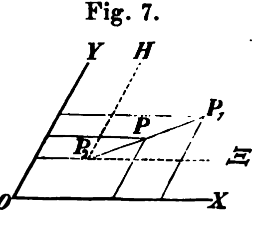
Wenn endlich in Nr. 7) und 9) die Fläche $\varDelta = 0$ gesetzt wird, so ergiebt sich als Bedingungsgleichung dafür, dass die drei Punkte P, P_1 und P_2 in einer geraden Linie liegen, die Formel:

$$10)\qquad y(x_1 - x_2) + y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1) = 0.$$

IV. Eine im Folgenden mehrfach zur Anwendung kommende Aufgabe verlangt: den Mittelpunkt P der geraden Verbindungslinie zweier durch Parallelcoordinaten bestimmten Punkte P_1 und P_2 in Coordinaten desselben Systems auszudrücken.

Um sogleich zu möglichst allgemeinen Resultaten zu gelangen, geben wir dem Coordinatenwinkel XOY in Fig. 7 eine beliebige Grösse. Die Coordinaten der Punkte P, P_1 und P_2 werden wie in der vorigen Aufgabe bezeichnet und beide Achsen wieder parallel zu sich selbst verlegt, so dass P_2 Coordinatenanfang wird. Im neuen Systeme erhalten die Coordinaten der Punkte P und P_1 ebenfalls die obigen Bezeichnungen.

Fig. 7.



Nach einem bekannten Satze der Planimetrie folgt unter diesen Voraussetzungen, dass

$$\xi = \tfrac{1}{2}\,\xi_1 \text{ und } \eta = \tfrac{1}{2}\,\eta_1,$$

also auch:

$$x - x_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} \text{ und } y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}.$$

Durch Reduction auf x und y erhält man hieraus für die gesuchten Coordinaten:

$$11) \qquad x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Die allgemeine Giltigkeit dieser Formeln knüpft sich an die Allgemeinheit der dabei zu Grunde gelegten Relationen.

Es wird eine nützliche Uebung gewähren, die in Nr. 10) für die Coordinaten dreier in einer Geraden gelegenen Punkte gewonnene Bedingungsgleichung an dem hier gefundenen Resultate zu erproben.

V. Verallgemeinern wir die vorhergehende Aufgabe dahin, die Lage des Punktes P in der Verbindungslinie zwischen P_1 und P_2 so zu bestimmen, dass das Verhältniss

$$PP_2 : P_1P_2 = 1 : n$$

stattfindet*), so erhalten wir mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen:

*) Sobald nicht $n = 2$ ist, findet sich noch ein zweiter dieser Bedingung genügender Punkt auf der Verlängerung von $P_1 P_2$.

$$\xi = \frac{1}{n} \xi_1, \qquad \eta = \frac{1}{n} \eta_1,$$

also auch:

12) $$x - x_2 = \frac{x_1 - x_2}{n} \text{ und } y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{n},$$

woraus die Werthe von x und y leicht berechnet werden können. Diese Resultate finden eine interessante Anwendung in der folgenden Aufgabe, welche als eine neue Verallgemeinerung von Nr. IV. betrachtet werden kann:

Wenn die n Punkte $P_1, P_2, \ldots. P_{n-1}, P_n$ nach ihrer Lage gegen ein Parallelcoordinatensystem gegeben sind, so wird nach der Bedeutung des Punktes P gefragt, dessen Coordinaten die arithmetischen Mittel für die entsprechenden Coordinaten der gegebenen Punkte darstellen.

Sind x_m und y_m die Coordinaten eines Punktes P_m, so gelten nach der gestellten Aufgabe für den zu untersuchenden Punkt die Gleichungen:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n}{n}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$x' = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}, \qquad y' = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}}{n-1},$$

so hat der Punkt P', dem diese Coordinaten zukommen, dieselbe Bedeutung für die $n-1$ Punkte $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$, welche P für alle n Punkte besitzt. Aus der Gleichung

$$(n-1)\, x' = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$$

folgt dann in Verbindung mit dem obigen Werthe von x:

$$n x = (n-1)\, x' + x_n.$$

Lösen wir hierin die Klammer auf und vereinigen die den Factor n enthaltenden Glieder, so entsteht:

$$n\,(x - x') = x_n - x'$$

und hieraus:

13) $$x - x' = \frac{x_n - x'}{n}.$$

In ganz gleicher Weise führen die Werthe von y und y' zu dem Resultate:

14) $$y - y' = \frac{y_n - y'}{n}.$$

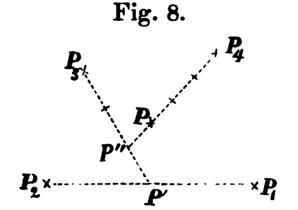
Die Vergleichung der Ausdrücke 13) und 14) mit Nr. 12) zeigt eine vollkommene Uebereinstimmung in der Form. Gehen wir daher auf die den Gleichungen 12) zu Grunde liegende Bedingung zurück, so zeigt sich, dass der Punkt P in der Verbindungslinie zwischen P' und P_n gelegen ist und dabei die Proportion

$$PP' : P_n P' = 1 : n$$

stattfindet. — Wird jetzt der Reihe nach $n = 2, 3, 4$ u. s. f. gesetzt, so gelangt man zu folgender Construction des Punktes P:

Man verbinde P_1 und P_2 geradlinig und theile die Verbindungslinie $P_1 P_2$ in zwei gleiche Theile. Der gefundene Theilpunkt, den wir P' nennen wollen, wird mit P_3 verbunden und hierauf die Linie $P' P_3$ in drei gleiche Theile getheilt; der zunächst an P' liegende Theilpunkt heisse P''. Theilt man jetzt $P'' P_4$ in vier gleiche Theile, so erhält man in dem zunächst an P'' gelegenen Theilpunkte einen Punkt, dessen Verbindungslinie mit P_5 in fünf gleiche Theile zu theilen ist u. s. f. Der Fortgang dieses Verfahrens ist leicht zu übersehen und giebt schliesslich bei Theilung der letzten Verbindungslinie in n gleiche Theile den gesuchten Punkt P. Fig. 8 zeigt die Ausführung der Construction für vier gegebene Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4.

Fig. 8.



Es ist zu beachten, dass die im Vorigen gefundene constructive Darstellung des gesuchten Punktes sich völlig unabhängig von der besonderen Lage des der Aufgabe zu Grunde gelegten Coordinatensystems zeigt. Für welche zwei Achsen wir daher auch die Bedingungen der Aufgabe als gegeben betrachten mögen, so wird doch der zu construirende Punkt derselbe bleiben, wenn nur die n bestimmenden Punkte ihre Lage in der Ebene nicht ändern. Nehmen wir das Coordinatensystem rechtwinklig an, so gelangen wir zu dem Resultate, dass die Entfernung des unserer Aufgabe entsprechenden Punktes von jeder Geraden in der Ebene seiner Bestimmungspunkte das arithmetische Mittel der Abstände dieser Punkte von derselben Linie bildet. Wir nennen ihn mit Rücksicht auf diese Eigenschaft den Punkt der mittleren Entfernung für das gegebene Punktsystem.

Noch ist zu bemerken, dass bei Ausführung der besprochenen Construction die Reihenfolge, in welcher die gegebenen Punkte

benutzt werden, keinen Einfluss auf das gesuchte Resultat ausüben kann. Der Umstand, dass durch Aenderung dieser Reihenfolge an der Grundbedingung der Aufgabe nichts geändert wird, liefert den Beweis für die aufgestellte Behauptung.

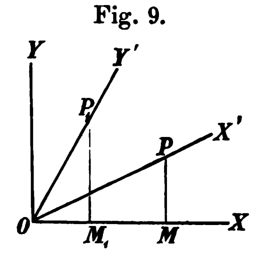
§. 4.

Transformation der Parallelcoordinaten.

Häufig wird es bei analytischen Untersuchungen nothwendig, die Coordinaten zu transformiren, d. h. die auf ein gegebenes System bezogenen Coordinaten eines Punktes in Coordinaten eines neuen Systems auszudrücken. Die einfachsten hierher gehörigen Fälle sind in §. 2 besprochen und in den vorigen Aufgaben zur Anwendung gebracht worden. Es erübrigt uns noch eine Ergänzung, wobei wir uns jedoch lediglich auf Parallelcoordinaten beschränken wollen.

Man gelangt von einem gegebenen Parallelcoordinatensysteme zu jedem andern in derselben Ebene gelegenen durch parallele Verschiebung und durch Drehung der Achsen, von welchen zwei Fällen der erstere bereits in §. 2 erledigt wurde. Was die Achsendrehung betrifft, so betrachten wir zunächst den Uebergang von einem rechtwinkligen Systeme zu einem beliebigen andern mit demselben Anfangspunkte.

Fig. 9.



Die X-Achse des rechtwinkligen Systems OX und OY in Fig. 9 ist um den Winkel $X'OX = \alpha$ gedreht worden, wobei dieser Winkel nach Art der Anomalien eines Polarcoordinatensystems von 0 bis 360° gezählt werden soll. Für einen in der neuen X-Achse gelegenen Punkt P bilden dann $OP = x'$ und der Winkel α die Polarcoordinaten, während $OM = x$ und $PM = y$ die zugehörigen rechtwinkligen Coordinaten darstellen. Nach Nr. 3) in §. 2 ist daher

$$x = x' \cos \alpha, \qquad y = x' \sin \alpha$$

und es gelten diese Formeln ebensowohl für einen auf der positiven als auf der negativen Achsenseite gelegenen Punkt, da mit dem Negativwerden von x' zu gleicher Zeit x und y ihre Vorzeichen wechseln. — Wird ferner der Winkel $Y'OX$ oder die

Anomalie der neuen Y-Achse mit β bezeichnet, so folgt in ganz gleicher Weise für einen in dieser Achse gelegenen Punkt P_1

$$x = y' \cos\beta, \qquad y = y' \sin\beta,$$

wobei wir $OP_1 = y'$, $OM_1 = x$ und $P_1M_1 = y$ setzen.

Für einen beliebigen Punkt P in Fig. 10 seien $OM = x$ und $PM = y$ die ursprünglichen rechtwinkligen Coordinaten, dagegen $OM_1 = x'$ und $PM_1 = y'$ die Coordinaten in dem durch Achsendrehung entstandenen neuen Systeme. Denken wir uns YOX parallel zu sich selbst in die Lage $HM_1\Xi$ verschoben, so sind nach dem Vorigen $x' \cos\alpha$ und $x' \sin\alpha$ die rechtwinkligen Coordinaten des neuen Anfangspunktes, $y' \cos\beta$ und $y' \sin\beta$ aber die Coordinaten des Punktes P im Systeme $M_1\Xi$ und M_1H, wobei α und β die früheren Bedeutungen behalten. Nach Nr. 1) und 2) in §. 2 ist demnach:

Fig. 10.

$$1) \qquad \begin{cases} x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta \\ y = x' \sin\alpha + y' \sin\beta. \end{cases}$$

Betrachten wir jetzt einige specielle Fälle.

A. Wird nur eine der beiden Achsen geändert, so ist, wenn man $\alpha = 0$ setzt, also die X-Achse beibehält,

$$2) \qquad x = x' + y' \cos\beta, \qquad y = y' \sin\beta.$$

Ebenso ergiebt sich unter Beibehaltung der Y-Achse aus der Substitution $\beta = 90^0$:

$$3) \qquad x = x' \cos\alpha, \qquad y = x' \sin\alpha + y'.$$

B. Soll das neue System gleichfalls ein rechtwinkliges sein, so ist $\beta = 90^0 + \alpha$ zu setzen. Man erhält dann:

$$4) \qquad x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \qquad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

C. Der neue Coordinatenwinkel sei 2γ und werde von der früheren X-Achse halbirt, so dass β in γ und α in $360^0 - \gamma$ übergeht. Diese Substitutionen geben mit Aushebung gemeinschaftlicher Factoren:

$$5) \qquad x = (y' + x') \cos\gamma, \qquad y = (y' - x') \sin\gamma.$$

Uebergang von einem schiefwinkligen Coordinatensysteme zu einem beliebigen andern mit demselben Anfangspunkte.

Fig. 11.

Das System OX und OY (Fig. 11) habe den Coordinatenwinkel ω und wir behalten im Uebrigen die früheren Bezeichnungen bei, so dass z. B. $\beta - \alpha$ den neuen Coordinatenwinkel $Y'OX'$ darstellt. Nehmen wir ein drittes Coordinatensystem zu Hilfe, welches neben der Achse OX die darauf rechtwinklige OH besitzt, und setzen $PN = P_1M_1 = \eta$, so folgt aus den Bemerkungen zu Fig. 9 für jede Lage des Punktes P und für jede Grösse des Winkels ω:

$$\eta = y \sin \omega.$$

Zu gleicher Zeit erhalten wir aus der zweiten Gleichung unter Nr. 1)

$$\eta = x' \sin \alpha + y' \sin \beta$$

und aus Verbindung der beiden letzten Formeln:

$$y \sin \omega = x' \sin \alpha + y' \sin \beta.$$

Insofern die Achsen OX und OY in ihrer Bezeichnung vertauscht werden können, gilt ebenso die Relation:

$$x \sin \omega = x' \sin \alpha' + y' \sin \beta',$$

wenn wir uns unter α' und β' die von den neuen Achsen und OY eingeschlossenen Winkel vorstellen. Dann ist aber $\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \omega$, also $\alpha' = \omega - \alpha$ und $\beta' = \omega - \beta$, und man erhält hiernach:

$$x \sin \omega = x' \sin (\omega - \alpha) + y' \sin (\omega - \beta)\,^{*}).$$

Die hier entwickelten Resultate führen zu den Transformationsformeln:

$$6) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= x' \frac{\sin (\omega - \alpha)}{\sin \omega} + y' \frac{\sin (\omega - \beta)}{\sin \omega} \\ y &= x' \frac{\sin \alpha}{\sin \omega} + y' \frac{\sin \beta}{\sin \omega}, \end{aligned} \right.$$

von denen man zu den unter Nr. 1) gewonnenen wieder zurückgehen kann, wenn man $\omega = 90^0$ setzt.

---

*) Die Formel: $\alpha + \alpha' = \omega$ gilt, streng genommen, nur so lange, als OX', wie in Fig. 11, innerhalb des Winkels ω liegt, so dass $\alpha < \omega$ ist. Für $\alpha > \omega$ ergiebt sich, wenn man α' immer in der obigen Drehrichtung misst: $\alpha - (360^0 - \alpha') = \omega$ oder $\alpha + \alpha' = 360^0 + \omega$. Dadurch wird aber die Richtigkeit des gefundenen Resultates nicht beeinträchtigt, weil Winkeln, die um eine ganze Umdrehung verschieden sind, dieselben trigonometrischen Functionen zukommen. Gleiches gilt für β und β'.

Wir gelangen jetzt zu den allgemeinsten Relationen für Umwandlung von Parallelcoordinaten, wenn wir mit der Aenderung der Achsenrichtung noch die Verlegung des Coordinatenanfangspunktes verknüpfen. Bezeichnen a und b die im ursprünglichen Systeme gemessene Abscisse und Ordinate des neuen Anfanges, so giebt die Verbindung der vorhergehenden Formeln mit den bereits mehrfach benutzten für parallele Achsenverschiebung:

$$7)\quad \begin{cases} x = a + x' \dfrac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin \omega} + y' \dfrac{\sin(\omega - \beta)}{\sin \omega} \\ y = b + x' \dfrac{\sin \alpha}{\sin \omega} + y' \dfrac{\sin \beta}{\sin \omega}. \end{cases}$$

Ist hierbei das ursprüngliche Coordinatensystem ein rechtwinkliges, so entstehen, indem man entweder sogleich von den Gleichungen 1) ausgeht oder auch in den jetzt gefundenen $\omega = 90^0$ setzt, die einfacheren Beziehungen:

$$8)\quad \begin{cases} x = a + x' \cos \alpha + y' \cos \beta \\ y = b + x' \sin \alpha + y' \sin \beta. \end{cases}$$

Bemerkenswerth ist für die Anwendung der in diesem Paragraphen gefundenen Transformationsformeln, dass sie in Beziehung auf die in ihnen enthaltenen Coordinaten sämmtlich Gleichungen ersten Grades darstellen. Es genügt zur Bestätigung dieser Bemerkung, die Form der Gleichungen unter Nr. 7) zu betrachten, welche als die allgemeinsten alle übrigen in sich schliessen.

Zweites Capitel.

Die gerade Linie.

---

§. 5.

Gleichungen der geraden Linie.

Die charakteristische Eigenschaft der geraden Linie, dass sie durchaus nach einer und derselben Richtung verläuft, lässt sich am einfachsten in der Sprache der analytischen Geometrie ausdrücken, wenn man irgend einen ihrer Punkte zum Pole eines Polarcoordinatensystems wählt. Bezeichnet unter dieser Voraussetzung α den zwischen 0 und 180^0 gelegenen und im Sinne der Anomalien gemessenen Winkel, welchen die Gerade mit der Achse des benutzten Systemes bildet, so geben die Gleichungen

$$\varphi = \alpha \quad \text{und} \quad \varphi = 180^0 + \alpha$$

die Anomalien aller Punkte ihrer beiden durch den Pol getrennten Theile *).

Gehen wir jetzt zu einem Parallelcoordinatensysteme über, dessen positive Seite der X-Achse unter Beibehaltung des Poles als Coordinatenanfang mit der Achse des Polarsystems zusammenfällt, so folgt bei Anwendung rechtwinkliger Coordinaten aus Nr. 5) in §. 2

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha$$

als diejenige Gleichung, durch welche die beiden Coordinaten jedes einzelnen Punktes der in Rede stehenden Linie von ein-

---

*) Schon die erste dieser beiden Gleichungen schliesst die Lage aller Punkte der Geraden in sich, wenn wir den bei den Parallelcoordinaten angewendeten Begriff der entgegengesetzten Grössen auch auf die Leitstrahlen übertragen wollen.

Wollen wir jetzt zu rechtwinkligen Coordinaten übergehen, so ist $\sin(\varphi - \varphi_1)$ zu entwickeln, worauf die Formeln 3) des vorigen Paragraphen benutzt werden können. Wir erhalten:

$$2\Delta = r \sin\varphi \,.\, r_1 \cos\varphi_1 - r\cos\varphi \,.\, r_1 \sin\varphi_1 \,.$$

und hieraus:

$$5) \qquad 2\Delta = y x_1 - x y_1.$$

Fig. 6 führt unmittelbar zu demselben Resultate, wenn man das Dreieck POP_1 als Differenz des rechtwinkligen Dreiecks OPM und des Vierecks OP_1PM auffasst und letzteres wieder in das rechtwinklige Dreieck OP_1M_1 und das Trapez M_1P_1PM zerlegt. Dann ist

$$2\Delta = xy - x_1 y_1 - (y + y_1)(x - x_1)$$

und die Ausführung der in den Klammern angedeuteten Multiplication leitet zu der Gleichung 5) zurück.

Der letztere Weg ist noch insofern von Interesse, als, wenn man auf ihm zu der genannten Formel gelangt und dieselbe dann mit der oben gewonnenen Gleichung 4) zusammenstellt, sich hierdurch der Ausdruck für den Sinus einer Winkeldifferenz finden lässt. Man erhält nämlich bei Division durch rr_1

$$\sin(\varphi - \varphi_1) = \frac{y}{r} \cdot \frac{x_1}{r_1} - \frac{x}{r} \cdot \frac{y_1}{r_1},$$

und dies giebt mit Benutzung der schon mehrfach gebrauchten Relationen zwischen Polar- und rechtwinkligen Coordinaten:

$$\sin(\varphi - \varphi_1) = \sin\varphi \,.\, \cos\varphi_1 - \cos\varphi \,.\, \sin\varphi_1.$$

Die im Vorigen angewendete Zerlegungsmethode, nach welcher in Fig. 6 das Dreieck POP_1 auf zwei Dreiecke und ein Trapez zurückgeführt wurde, ist offenbar auch dann noch am Platze, wenn man durch O ein schiefwinkliges Coordinatensystem legt und in demselben PM und P_1M_1 als schiefwinklige Ordinaten construirt. Wird dann der Coordinatenwinkel wie früher mit ω bezeichnet, so erhält jeder der drei bei der Zerlegung benutzten Flächenausdrücke noch den Factor $\sin\omega$, der hierdurch zum Gesammtfactor des Resultates wird. Die Gleichung 5) geht demnach bei Anwendung von schiefwinkligen Coordinaten über in:

$$6) \qquad 2\Delta = (y x_1 - x y_1) \sin\omega.$$

III. Wir sind jetzt in den Stand gesetzt, **den Flächeninhalt eines beliebigen Dreieckes zu berechnen**, wenn die Parallelcoordinaten seiner drei Eckpunkte gegeben sind.

Die Eckpunkte heissen P, P_1, P_2, ihre Coordinaten der Reihe nach xy, x_1y_1, x_2y_2, und die Dreiecksfläche werde wieder mit Δ bezeichnet. Verschieben wir beide Achsen parallel zu sich selbst, bis der Punkt P_2 Coordinatenanfang wird, so sollen $\xi\eta$ und $\xi_1\eta_1$ die auf das neue System bezogenen Coordinaten der Punkte P und P_1 sein.

Wird zunächst ein rechtwinkliges Coordinatensystem angewendet, so ergiebt sich aus Formel 5)

$$2\Delta = \eta\xi_1 - \xi\eta_1.$$

Nach Analogie der bei Aufgabe I. unter A. angestellten Betrachtungen ist aber

$$\xi = x - x_2, \qquad \eta = y - y_2,$$
$$\xi_1 = x_1 - x_2, \qquad \eta_1 = y_1 - y_2;$$

folglich erhält man:

$$2\Delta = (y - y_2)(x_1 - x_2) - (x - x_2)(y_1 - y_2)$$

und nach Ausführung der Rechnung und geänderter Ordnung der einzelnen Glieder:

$$7) \quad 2\Delta = (yx_1 - xy_1) + (y_1x_2 - x_1y_2) + (y_2x - x_2y)$$

oder auch:

$$8) \quad 2\Delta = y(x_1 - x_2) + y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1).$$

Beide Formeln sind nicht allein sehr symmetrisch, sondern können auch ohne Weiteres hingeschrieben werden, wenn man den Kreislauf beachtet, welcher im Wechsel der Stellenzeiger der einzelnen Coordinaten stattfindet. Jenachdem man bei der Numerirung der einzelnen Eckpunkte dieselben nach der einen oder nach der entgegengesetzten Richtung durchläuft, erhält man für den Flächeninhalt einen positiven oder einen negativen Ausdruck; nach der oben bei Gleichung 4) gemachten Bemerkung kann aber jedesmal nur der absolute Zahlwerth in Frage kommen.

Wiederholen wir die vorhergehende Untersuchung für ein schiefwinkliges Coordinatensystem, so geht die Gleichung 6) in den der Formel 8) entsprechenden Ausdruck:

$$9) \quad 2\Delta = [y(x_1 - x_2) + y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1)] \sin\omega$$

über, worin ω den Coordinatenwinkel bezeichnet.

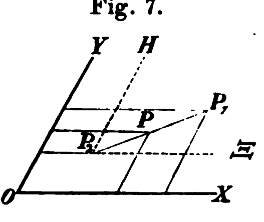
Wenn endlich in Nr. 7) und 9) die Fläche $\Delta = 0$ gesetzt wird, so ergiebt sich als Bedingungsgleichung dafür, dass die drei Punkte P, P_1 und P_2 in einer geraden Linie liegen, die Formel:

$$10) \quad y(x_1 - x_2) + y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1) = 0.$$

IV. Eine im Folgenden mehrfach zur Anwendung kommende Aufgabe verlangt: den Mittelpunkt P der geraden Verbindungslinie zweier durch Parallelcoordinaten bestimmten Punkte P_1 und P_2 in Coordinaten desselben Systems auszudrücken.

Um sogleich zu möglichst allgemeinen Resultaten zu gelangen, geben wir dem Coordinatenwinkel XOY in Fig. 7 eine beliebige Grösse. Die Coordinaten der Punkte P, P_1 und P_2 werden wie in der vorigen Aufgabe bezeichnet und beide Achsen wieder parallel zu sich selbst verlegt, so dass P_2 Coordinatenanfang wird. Im neuen Systeme erhalten die Coordinaten der Punkte P und P_1 ebenfalls die obigen Bezeichnungen.

Fig. 7.



Nach einem bekannten Satze der Planimetrie folgt unter diesen Voraussetzungen, dass

$$\xi = \tfrac{1}{2}\xi_1 \text{ und } \eta = \tfrac{1}{2}\eta_1,$$

also auch:

$$x - x_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} \text{ und } y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}.$$

Durch Reduction auf x und y erhält man hieraus für die gesuchten Coordinaten:

$$11) \qquad x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Die allgemeine Giltigkeit dieser Formeln knüpft sich an die Allgemeinheit der dabei zu Grunde gelegten Relationen.

Es wird eine nützliche Uebung gewähren, die in Nr. 10) für die Coordinaten dreier in einer Geraden gelegenen Punkte gewonnene Bedingungsgleichung an dem hier gefundenen Resultate zu erproben.

V. Verallgemeinern wir die vorhergehende Aufgabe dahin, die Lage des Punktes P in der Verbindungslinie zwischen P_1 und P_2 so zu bestimmen, dass das Verhältniss

$$PP_2 : P_1P_2 = 1 : n$$

stattfindet*), so erhalten wir mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen:

*) Sobald nicht $n = 2$ ist, findet sich noch ein zweiter dieser Bedingung genügender Punkt auf der Verlängerung von $P_1 P_2$.

$$\xi = \frac{1}{n}\,\xi_1, \qquad \eta = \frac{1}{n}\,\eta_1,$$

also auch:

12) $$x - x_2 = \frac{x_1 - x_2}{n} \text{ und } y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{n},$$

woraus die Werthe von x und y leicht berechnet werden können. Diese Resultate finden eine interessante Anwendung in der folgenden Aufgabe, welche als eine neue Verallgemeinerung von Nr. IV. betrachtet werden kann:

Wenn die n Punkte P_1, P_2, ... P_{n-1}, P_n nach ihrer Lage gegen ein Parallelcoordinatensystem gegeben sind, so wird nach der Bedeutung des Punktes P gefragt, dessen Coordinaten die arithmetischen Mittel für die entsprechenden Coordinaten der gegebenen Punkte darstellen.

Sind x_m und y_m die Coordinaten eines Punktes P_m, so gelten nach der gestellten Aufgabe für den zu untersuchenden Punkt die Gleichungen:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n}{n}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$x' = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}, \qquad y' = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}}{n-1},$$

so hat der Punkt P', dem diese Coordinaten zukommen, dieselbe Bedeutung für die $n-1$ Punkte P_1, P_2, ... P_{n-1}, welche P für alle n Punkte besitzt. Aus der Gleichung

$$(n-1)\,x' = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$$

folgt dann in Verbindung mit dem obigen Werthe von x:

$$n\,x = (n-1)\,x' + x_n.$$

Lösen wir hierin die Klammer auf und vereinigen die den Factor n enthaltenden Glieder, so entsteht:

$$n\,(x - x') = x_n - x'$$

und hieraus:

13) $$x - x' = \frac{x_n - x'}{n}.$$

In ganz gleicher Weise führen die Werthe von y und y' zu dem Resultate:

14) $$y - y' = \frac{y_n - y'}{n}.$$

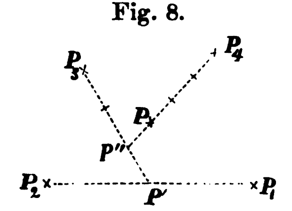
Die Vergleichung der Ausdrücke 13) und 14) mit Nr. 12) zeigt eine vollkommene Uebereinstimmung in der Form. Gehen wir daher auf die den Gleichungen 12) zu Grunde liegende Bedingung zurück, so zeigt sich, dass der Punkt P in der Verbindungslinie zwischen P' und P_n gelegen ist und dabei die Proportion

$$PP' : P_n P' = 1 : n$$

stattfindet. — Wird jetzt der Reihe nach $n = 2, 3, 4$ u. s. f. gesetzt, so gelangt man zu folgender Construction des Punktes P:

Man verbinde P_1 und P_2 geradlinig und theile die Verbindungslinie $P_1 P_2$ in zwei gleiche Theile. Der gefundene Theilpunkt, den wir P' nennen wollen, wird mit P_3 verbunden und hierauf die Linie $P' P_3$ in drei gleiche Theile getheilt; der zunächst an P' liegende Theilpunkt heisse P''. Theilt man jetzt $P'' P_4$ in vier gleiche Theile, so erhält man in dem zunächst an P'' gelegenen Theilpunkte einen Punkt, dessen Verbindungslinie mit P_5 in fünf gleiche Theile zu theilen ist u. s. f. Der Fortgang dieses Verfahrens ist leicht zu übersehen und giebt schliesslich bei Theilung der letzten Verbindungslinie in n gleiche Theile den gesuchten Punkt P. Fig. 8 zeigt die Ausführung der Construction für vier gegebene Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4.

Fig. 8.



Es ist zu beachten, dass die im Vorigen gefundene constructive Darstellung des gesuchten Punktes sich völlig unabhängig von der besonderen Lage des der Aufgabe zu Grunde gelegten Coordinatensystems zeigt. Für welche zwei Achsen wir daher auch die Bedingungen der Aufgabe als gegeben betrachten mögen, so wird doch der zu construirende Punkt derselbe bleiben, wenn nur die n bestimmenden Punkte ihre Lage in der Ebene nicht ändern. Nehmen wir das Coordinatensystem rechtwinklig an, so gelangen wir zu dem Resultate, dass die Entfernung des unserer Aufgabe entsprechenden Punktes von jeder Geraden in der Ebene seiner Bestimmungspunkte das arithmetische Mittel der Abstände dieser Punkte von derselben Linie bildet. Wir nennen ihn mit Rücksicht auf diese Eigenschaft den Punkt der mittleren Entfernung für das gegebene Punktsystem.

Noch ist zu bemerken, dass bei Ausführung der besprochenen Construction die Reihenfolge, in welcher die gegebenen Punkte

benutzt werden, keinen Einfluss auf das gesuchte Resultat ausüben kann. Der Umstand, dass durch Aenderung dieser Reihenfolge an der Grundbedingung der Aufgabe nichts geändert wird, liefert den Beweis für die aufgestellte Behauptung.

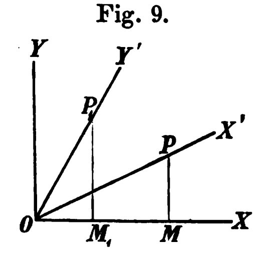
§. 4.

Transformation der Parallelcoordinaten.

Häufig wird es bei analytischen Untersuchungen nothwendig, die Coordinaten zu transformiren, d. h. die auf ein gegebenes System bezogenen Coordinaten eines Punktes in Coordinaten eines neuen Systems auszudrücken. Die einfachsten hierher gehörigen Fälle sind in §. 2 besprochen und in den vorigen Aufgaben zur Anwendung gebracht worden. Es erübrigt uns noch eine Ergänzung, wobei wir uns jedoch lediglich auf Parallelcoordinaten beschränken wollen.

Man gelangt von einem gegebenen Parallelcoordinatensysteme zu jedem andern in derselben Ebene gelegenen durch parallele Verschiebung und durch Drehung der Achsen, von welchen zwei Fällen der erstere bereits in §. 2 erledigt wurde. Was die Achsendrehung betrifft, so betrachten wir zunächst den Uebergang von einem rechtwinkligen Systeme zu einem beliebigen andern mit demselben Anfangspunkte.

Fig. 9.



Die X-Achse des rechtwinkligen Systems OX und OY in Fig. 9 ist um den Winkel $X'OX = \alpha$ gedreht worden, wobei dieser Winkel nach Art der Anomalien eines Polarcoordinatensystems von 0 bis 360^0 gezählt werden soll. Für einen in der neuen X-Achse gelegenen Punkt P bilden dann $OP = x'$ und der Winkel α die Polarcoordinaten, während $OM = x$ und $PM = y$ die zugehörigen rechtwinkligen Coordinaten darstellen. Nach Nr. 3) in §. 2 ist daher

$$x = x' \cos \alpha, \qquad y = x' \sin \alpha$$

und es gelten diese Formeln ebensowohl für einen auf der positiven als auf der negativen Achsenseite gelegenen Punkt, da mit dem Negativwerden von x' zu gleicher Zeit x und y ihre Vorzeichen wechseln. — Wird ferner der Winkel $Y'OX$ oder die

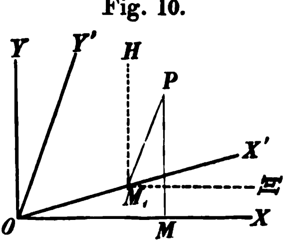
Anomalie der neuen Y-Achse mit β bezeichnet, so folgt in ganz gleicher Weise für einen in dieser Achse gelegenen Punkt P_1

$$x = y' \cos \beta, \qquad y = y' \sin \beta,$$

wobei wir $OP_1 = y'$, $OM_1 = x$ und $P_1 M_1 = y$ setzen.

Für einen beliebigen Punkt P in Fig. 10 seien $OM = x$ und $PM = y$ die ursprünglichen rechtwinkligen Coordinaten, dagegen $OM_1 = x'$ und $PM_1 = y'$ die Coordinaten in dem durch Achsendrehung entstandenen neuen Systeme. Denken wir uns YOX parallel zu sich selbst in die Lage $HM_1 \Xi$ verschoben, so sind nach dem Vorigen $x' \cos \alpha$ und $x' \sin \alpha$ die rechtwinkligen Coordinaten des neuen Anfangspunktes, $y' \cos \beta$ und $y' \sin \beta$ aber die Coordinaten des Punktes P im Systeme $M_1 \Xi$ und $M_1 H$, wobei α und β die früheren Bedeutungen behalten. Nach Nr. 1) und 2) in §. 2 ist demnach:

Fig. 10.



$$1) \quad \begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \cos \beta \\ y = x' \sin \alpha + y' \sin \beta. \end{cases}$$

Betrachten wir jetzt einige specielle Fälle.

A. Wird nur eine der beiden Achsen geändert, so ist, wenn man $\alpha = 0$ setzt, also die X-Achse beibehält,

$$2) \qquad x = x' + y' \cos \beta, \qquad y = y' \sin \beta.$$

Ebenso ergiebt sich unter Beibehaltung der Y-Achse aus der Substitution $\beta = 90^0$:

$$3) \qquad x = x' \cos \alpha, \qquad y = x' \sin \alpha + y'.$$

B. Soll das neue System gleichfalls ein rechtwinkliges sein, so ist $\beta = 90^0 + \alpha$ zu setzen. Man erhält dann:

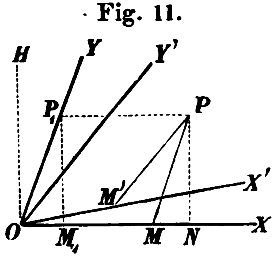
$$4) \quad x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \qquad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

C. Der neue Coordinatenwinkel sei 2γ und werde von der früheren X-Achse halbirt, so dass β in γ und α in $360^0 - \gamma$ übergeht. Diese Substitutionen geben mit Aushebung gemeinschaftlicher Factoren:

$$5) \qquad x = (y' + x') \cos \gamma, \qquad y = (y' - x') \sin \gamma.$$

Uebergang von einem schiefwinkligen Coordinatensysteme zu einem beliebigen andern mit demselben Anfangspunkte.

Fig. 11.



Das System OX und OY (Fig. 11) habe den Coordinatenwinkel ω und wir behalten im Uebrigen die früheren Bezeichnungen bei, so dass z. B. $\beta - \alpha$ den neuen Coordinatenwinkel $Y'OX'$ darstellt. Nehmen wir ein drittes Coordinatensystem zu Hilfe, welches neben der Achse OX die darauf rechtwinklige OH besitzt, und setzen $PN = P_1M_1 = \eta$, so folgt aus den Bemerkungen zu Fig. 9 für jede Lage des Punktes P und für jede Grösse des Winkels ω:

$$\eta = y \sin \omega.$$

Zu gleicher Zeit erhalten wir aus der zweiten Gleichung unter Nr. 1)

$$\eta = x' \sin \alpha + y' \sin \beta$$

und aus Verbindung der beiden letzten Formeln:

$$y \sin \omega = x' \sin \alpha + y' \sin \beta.$$

Insofern die Achsen OX und OY in ihrer Bezeichnung vertauscht werden können, gilt ebenso die Relation:

$$x \sin \omega = x' \sin \alpha' + y' \sin \beta',$$

wenn wir uns unter α' und β' die von den neuen Achsen und OY eingeschlossenen Winkel vorstellen. Dann ist aber $\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \omega$, also $\alpha' = \omega - \alpha$ und $\beta' = \omega - \beta$, und man erhält hiernach:

$$x \sin \omega = x' \sin (\omega - \alpha) + y' \sin (\omega - \beta) \text{*)}.$$

Die hier entwickelten Resultate führen zu den Transformationsformeln:

$$6) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= x' \frac{\sin (\omega - \alpha)}{\sin \omega} + y' \frac{\sin (\omega - \beta)}{\sin \omega} \\ y &= x' \frac{\sin \alpha}{\sin \omega} + y' \frac{\sin \beta}{\sin \omega}, \end{aligned} \right.$$

von denen man zu den unter Nr. 1) gewonnenen wieder zurückgehen kann, wenn man $\omega = 90^0$ setzt.

---

*) Die Formel: $\alpha + \alpha' = \omega$ gilt, streng genommen, nur so lange, als OX', wie in Fig. 11, innerhalb des Winkels ω liegt, so dass $\alpha < \omega$ ist. Für $\alpha > \omega$ ergiebt sich, wenn man α' immer in der obigen Drehrichtung misst: $\alpha - (360^0 - \alpha') = \omega$ oder $\alpha + \alpha' = 360^0 + \omega$. Dadurch wird aber die Richtigkeit des gefundenen Resultates nicht beeinträchtigt, weil Winkeln, die um eine ganze Umdrehung verschieden sind, dieselben trigonometrischen Functionen zukommen. Gleiches gilt für β und β'.

Wir gelangen jetzt zu den allgemeinsten Relationen für Umwandlung von Parallelcoordinaten, wenn wir mit der Aenderung der Achsenrichtung noch die Verlegung des Coordinatenanfangspunktes verknüpfen. Bezeichnen a und b die im ursprünglichen Systeme gemessene Abscisse und Ordinate des neuen Anfanges, so giebt die Verbindung der vorhergehenden Formeln mit den bereits mehrfach benutzten für parallele Achsenverschiebung:

$$7) \quad \begin{cases} x = a + x' \dfrac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin \omega} + y' \dfrac{\sin(\omega - \beta)}{\sin \omega} \\ y = b + x' \dfrac{\sin \alpha}{\sin \omega} + y' \dfrac{\sin \beta}{\sin \omega}. \end{cases}$$

Ist hierbei das ursprüngliche Coordinatensystem ein rechtwinkliges, so entstehen, indem man entweder sogleich von den Gleichungen 1) ausgeht oder auch in den jetzt gefundenen $\omega = 90^0$ setzt, die einfacheren Beziehungen:

$$8) \quad \begin{cases} x = a + x' \cos \alpha + y' \cos \beta \\ y = b + x' \sin \alpha + y' \sin \beta. \end{cases}$$

Bemerkenswerth ist für die Anwendung der in diesem Paragraphen gefundenen Transformationsformeln, dass sie in Beziehung auf die in ihnen enthaltenen Coordinaten sämmtlich Gleichungen ersten Grades darstellen. Es genügt zur Bestätigung dieser Bemerkung, die Form der Gleichungen unter Nr. 7) zu betrachten, welche als die allgemeinsten alle übrigen in sich schliessen.

Zweites Capitel.

Die gerade Linie.

§. 5.

Gleichungen der geraden Linie.

Die charakteristische Eigenschaft der geraden Linie, dass sie durchaus nach einer und derselben Richtung verläuft, lässt sich am einfachsten in der Sprache der analytischen Geometrie ausdrücken, wenn man irgend einen ihrer Punkte zum Pole eines Polarcoordinatensystems wählt. Bezeichnet unter dieser Voraussetzung α den zwischen 0 und 180° gelegenen und im Sinne der Anomalien gemessenen Winkel, welchen die Gerade mit der Achse des benutzten Systemes bildet, so geben die Gleichungen

$$\varphi = \alpha \quad \text{und} \quad \varphi = 180^0 + \alpha$$

die Anomalien aller Punkte ihrer beiden durch den Pol getrennten Theile *).

Gehen wir jetzt zu einem Parallelcoordinatensysteme über, dessen positive Seite der X-Achse unter Beibehaltung des Poles als Coordinatenanfang mit der Achse des Polarsystems zusammenfällt, so folgt bei Anwendung rechtwinkliger Coordinaten aus Nr. 5) in §. 2

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha$$

als diejenige Gleichung, durch welche die beiden Coordinaten jedes einzelnen Punktes der in Rede stehenden Linie von ein-

*) Schon die erste dieser beiden Gleichungen schliesst die Lage aller Punkte der Geraden in sich, wenn wir den bei den Parallelcoordinaten angewendeten Begriff der entgegengesetzten Grössen auch auf die Leitstrahlen übertragen wollen.

ander abhängen. Der Winkel α ist hierbei spitz oder stumpf, jenachdem die durch den Coordinatenanfang gehende Gerade innerhalb der beiden von den Achsen gebildeten Felder liegt, welchen gleiche Vorzeichen der Coordinaten zukommen, oder im andern Falle die beiden übrigen Felder durchschneidet. Bezeichnen wir zur Abkürzung $\tan \alpha$ mit dem Buchstaben A, so geht die obige Gleichung in

$$1) \qquad y = Ax$$

über. — Genau dieselbe Gleichungsform kann auch benutzt werden, um bei Anwendung schiefwinkliger Coordinaten Abscisse und Ordinate jedes Punktes von einander abhängig zu machen, der sich in einer durch den Anfangspunkt des Systems gezogenen Geraden befindet. Lassen wir nämlich der X-Achse die oben angegebene Lage und bezeichnen wie früher den Coordinatenwinkel mit ω, so ergiebt sich für diesen Fall aus den Formeln 6) in §. 2

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\omega - \alpha)},$$

wo wieder $\frac{\sin \alpha}{\sin(\omega - \alpha)}$ einen für den ganzen Verlauf der geraden Linie unveränderlichen Werth besitzt, den wir nur mit A zu bezeichnen brauchen, um aufs Neue zur Gleichung 1) zu gelangen. Setzen wir $\omega - \alpha = \beta$, so ist β der von der Y-Achse und der Geraden eingeschlossene Winkel, der aber negativ in Rechnung gezogen werden muss, wenn $\alpha > \omega$, d. h. wenn die Gerade diejenigen von den Achsen gebildeten Felder durchschneidet, in welchen den Coordinaten der darin enthaltenen Punkte verschiedene Vorzeichen zugehören. Der Zahlenwerth A hat mit Einführung der gewählten Bezeichnung die allgemeine Bedeutung

$$2) \qquad A = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

und es ist hierin immer $\alpha + \beta = \omega$, ferner α zwischen den Grenzen 0 und 180° und β zwischen ω und $\omega - 180^0$ enthalten. Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem sind α und β Complementwinkel, wodurch man zu der Gleichung $A = \tan \alpha$ zurückkommt. — Wir wollen der beständigen oder constanten Grösse A, da sie einzig von der Richtung der geraden Linie gegen das Coordinatensystem abhängt, den Namen Richtungsconstante geben.

Die Formel $y = Ax$ nennen wir die Gleichung einer durch den Coordinatenanfang gehenden Geraden,

insofern sie dazu dient, um bei gegebener Richtung der Linie die veränderlichen oder variabelen (laufenden) Coordinaten jedes ihrer Punkte von einander abhängig zu machen. Setzen wir nach einander $\alpha = 0$ und $\alpha = \omega$, wobei β die Werthe ω und 0 annimmt, so geht das erste Mal A in 0 und das andere Mal in ∞ über und man erhält, wenn man im zweiten Falle $y = Ax$ in $x = \frac{y}{A}$ umformt,

$$y = 0 \quad \text{nnd} \quad x = 0$$

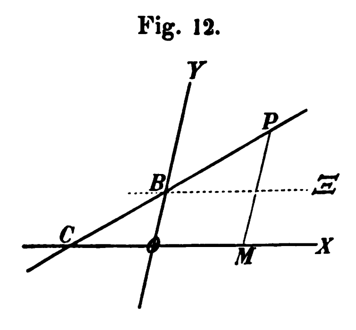
als Gleichungen der X- und Y-Achse, wie schon in §. 1 unter Nr. 5) aus dem Begriffe der Coordinaten hergeleitet wurde. — Als ein zweites Beispiel wählen wir die Gleichungen der beiden (auf einander senkrechten) Geraden, welche den Coordinatenwinkel und seinen Nebenwinkel halbiren. Für die erste derselben ist $\beta = \alpha$, also $A = 1$, für die zweite $\beta = -(180^0 - \alpha)$ und $A = -1$, wonach sich

$$y = x \quad \text{und} \quad y = -x$$

als Gleichungen dieser beiden Linien ergeben.

Wir gelangen jetzt dazu, die allgemeine Gleichung einer in beliebigen Punkten die Coordinatenachsen schneidenden Geraden festzustellen, wenn wir eine der beiden Achsen parallel zu sich selbst in den Durchschnittspunkt der zu untersuchenden Geraden und der andern Achse verschieben.

Fig. 12.



PC in Fig. 12 sei die gegebene Linie, welche die Coordinatenachsen in den Punkten C und B schneidet. Wir verschieben die X-Achse in die Lage $B\Xi$, so ist, wenn η die auf das neue System bezogene Ordinate des beliebigen Punktes P und $OM = x$ seine Abscisse, ferner A die Richtungsconstante der Geraden PC bezeichnet,

$$\eta = Ax.$$

Da durch die parallele Achsenverschiebung die zur Bestimmung von A dienenden Winkel nicht geändert werden, so behält die Richtungsconstante auch für die ursprüngliche Lage der X-Achse ihren Werth bei und wir gelangen nach den bereits oft angewendeten Sätzen für Verlegung der Achsen zu dem ursprüng-

lichen Systeme zurück, wenn wir $y = \eta + b$ setzen, wo $b = BO$ die Ordinate des Durchschnittspunktes der Geraden und der Y-Achse ausdrückt. Als allgemeine Gleichung der geraden Linie erhalten wir hiernach:

3) $$y = Ax + b.$$

Die von uns eingeführte Bedeutung der constanten Grösse b findet hierin ihre Bestätigung, wenn wir $x = 0$ setzen, indem sich dann $y = b$ als Ordinate des in der Y-Achse gelegenen Punktes der Geraden ergiebt. In gleicher Weise findet sich, wenn a die Abscisse des in der X-Achse gelegenen Punktes C bezeichnet*), aus der Substitution $y = 0$:

4) $$Aa + b = 0 \quad \text{oder} \quad A = -\frac{b}{a}.$$

Schaffen wir mittelst der ersten dieser beiden Formeln aus der Gleichung 3) die Grösse b hinweg, so lässt sie sich in

5) $$x = \frac{y}{A} + a$$

umwandeln. Dieselbe Gleichung entsteht unmittelbar, wenn man anfänglich die X-Achse ungeändert lässt, dagegen die Y-Achse parallel zu sich selbst nach C verschiebt.

Die vorhergehenden Entwickelungen der allgemeinen Gleichung der geraden Linie in der Form unter Nr. 3) oder der daraus hergeleiteten unter Nr. 5) scheinen insofern noch eine Lücke zu enthalten, als die dabei angewendete Verlegung einer der beiden Coordinatenachsen ihre Anwendbarkeit versagt, wenn die Gerade zur andern Achse parallel liegt. Demohngeachtet behalten auch hier die allgemeinen Formeln ihre Giltigkeit, wie sich zeigt, wenn wir in 5) $A = \infty$ und in 3) $A = 0$ einsetzen. Die durch diese Substitutionen gewonnenen Gleichungen

$$x = a \quad \text{und} \quad y = b$$

kommen nämlich auf die bereits in den §§. 1 und 2 für Parallelen zu den Coordinatenachsen gefundenen Formeln zurück und lassen sich noch dadurch bestätigen, dass man jedesmal die Achse, mit welcher die zu untersuchende Gerade gleiche Richtung hat, parallel zu sich selbst verschiebt.

---

*) Nach der Anlage von Fig. 12 muss darin a als Abscisse eines auf der Seite der negativen x gelegenen Punktes einen negativen Werth erhalten.

In Nr. 3) und 5) wurde die Gleichung der Geraden von der Richtung der Linie (mittelst der Constanten A) und der Lage eines ihrer Punkte (mittelst der Constanten b oder a) abhängig gemacht; zu einer noch symmetrischeren Gleichungsform gelangen wir jedoch, wenn wir die Gerade durch ihre beiden in den Achsen gelegenen Punkte fixiren oder, mit anderen Worten, die Gleichung einzig von den Constanten a und b abhängig machen. Wird zu diesem Endzwecke in der Formel $y = Ax + b$ aus Nr. 4) der Werth $A = -\frac{b}{a}$ substituirt, so lässt sich die hierdurch entstandene Gleichung leicht in

$$6) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

umgestalten — eine Gleichung der geraden Linie, die sich unter Anderem noch dadurch empfiehlt, dass die Bedeutung der in ihr enthaltenen beständigen Grössen a und b (Coordinaten der Durchschnittspunkte mit den Achsen) von dem angewendeten Coordinatenwinkel völlig unabhängig bleibt. Der Fall des Parallelismus der Geraden zu einer der beiden Achsen ist in dieser Gleichung eingeschlossen, wenn man für ihn den Durchschnittspunkt mit der parallelen Achse in eine unendliche Entfernung versetzt denkt, wie sich aus den Substitutionen $b = \infty$ oder $a = \infty$ herleiten lässt.

Der allgemeinen Anwendbarkeit der letzten Gleichung steht einzig der Umstand entgegen, dass sie sich nicht unmittelbar für den Fall einer durch den Coordinatenanfang gehenden Geraden anwenden lässt, was ohne alle Rechnung schon daraus folgt, dass dann die beiden zur Bestimmung dienenden Punkte in einen übergehen.

Eine weitere Verallgemeinerung der in Nr. 3) und 6) gewonnenen Gleichungen der geraden Linie gewähren die beiden folgenden Fundamentalaufgaben.

I. Es soll die Gleichung einer Geraden gefunden werden, deren Richtung gegen die Achsen bestimmt ist und welche durch einen gegebenen Punkt $x_1 y_1$ *) geht.

---

*) Wir nennen zur Abkürzung einen Punkt xy, wenn x und y seine Parallelcoordinaten bezeichnen. Bei Anwendung von Polarcoordinaten kann in gleicher Weise von einem Punkte $r\varphi$ gesprochen werden.

Aus den mit den Coordinatenachsen gebildeten Winkeln α und β ergiebt sich ohne Weiteres die Richtungsconstante $A = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, oder bei Anwendung von rechtwinkligen Coordinaten $A = \tan\alpha$. Die zu suchende Gleichung der Geraden hat nun nach 3) die Form:

$$y = Ax + b,$$

in welcher nur der Werth von b unbestimmt bleibt. Die Bedingung, dass x_1 und y_1 die Coordinaten eines Punktes dieser Geraden sein sollen, führt zu der zweiten Gleichung:

$$y_1 = Ax_1 + b,$$

in welcher A und b dieselben Werthe wie vorher besitzen müssen und woraus in Verbindung mit der vorigen Gleichung das unbestimmte b durch Subtraction eliminirt werden kann. Man erhält dann:

$$7) \qquad y - y_1 = A(x - x_1)$$

als Resultat der gestellten Aufgabe. Setzt man hierin nach einander $y = 0$ und $x = 0$, so findet man leicht als Coordinaten für die auf den Achsen gelegenen Punkte der in Rede stehenden Geraden:

$$8) \qquad = x_1 - \frac{y_1}{A}, \qquad b = y_1 - Ax_1.$$

II. Es soll die Gleichung derjenigen Geraden gesucht werden, welche die Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ in sich enthält.

Zu der jede gerade Linie charakterisirenden Formel

$$y = Ax + b$$

treten hier die beiden Bedingungsgleichungen:

$$y_1 = Ax_1 + b$$
$$y_2 = Ax_2 + b,$$

aus denen in gleicher Weise, wie in der vorigen Aufgabe

$$y_1 - y_2 = A(x_1 - x_2)$$

hergeleitet wird. Hieraus findet sich zunächst für die Richtungsconstante der durch die beiden gegebenen Punkte gehenden Geraden

$$9) \qquad A = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

und durch Einsetzung dieses Werthes in die Formel 7), welche die Gleichungen aller den Punkt $x_1 y_1$ in sich enthaltenden Geraden umfasst, als Gleichung der gesuchten Linie:

10) $$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1).$$

Die Substitutionen $y = 0$ und $x = 0$ geben für die Coordinaten der beiden auf den Achsen gelegenen Punkte nach einigen leichten Reductionen:

11) $$a = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}, \qquad b = \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 - x_2}.$$

Insofern die Gleichung 10) die gegenseitige Abhängigkeit der Coordinaten x und y jedes mit $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ in derselben Geraden gelegenen Punktes enthält, ist sie zugleich der analytische Ausdruck dafür, dass drei Punkte in einer geraden Linie liegen. Wenn wir sie zu diesem Zwecke in die Form:

12) $$(x - x_1) : (x_1 - x_2) = (y - y_1) : (y_1 - y_2)$$

bringen, giebt sie die für drei in einer geraden Linie gelegenen Punkte charakteristische Eigenschaft, dass ihre Abscissendifferenzen den entsprechenden Ordinatendifferenzen proportional sein müssen. — Wandelt man endlich die letzte Proportion in eine Productgleichung um, so findet sich nach einigen einfachen Reductionen die bereits in Nr. 10) des §. 3 gewonnene Formel wieder, deren geometrische Deutung das Resultat ausspricht, dass die zwischen den drei Punkten enthaltene Dreiecksfläche gleich Null ist.

§. 6.

Zwei Gerade.

Sind zwei gerade Linien durch ihre Gleichungen für Parallelcoordinaten gegeben, so entsteht die Frage nach der gegenseitigen Richtung dieser Linien und, wenn sie sich schneiden, nach der Lage ihres Durchschnittspunktes. Wir beginnen mit der letzten dieser beiden Untersuchungen.

I. Es seien

$$y = A_1 x + b_1$$
$$y = A_2 x + b_2$$

die Gleichungen der beiden gegebenen Geraden, so müssen für die Coordinaten eines gemeinschaftlichen Punktes beide Formeln gleichzeitig ihre Giltigkeit behalten. Die Berechnung dieser Coordinaten kommt daher einzig darauf hinaus, ein x und y zu finden, welches beiden Gleichungen Genüge leistet. Da wir es hierbei nur mit Gleichungen ersten Grades zu thun haben, so kann

die Rechnung für jede der beiden Unbekannten nur einen Werth geben; sie führt daher zu dem Resultate zurück, dass zwei Gerade nicht mehr als einen gemeinschaftlichen Punkt besitzen können. Für seine Coordinaten findet sich nach den gewöhnlichen Eliminationsmethoden aus den obigen Gleichungen:

$$1)\qquad x = \frac{b_2 - b_1}{A_1 - A_2}, \qquad y = \frac{A_1 b_2 - A_2 b_1}{A_1 - A_2}.$$

Hierbei verdienen folgende Fälle besondere Erwähnung:

α. Ist $b_1 = b_2$, so ist $x = 0$, d. h. der Durchschnittspunkt liegt in der Ordinatenachse. In der That bezeichneten aber auch die beständigen Grössen b die Lage des in der Y-Achse gelegenen Punktes, so dass bei Uebereinstimmung dieser Werthe beide Gerade durch denselben Punkt der genannten Achse gehen müssen.

β. Wenn $A_1 b_2 = A_2 b_1$, so ist $y = 0$, d. h. der gemeinschaftliche Punkt liegt in der Abscissenachse. Wir übersehen sofort die Richtigkeit dieses Resultates, wenn wir die gewonnene Bedingungsgleichung in die Form: $-\frac{b_1}{A_1} = -\frac{b_2}{A_2}$ bringen, worin nach Nr. 4) des vorigen Paragraphen die gleichen Grössen die Abscissen der in der X-Achse gelegenen Punkte bezeichnen.

γ. Für $A_1 = A_2$ erhalten beide Coordinaten unendliche Werthe, d. h. der Durchschnittspunkt liegt in unendlicher Entferung. Wegen Uebereinstimmung der Richtungsconstanten ist dies der Fall des Parallelismus beider Geraden.

δ. Wenn irgend zwei von den drei vorhin genannten Beziehungen gleichzeitig stattfinden, so ist $A_1 = A_2$ und auch $b_1 = b_2$, und man erhält für beide Coordinaten die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Dann sind aber auch die Gleichungen beider Geraden identisch, weshalb letztere in allen Punkten zusammenfallen müssen.

Sind die Gleichungen der beiden Linien in der Form

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1$$

$$\frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} = 1$$

gegeben, so findet man ebenfalls durch Elimination als Coordinaten des Durchschnittspunktes:

$$2)\qquad x = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)}{a_2 b_1 - a_1 b_2}, \qquad y = \frac{b_1 b_2 (a_1 - a_2)}{b_2 a_1 - b_1 a_2},$$

woran sich ähnliche Bemerkungen wie oben knüpfen lassen. — Für den Parallelismus ergiebt sich z. B. als Bedingungsgleichung:

$$a_2 b_1 = a_1 b_2 \quad \text{oder} \quad a_1 : a_2 = b_1 : b_2,$$

was auf bekannte Aehnlichkeitssätze hinauskommt. Wir gelangen zu demselben Resultate, wenn wir in der Gleichung $A_1 = A_2$ für die beiden Richtungsconstanten nach Nr. 4) des vorigen Paragraphen die damit gleichen Werthe $-\frac{b_1}{a_1}$ und $-\frac{b_2}{a_2}$ substituiren.

Ein interessantes Resultat findet sich noch, sobald wir aus Nr. 2) die reciproken Werthe der Coordinaten x und y berechnen. Dividiren wir dabei Dividend und Divisor der erhaltenen Quotienten durch $-a_1 a_2 b_1 b_2$, so entsteht

$$\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{a_2}\cdot\frac{1}{b_1} - \frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{b_2}}{\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}}, \quad \frac{1}{y} = \frac{\frac{1}{b_2}\cdot\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1}\cdot\frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}},$$

oder, wenn wir zur Abkürzung die reciproken x, y, a und b mit ξ, η, α und β bezeichnen:

$$\xi = \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}, \quad \eta = \frac{\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Die Vergleichung dieser Resultate mit den in Nr. 11) des vorhergehenden Paragraphen gewonnenen lässt ξ und η als Coordinaten der Achsendurchschnittspunkte einer Geraden erscheinen, welche durch die Punkte $\alpha_1\beta_1$ und $\alpha_2\beta_2$ hindurchgeht. Sind daher die Gleichungen dreier Geraden in der Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1, \quad \frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} = 1$$

gegeben und behalten wir die vorher eingeführten Abkürzungen bei, so müssen sich für die durch je zwei der Punkte $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$ gehenden Geraden dieselben Achsendurchschnittspunkte finden, wenn die drei gegebenen Geraden sich in einem Punkte schneiden sollen, oder mit anderen Worten: es müssen in diesem Falle die Punkte $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$ in einer geraden Linie liegen. Auf diese Weise erhält man als Bedingungsgleichung dafür, dass drei Gerade durch denselben Punkt hindurchgehen, wenn man die Werthe von $\alpha\beta$ u. s. f. wieder einführt, nach Nr. 12) in §. 5:

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}\right) : \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1}\right) : \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right)$$

oder aus Nr. 10) des §. 3 in symmetrischerer Form:

3) $$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\frac{1}{b_1}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{b_2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a_1}\right)=0.$$

II. Soll der Winkel δ gefunden werden, den zwei gegebene Gerade einschliessen, so verschiebe man beide Linien parallel zu sich selbst in einen und denselben Punkt der X-Achse, wodurch ihre gegenseitige Lage nicht geändert wird. Sind nach der im vorigen Paragraphen angewendeten Bezeichnung α_1 und α_2 die im Sinne der Anomalien gemessenen Winkel, welche beide Gerade mit der X-Achse einschliessen, so erhält man sofort, je nach der Lage beider Linien,

$$\delta = \pm (\alpha_1 - \alpha_2).$$

Um in dieser Gleichung die Richtungsconstanten A_1 und A_2 der beiden Geraden einzuführen, beschränken wir uns zunächst auf rechtwinklige Coordinaten, weil bei deren Anwendung die einfachsten Beziehungen zwischen den Constanten A und den Winkeln α stattfinden. Dann ist: $\tan\alpha_1 = A_1$ und $\tan\alpha_2 = A_2$, und es folgt hieraus:

4) $$\tan\delta = \pm \frac{A_1 - A_2}{1 + A_1 A_2}.$$

Der Doppelwerth von $\tan\delta$ kann hier als einem spitzen und einem stumpfen Winkel zugehörig betrachtet werden, und giebt somit die von den beiden Geraden gebildeten Nebenwinkel. Wo nur der spitze Werth verlangt ist, genügt das obere Vorzeichen, wenn wir mit A_1 die grössere Richtungsconstante bezeichnen. — Folgende zwei Fälle verdienen besondere Beachtung:

α. Ist $A_1 = A_2$, so wird $\tan\delta = 0$, also $\delta = 0$ oder $\delta = 180^0$, wodurch wir auf die schon oben besprochene Bedingung des Parallelismus zweier Geraden zurückgeführt werden.

β. Wenn $1 + A_1 A_2 = 0$, so wird $\tan\delta = \infty$, also $\delta = 90^0$; die beiden Linien durchschneiden sich daher rechtwinklig. Man findet dann:

5) $$A_1 = -\frac{1}{A_2} \quad \text{und} \quad A_2 = -\frac{1}{A_1},$$

d. h. zwei Gerade stehen bei Anwendung von rechtwinkligen Parallelcoordinaten senkrecht auf einander, wenn ihren Richtungsconstanten reciproke Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen zukommen. — Setzen wir, sobald die Gleichungen der beiden Geraden in der Form $\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}=1$ und $\frac{x}{a_2}+\frac{y}{b_2}=1$ gegeben sind, nach

§. 5 Nr. 4) $A_1 = -\frac{b_1}{a_1}$ und $A_2 = -\frac{b_2}{a_2}$, so geht die Bedingungsgleichung für den rechtwinkligen Durchschnitt in $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ über. — An die letzten Betrachtungen schliessen sich folgende zwei Aufgaben:

A. Es soll die Gleichung einer Geraden gefunden werden, die durch einen Punkt $x_1 y_1$ geht und eine gegebene Gerade $y = Ax + b$*) rechtwinklig durchschneidet.

Da die Gerade durch den Punkt $x_1 y_1$ gehen soll, so muss ihre Gleichung die Form von Nr. 7) des vorigen Paragraphen besitzen. Nach der zweiten gegebenen Bedingung erhält die Richtungsconstante den Werth: $-\frac{1}{A}$; die gesuchte Gleichung ist daher:

6) $$y - y_1 = -\frac{1}{A}(x - x_1).$$

Als specielles Beispiel hierzu wählen wir den Fall, wenn die gegebene Gerade durch den Coordinatenanfang geht und den Winkel γ mit der X-Achse bildet, der gegebene Punkt aber in einem Abstande d vom Coordinatenanfange auf der Geraden selbst liegt. Unter diesen Bedingungen ist $A = \tan\gamma$, und da d und γ die Polarcoordinaten des gegebenen Punktes darstellen, $x_1 = d\cos\gamma$, $y_1 = d\sin\gamma$; man erhält also:

$$y - d\sin\gamma = -\frac{1}{\tan\gamma}(x - d\cos\gamma)$$

oder nach Multiplication mit $\sin\gamma$ nach einigen leichten Umformungen:

$$x\cos\gamma + y\sin\gamma = d.$$

Wählt man jetzt die X-Achse des benutzten rechtwinkligen Coordinatensystems zur Achse von Polarcoordinaten, mit Beibehaltung des Coordinatenanfanges, so ist nach den oft angewendeten Transformationsformeln $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ zu setzen. Für Polarcoordinaten findet sich hieraus als Gleichung einer geraden Linie, welche durch die Coordinaten $d\gamma$ für den Fusspunkt des vom Pole auf sie gefällten Perpendikels bestimmt ist,

$$r\cos(\varphi - \gamma) = d.$$

---

*) Wir bedienen uns von hier an der Abkürzung, eine Linie mit ihrer Gleichung zu benennen.

Es wird keine Schwierigkeit gewähren, die Richtigkeit dieser Gleichung in einer dazu construirten Figur nachzuweisen.

B. Die Entfernung eines Punktes $x_1 y_1$ von der Geraden $y = Ax + b$ soll berechnet werden.

Bezeichnen wir mit $x' y'$ die Coordinaten für den Fusspunkt des von $x_1 y_1$ auf die Gerade gefällten Perpendikels und mit e die gesuchte Entfernung, so ist, da unsere Aufgabe die Anwendung von rechtwinkligen Coordinaten voraussetzt, nach Nr. 1) in §. 3

$$e^2 = (x' - x_1)^2 + (y' - y_1)^2.$$

Insofern nun der Punkt $x' y'$ ein Mal auf der gegebenen Geraden, ein anderes Mal auf dem erwähnten Perpendikel liegt, gelten für seine Coordinaten die Gleichungen:

$$y' = Ax' + b$$

$$y' - y_1 = -\frac{1}{A}(x' - x_1),$$

von denen die letztere unmittelbar aus der vorhergehenden Aufgabe folgt. Die Elimination vou y' aus diesen beiden Formeln giebt durch Subtraction und Reduction auf x':

$$x' = \frac{A(y_1 - b) + x_1}{1 + A^2}$$

und, wenn wir beiderseitig x_1 subtrahiren,

$$x' - x_1 = \frac{A(y_1 - Ax_1 - b)}{1 + A^2}.$$

Aus der zweiten der oben für x' und y' gegebenen Gleichungen folgt demnach:

$$y' - y_1 = -\frac{(y_1 - Ax_1 - b)}{1 + A^2}.$$

Setzen wir die letzten beiden Werthe in die Gleichung für e^2 ein, so ergiebt sich nach Absonderung der gemeinschaftlichen Factoren und nöthiger Hebung:

$$e^2 = \frac{(y_1 - Ax_1 - b)^2}{1 + A^2}$$

oder

$$7) \qquad e = \pm \frac{y_1 - (Ax_1 + b)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

wobei, da hier keine entgegengesetzten Grössen in Frage kommen, in jedem Falle das positive Resultat festzuhalten ist.

Beachtet man in dem gefundenen Ausdrucke, dass $Ax_1 + b$ die der Abscisse x_1 zugehörige Ordinate für einen in der Geraden

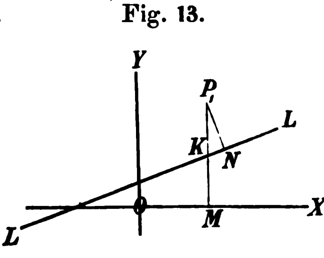


Fig. 13.

$y = Ax + b$ gelegenen Punkt bezeichnet, so ist die Richtigkeit des Resultates leicht in Fig. 13 zu bestätigen. P_1 sei der gegebene Punkt, LL die gegebene Gerade, welche die X-Achse unter dem Winkel α schneidet, ferner $P_1 N$ die gesuchte Entfernung e. Da $OM = x_1$, so ist $KM = Ax_1 + b$, und man erhält, durch Einsetzung von $\sqrt{1+A^2} = \sqrt{1+tan^2\alpha} = sec\,\alpha$, sofort: $e = \dfrac{P_1 M - KM}{sec\,\alpha}$ oder: $P_1 N = P_1 K \,.\, cos\,\alpha$, was unmittelbar mit der Figur übereinstimmt, wenn man die Gleichheit der Winkel NP_1K und α in Betracht nimmt.

Soll die Untersuchung über den von zwei Geraden eingeschlossenen Winkel auf schiefwinklige Coordinaten ausgedehnt werden, so sind zunächst unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen die Winkel α_1 und α_2 durch die Richtungsconstanten A_1 und A_2 auszudrücken. Nach der in Nr. 2) des §. 5 gefundenen Formel ist, sobald der Coordinatenwinkel mit ω bezeichnet wird, mit Rücksicht auf die Bedeutung des dort angewendeten Winkels β die Constante $A = \dfrac{sin\,\alpha}{sin\,(\omega - \alpha)}$ zu setzen. Wird hierin der Nenner entwickelt und Zähler und Nenner durch $cos\,\alpha$ dividirt, so entsteht: $A = \dfrac{tan\,\alpha}{sin\,\omega - tan\,\alpha\,cos\,\omega}$, woraus man leicht zu dem Resultate gelangt:

$$tan\,\alpha = \frac{A\,sin\,\omega}{1 + A\,cos\,\omega}.$$

Ist nun α_1 der grössere der beiden Winkel, welche die gegebenen Geraden mit der X-Achse bilden, und δ der von den Geraden selbst eingeschlossene spitze Winkel, so sind zur Bestimmung von δ folgende drei Gleichungen gegeben:

$$tan\,\delta = \frac{tan\,\alpha_1 - tan\,\alpha_2}{1 + tan\,\alpha_1 \,.\, tan\,\alpha_2}, \qquad tan\,\alpha_1 = \frac{A_1\,sin\,\omega}{1 + A_1\,cos\,\omega},$$

$$tan\,\alpha_2 = \frac{A_2\,sin\,\omega}{1 + A_2\,cos\,\omega}.$$

Durch Substitution der beiden letzten Werthe in die erste dieser Gleichungen entsteht nach den nöthigen Reductionen:

$$tan\,\delta = \frac{(A_1 - A_2)\,sin\,\omega}{1 + (A_1 + A_2)\,cos\,\omega + A_1 A_2}.$$

Wird hierin der Zähler $= 0$ gesetzt, so erhält man für den Fall des Parallelismus wieder die schon früher als allgemein giltig erkannte Formel: $A_1 = A_2$. Sollen dagegen die Geraden senkrecht auf einander stehen, so erwächst für diesen Fall die Bedingungsgleichung:

8) $$1 + (A_1 + A_2)\,cos\,\omega + A_1 A_2 = 0.$$

Mit Einführung dieses Resultates können die im Vorhergehenden unter *A.* und *B.* gestellten Aufgaben für schiefwinklige Coordinaten gelöst werden. Wir unterlassen diese etwas umständlicheren Rechnungen, da das Vorhergehende hinreichen wird, die Ueberzeugung zu gewähren, dass für derartige Aufgaben die Anwendung rechtwinkliger Coordinaten zu grösserer Einfachheit führt.

§. 7.

Die allgemeine Gleichung ersten Grades.

Die in den vorhergehenden Paragraphen angewendeten Gleichungsformen der geraden Linie besitzen sämmtlich das gemeinschaftliche Merkmal, dass sie in Beziehung auf die veränderlichen Parallelcoordinaten dem ersten Grade angehören. Es würde zur Bestätigung dieser Bemerkung vollkommen ausreichen, wenn sie sich für irgend eine Lage der Geraden gegen das Coordinatensystem als richtig erwiese. Von den für einen solchen besonderen Fall gefundenen Relationen, z. B. den für die Achsen selbst geltenden $x = 0$ und $y = 0$, gelangen wir nämlich zu den auf jede andere Lage bezüglichen Gleichungen mittelst der in §. 4 aufgestellten Transformationsformeln. Da nun letztere selbst ersten Grades sind, so kann, wenn man sie mit der Gleichung der Geraden in Verbindung bringt, nach einem bekannten Satze der Algebra hierdurch der Grad dieser Gleichung nicht abgeändert werden. Im vorliegenden Falle ist es nicht nöthig, auf diese allgemeine Bemerkung zurückzugehen, da die für die gerade Linie aufgestellten Gleichungen sich bereits als allgemein giltig erwiesen haben. — Es erübrigt noch die wichtige Frage, ob die Wechselbeziehung zwischen den Eigenschaften einer geraden Linie und einer Gleichung ersten Grades für die veränderlichen x und y eine so innige ist, dass, so oft sich eine Gleichung dieser Art vorfindet,

dieselbe als einer geraden Linie angehörig betrachtet werden kann. Untersuchen wir zu diesem Zwecke die allgemeinste Form einer Gleichung ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen.

Jede Gleichung ersten Grades zwischen x und y kann, wenn man die mit gleichen Factoren versehenen Glieder in eines zusammenfasst, auf die Form

$$1) \qquad Ax + By + C = 0$$

gebracht werden, worin A*), B und C beliebige zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gelegene beständige Coefficienten ausdrücken. Betrachten wir jetzt drei Punkte xy, $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, deren Coordinaten sämmtlich dieser Gleichung Genüge leisten sollen, so gelten für dieselben folgende Relationen:

$$Ax + By + C = 0$$
$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0,$$

aus denen, wenn man je zwei von einander subtrahirt, die Gleichungen

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$
$$A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) = 0$$
$$A(x_2 - x) + B(y_2 - y) = 0$$

entstehen. Man erhält hieraus:

$$-\frac{B}{A} = \frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{x_2 - x}{y_2 - y}$$

oder auch die fortlaufende Proportion:

$$(x - x_1) : (x_1 - x_2) : (x_2 - x) = (y - y_1) : (y_1 - y_2) : (y_2 - y),$$

d. h. die Abscissendifferenzen der drei Punkte sind den entsprechenden Ordinatendifferenzen proportional. Nach einer in §. 5 gemachten Bemerkung liegen aber unter dieser Bedingung die drei Punkte in einer geraden Linie, und da dies für je drei Punkte gilt, deren Coordinaten der gegebenen Gleichung Genüge leisten, so gehört die Gleichung 1) selbst einer geraden Linie an.

Bestätigt wird dieses Resultat, wenn man die allgemeine Gleichung auf eine der Formen bringt, unter denen wir früher die Gleichung der Geraden aufgefasst haben. Ist z. B. C von 0 verschieden, so können wir durch $-C$ dividiren und erhalten dann

---

*) Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass diese Constante A nicht mit der Richtungsconstante der geraden Linie zu verwechseln ist.

$$-\frac{Ax}{C}-\frac{By}{C}=1$$

als Gleichung einer geraden Linie, in welcher $-\frac{C}{A}$ und $-\frac{C}{B}$ die auf den Achsen abgeschnittenen Strecken bezeichnen. Wenn dagegen $C = 0$, so findet sich

$$y = -\frac{A}{B}x,$$

und dies ist die Gleichung einer durch den Coordinatenanfang gehenden Geraden mit der Richtungsconstante: $-\frac{A}{B}$.

Wenn die Lage aller Punkte einer Linie durch eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades zwischen den veränderlichen Parallelcoordinaten bestimmt ist, so wird die Linie selbst eine Linie n^{ten} Grades genannt*). Die Gerade ist nach dem Vorhergehenden die einzige Linie ersten Grades**).

Die in Nr. 1) aufgestellte allgemeinste Gleichungsform aller Linien ersten Grades, d. h. aller Geraden, lässt sich, wenn man beiderseits durch eine der drei beständigen Grössen A, B, C (die aber von 0 verschieden sein muss) dividirt, immer so umgestalten, dass sie nur noch zwei Constanten in sich enthält. Diese beiden Constanten müssen entweder unmittelbar gegeben sein, wenn sich die Gleichung auf eine bestimmte Gerade beziehen soll, oder es muss möglich sein, dieselben aus zwei von einander unabhängigen Bedingungen zu berechnen. So führt die analytische Untersuchung darauf zurück, dass eine Gerade unter Anderem durch ihre Richtung und einen Punkt, durch zwei ihrer Punkte u. s. f. vollständig bestimmt ist.

Es kann die Aufgabe vorkommen, an einer gegebenen Gleichung ersten Grades die Untersuchung zu führen, ob sie für ein bestimmtes Parallelcoordinatensystem einer gegebenen geraden Linie angehört oder nicht. Nach dem Vorhergehenden reicht es

---

*) Die Berechtigung, eine Linie nach dem Grade ihrer Gleichung zu benennen, erwächst daraus, dass nach der im Eingange dieses Paragraphen gemachten Bemerkung der Grad der für eine specielle Lage des Coordinatensystems gefundenen Gleichung auch bei Aenderung dieser Lage gewahrt bleibt und der Linie selbst als ein beständiges Merkmal anhaftet.

**) Mit Beziehung hierauf kann eine Gleichung ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen den Namen lineäre Gleichung erhalten.

zu diesem Zwecke aus, an zwei Punkten der Geraden die Probe zu machen. Eine Gleichung ersten Grades zwischen den veränderlichen x und y muss daher den Coordinaten aller Punkte einer geraden Linie Genüge leisten, wenn dies bei zwei Punkten stattfindet. Wäre z. B., um an einen bereits behandelten Fall anzuknüpfen, die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

nicht bereits als die einer Geraden bekannt, welche auf der X- und Y-Achse die Strecken a und b abschneidet, so würde dies ohne Weiteres daraus folgen, dass sie als Gleichung ersten Grades den Durchschnittspunkten der vorher erwähnten Linie mit den beiden Coordinatenachsen entspricht.

Werden die Gleichungen zweier Geraden durch Addition oder Subtraction verbunden, wobei noch die eine mit einem beliebigen Factor multiplicirt werden kann, so entsteht eine Gleichung ersten Grades, die von denselben x und y befriedigt wird, welche beiden ursprünglich gegebenen Gleichungen Genüge leisten. Die durch die neue Gleichung charakterisirte Gerade muss sich demnach mit den beiden ersten Geraden in einem Punkte schneiden.

Sind z. B. die Gleichungen der beiden Geraden in der Form

$$y = A_1 x + b_1, \qquad y = A_2 x + b_2$$

gegeben, so möge die letztere mit dem unbestimmten Factor λ multiplicirt werden, worauf beide addirt werden sollen, um in dem hierdurch entstehenden Resultate

$$2) \qquad y(1 + \lambda) = x(A_1 + A_2\lambda) + b_1 + b_2\lambda$$

die Gleichung einer neuen Geraden zu erhalten, welche mit den beiden ersten durch einen Punkt geht. Bringen wir Nr. 2) in die Form

$$3) \qquad y = \frac{A_1 + A_2\lambda}{1 + \lambda} x + \frac{b_1 + b_2\lambda}{1 + \lambda},$$

so stellt der Ausdruck $\frac{A_1 + A_2\lambda}{1 + \lambda}$ für die neue Gerade die Richtungsconstante dar, welche mit Feststellung besonderer Werthe für das bis jetzt unbestimmt gebliebene λ noch jede mögliche Grösse annehmen kann. Nr. 2) und 3) sind demnach Gleichungen aller derjenigen Geraden, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden gegebenen Linien hindurchgehen. Eine vollständige Bestimmtheit tritt erst dann ein, wenn durch eine neu hinzutretende

Bedingung der Factor λ einen speciellen Zahlwerth erlangt. Ist z. B. die Richtung einer solchen Geraden durch die Constante A gegeben, so erhält man aus der Bedingung

$$A = \frac{A_1 + A_2 \lambda}{1 + \lambda}$$

für λ den Werth:

$$\lambda = \frac{A_1 - A}{A - A_2}$$

und durch Substitution in Nr. 3)

$$y = Ax + \frac{b_1 (A - A_2) + b_2 (A_1 - A)}{A_1 - A_2}.$$

Die letzte Gleichung gehört also einer geraden Linie an, die mit gegebener Richtungsconstante A durch den Durchschnittspunkt der beiden Geraden $y = A_1 x + b_1$ und $y = A_2 x + b_2$ hindurchgeht.

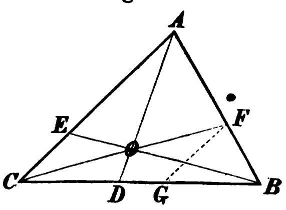
Zur Einübung des im Vorhergehenden enthaltenen Verfahrens, zu Gleichungen gerader Linien zu gelangen, welche mit zwei gegebenen Geraden einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt besitzen, wählen wir die beiden Aufgaben des folgenden Paragraphen, welche uns zugleich mit einigen in der Elementar-Geometrie gewöhnlich nicht behandelten Eigenschaften geradliniger Gebilde bekannt machen sollen.

§. 8.

Aufgaben.

I. Durch die drei Eckpunkte eines Dreiecks ABC (Fig. 14) sind drei in einem Punkte O sich schneidende Gerade AD, BE, CF gezogen. Es soll untersucht werden, in welchem Verhältnisse hierbei eine der drei Dreiecksseiten getheilt wird, wenn die Theilungsverhältnisse der beiden anderen Seiten bekannt sind.

Fig. 14.



Wir wählen CB als X-Achse und CA als Y-Achse eines Parallelcoordinatensystems mit dem Anfangspunkte C und gebrauchen die Bezeichnungen: $BC = a$, $AC = b$, $CD = a_1$, $CE = b_1$. Die Geraden AD und BE haben dann die Gleichungen:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b} = 1, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b_1} = 1.$$

Wird die zweite von der ersten subtrahirt, so entsteht

$$\frac{x(a-a_1)}{aa_1}-\frac{y(b-b_1)}{bb_1}=0.$$

Es ist dies die Gleichung einer Geraden, die mit AD und BE den Durchschnittspunkt O gemein hat und die, weil in ihr x und y gleichzeitig 0 werden, durch den Coordinatenanfang geht, oder mit anderen Worten: es ist die Gleichung von CF. Setzen wir darin zur Abkürzung $a - a_1 = a_2$, $b - b_1 = b_2$, so gelten für den Punkt F, welcher ausserdem noch auf der Geraden AB liegt, die Gleichungen:

$$\frac{xa_2}{aa_1}-\frac{yb_2}{bb_1}=0, \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Durch Elimination von y ergiebt sich hieraus für die Abscisse des Punktes F:

$$x=\frac{aa_1b_2}{a_2b_1+a_1b_2}=CG,$$

und, wenn man diese Grösse von a subtrahirt,

$$a-x=\frac{aa_2b_1}{a_2b_1+a_1b_2}=BG.$$

Die Verbindung der letzten Resultate durch Division führt zu der Formel:

$$CG:BG=a_1b_2:a_2b_1=\frac{a_1}{a_2}:\frac{b_1}{b_2},$$

oder, wenn man $CG:BG$ mit dem gleichen Verhältnisse $AF:BF$ vertauscht und für a_1, a_2, b_1, b_2 ihre Werthe einsetzt:

$$AF:BF=\frac{CD}{BD}:\frac{CE}{AE}.$$

Diese Proportion enthält die Lösung der gestellten Aufgabe. Ist z. B. $CD = BD$ und $CE = AE$, so wird auch $AB = BF$, was zu dem bekannten Satze führt, dass die drei Mittellinien eines Dreieks (die Geraden von den Eckpunkten nach den Mitten der Gegenseiten) sich in einem Punkte schneiden. — Bemerkenswerth ist noch folgende Form, auf welche die obige Proportion gebracht werden kann:

$$AF.BD.CE=BF.CD.AE.$$

Sie enthält den planimetrischen Lehrsatz: Werden durch die Eckpunkte eines Dreiecks drei in einem Punkte sich schneidende Transversalen gezogen, so ist von den auf den Gegenseiten gebildeten Abschnitten im-

mer das Product dreier nicht an einander stossenden dem Producte der drei übrigen gleich.

II. Auf der Geraden OA_2 (Fig. 15) sind drei feste Punkte O, A_1, A_2 gegeben. Durch dieselben werden die beliebigen Geraden OB_2, A_1C, A_2C gezogen, die sich in den Punkten B_1, B_2 und C schneiden. Wir verbinden B_1 mit A_2, B_2 mit A_1 geradlinig und endlich den Durchschnittspunkt D der beiden letzten Linien mit dem vorher gefundenen Punkte C. Die Gerade CD schneidet die Linie OA_2 im Punkte A. Es soll $OA = a$ berechnet werden, wenn die Strecken $OA_1 = a_1$, $OA_2 = a_2$ gegeben sind.

Fig. 15.

Wir wählen OA_2 zur X-Achse und OB_2 zur Y-Achse eines Parallelcoordinatensystems und setzen $OB_1 = b_1$, $OB_2 = b_2$. Dann sind die folgenden Gleichungen 1) bis 4) der Reihe nach die Gleichungen der Geraden A_1C, A_2C, A_1B_2 und A_2B_1:

$$1)\quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1, \qquad 2)\quad \frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} = 1,$$

$$3)\quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_2} = 1, \qquad 4)\quad \frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_1} = 1.$$

Addirt man entweder 1) und 2) oder 3) und 4), so entsteht beide Male die Summe:

$$5)\quad x\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) + y\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right) = 2.$$

Es ist dies die Gleichung einer Geraden, welche durch die Durchschnittspunkte von A_1C und A_2C, sowie von A_1B_2 und A_2B_1 hindurchgeht, d. h. der Geraden AC. Hieraus findet sich für die auf der X-Achse abgeschnittene Strecke $OA = a$, wenn wir gleichzeitig $y = 0$ und $x = a$ setzen:

$$6)\quad \frac{1}{a} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}{2} \text{ oder } a = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2}.$$

In gleicher Weise führt, wenn wir $OB = b$ setzen, die Substitution $x = 0$ und $y = b$ in Nr. 5) zu dem Resultate:

$$7)\quad \frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}}{2} \text{ oder } b = \frac{2b_1b_2}{b_1 + b_2}.$$

Bemerkenswerth ist hierbei, dass die Lage des Punktes A nur von der Lage der Punkte O, A_1 und A_2 abhängt, so dass man immer auf denselben Punkt A stossen muss, nach welcher Richtung man auch bei Ausführung der in der Aufgabe vorgelegten Construction die Geraden OB_2, A_1C und A_2C gezogen haben mag. Gleiches gilt für den Punkt B, dessen Lage nur durch O, B_1 und B_2 bedingt ist.

Die Strecke OA bildet das sogenannte harmonische Mittel*) zwischen OA_1 und OA_2. Nach den Eigenschaften der stetigen harmonischen Proportion folgt hieraus:

$$OA_2 : OA_1 = (OA_2 - OA) : (OA - OA_1)$$

oder in Form einer Productgleichung:

$$8) \qquad A_1A \,.\, OA_2 = OA_1 \,.\, AA_2.$$

Da die Form der letzten Gleichung ungeändert bleibt, mag die Folge der Punkte O, A_1, A, A_2 von links nach rechts oder in entgegengesetzter Richtung durchlaufen gedacht werden, so lässt sich auch rückwärts schliessen, dass A_1A_2 ebenfalls das harmonische Mittel zwischen AA_2 und OA_2 darstellen muss — ein Resultat, welches auch leicht durch Rechnung bestätigt werden kann.

Eine gerade Linie, auf welcher vier Punkte so liegen, dass zwischen ihren Entfernungen die in Nr. 8) gegebene Relation stattfindet, d. h. die aus drei solchen Stücken besteht, dass das Product aus den beiden äusseren dem Producte aus dem mittleren Stücke und der ganzen Linie gleich ist, wird harmonisch getheilt genannt. Die vier Punkte selbst bezeichnet man als harmonisch gelegen, und je zwei solche, die einen dritten zwischen sich haben, als zugeordnete oder conjugirte Punkte. OA_2 ist also harmonisch getheilt, O und A, A_1 und A_2 bilden die beiden Paare ihrer zugeordneten Punkte. Aehnliches gilt von der Linie OB_2.

---

*) Eine Zahl x wird das harmonische Mittel zwischen zwei Zahlen a und b, von denen $a > b$ sein mag, genannt, wenn

$$(a - x) : (x - b) = a : b$$

d. h., wenn eine sogenannte stetige harmonische Proportion zwischen a, x und b stattfindet. Dann ist

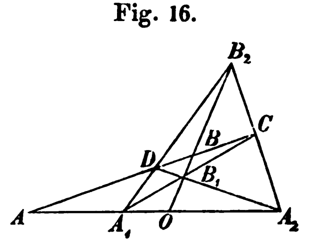
$$x = \frac{2ab}{a+b} \text{ oder } \frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

Ueberhaupt stehen vier Zahlen a, b, c, d in hermonischer Proportion, wenn

$$(a - b) : (c - d) = a : d.$$

Nach den vorhergehenden Untersuchungen bildet auf der harmonisch getheilten Geraden $O A_2$ die Entfernung je zwei conjugirter Punkte das harmonische Mittel zwischen den Abständen jedes der beiden anderen Punkte vom äusseren des ersten conjugirten Paares. Nehmen wir aber darauf Rücksicht, dass in den obigen Gleichungen 1) bis 4) unter den Strecken a, a_1, a_2 auch negative Werthe vorkommen können, so lässt sich in dem vorhergehenden Satze der äussere Punkt des conjugirten Paares auch mit dem inneren vertauschen, sobald man nur entgegengesetzt gelegene Strecken mit entgegengesetzten Vorzeichen in Rechnung nimmt. Es wird hierzu genügen, wenn wir auf Fig. 16 verweisen, die mit abgeänderter Bezeichnung ein getreues Abbild von Fig. 15 gewährt. Der Punkt O liegt jetzt zwischen A_1 und A_2; im Uebrigen sind alle durch die Aufgabe bedingten Constructionen wiederholt worden, um zum Punkte A zu gelangen. Werden die früheren Bezeichnungen hierher übertragen, so gelten wieder für $A_1 C$, $A_2 C$, $A_1 B_2$ und $A_2 B_1$ die Gleichungen 1) bis 4), wodurch auch die Relationen 5) bis 7) ihre Bestätigung erlangen. — Da nach der letzten dieser Gleichungen auch $O B_2$ als harmonisch getheilte Gerade erscheint, so findet in Fig. 15 dasselbe für $A C$ statt. Diese letzte Bemerkung gewährt ein Mittel, alle vorhergehenden Untersuchungen über harmonische Theilung in einen einzigen Lehrsatz zusammenzufassen. Das von den vier Geraden $A_1 C$, $A_2 C$, $A_1 B_2$, $A_2 B_1$ in Fig. 15 begrenzte geradlinige Gebilde stellt nämlich ein sogenanntes vollständiges Viereck oder besser Vierseit dar, dessen drei Diagonalen $O A_2$, $O B_2$, $A C$ harmonisch getheilt sind. Diese Auffassung bringt das Resultat unserer Aufgabe unter den bemerkenswerthen Satz, dass jede der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits durch die beiden andern harmonisch getheilt wird. Mittelst dieses Satzes ist es leicht, zu je drei Punkten einer Geraden einen vierten harmonisch gelegenen durch blose Anwendung des Lineals zu construiren.

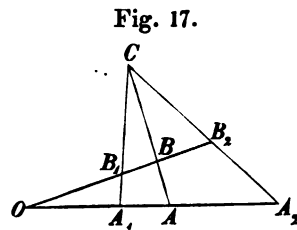
Fig. 16.



Legt man vier von einem Punkte ausgehende gerade Linien durch vier harmonische Punkte, so führen diese Geraden den Namen harmonische Strahlen oder Harmonikalen und

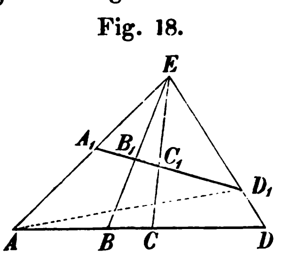
bilden zusammengenommen ein **harmonisches Strahlenbüschel**. Es wird dabei nicht ausgeschlossen, dass die einzelnen Strahlen des Büschels sich in unendlicher Entfernung schneiden oder parallel laufen können. Von den Harmonikalen gilt der allgemeine Satz, dass **ihre Durchschnitte mit jeder beliebigen Geraden harmonisch gelegene Punkte bilden.** Betrachten wir, um diesen Satz zu beweisen, zunächst Fig. 17,

Fig. 17.



worin OA_2 in den Punkten A_1 und A harmonisch getheilt sein soll, so dass A_1C, AC, A_2C drei Strahlen eines harmonischen Büschels darstellen. Mit Beibehaltung der zu Fig. 15 eingeführten Bezeichnungen sind die obigen Gleichungen 1) und 2) den Strahlen A_1C und A_2C angehörig. Da nun die durch Addition entstehende Gleichung 5) von den Punkten C und A befriedigt wird, so bezieht sie sich auf alle Punkte des Strahles CA und giebt für die Strecke OB mittelst der Substitution $y = 0$ wieder die Ausdrücke 7). Es ist also OB_2 in B_1 und B ebenfalls harmonisch getheilt. — Stellen wir jetzt in Fig. 18 das vollständige Strahlenbüschel dar, so folgt, wenn

Fig. 18.



A, B, C und D harmonisch gelegen sind, nach dem Vorhergehenden zunächst die harmonische Theilung von AD_1 und hieraus wieder dasselbe für die Punkte D_1, C_1, B_1 und A_1. — Laufen ferner die Harmonikalen parallel, so hat man nur beide Seiten der Gleichung

$$BC \,.\, AD = AB \,.\, CD$$

in einem und demselben Verhältnisse abzuändern, um rücksichtlich der mit AB, BC, CD, AD proportionalen Strecken A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1 zu der Gleichung

$$B_1C_1 \,.\, A_1D_1 = A_1B_1 \,.\, C_1D_1$$

zu gelangen. Hiermit ist dann ebenfalls die harmonische Theilung der Linie A_1D_1 bewiesen.

Drittes Capitel.

Der Kreis.

§. 9.

Gleichungen des Kreises für rechtwinklige Coordinaten.

An die Betrachtung der geraden Linie, deren Eigenschaften wir aus der Beständigkeit der Anomalie in einem Polarcoordinatensysteme herleiteten, schliesst sich am einfachsten die Untersuchung derjenigen Linie, welcher constante Leitstrahlen zukommen. Dies ist aber der Kreis, dessen einzelne Punkte von dem hierbei als Pol angesehenen Mittelpunkte eine unveränderliche Entfernung haben. Soll diese Fundamentaleigenschaft des Kreises zum besseren Anschlusse an die vorhergehenden Discussionen auf Parallelcoordinaten bezogen werden, so kommt sie darauf hinaus, die Gleichung für den geometrischen Ort eines Punktes xy aufzustellen, dessen geradlinige Entfernung von dem durch seine Coordinaten a und b bestimmten Mittelpunkte eine constante Grösse (den Radius r) besitzt. Wir beschränken uns hierbei vorläufig auf rechtwinklige Coordinaten, weil bei deren Anwendung die Entfernung zweier Punkte den einfachsten Ausdruck gewinnt. Nach Nr. 1) in §. 3 erhalten wir dann

1) $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

als allgemeinste Gleichung des Kreises.

Besondere Formen dieser allgemeinen Gleichung werden dadurch gewonnen, dass man dem Coordinatensysteme eine bestimmte Lage gegen den Kreis einräumt. Folgende zwei Fälle verdienen hierbei besondere Beachtung.

A. Wird der Coordinatenanfang in den Mittelpunkt des Kreises verlegt, so ist $a=b=0$. Hierdurch entsteht das Resultat:

2) $$x^2+y^2=r^2.$$

Wir wollen diese einfachste Form der Gleichung des Kreises seine **Mittelpunktsgleichung** nennen. Insofern dieselbe in Beziehung auf jede der beiden veränderlichen Coordinaten eine rein quadratische Form besitzt, gehören in ihr jedem x zwei gleiche, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftete y, und ebenso jedem y zwei gleiche und entgegengesetzte x zu, soweit sich überhaupt **reelle** Resultate vorfinden. Man erhält nämlich aus Nr. 2)

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \text{ und } x = \pm\sqrt{r^2 - y^2},$$

was nur so lange mögliche Werthe giebt, als x und y zwischen den Grenzen $-r$ und $+r$ eingeschlossen sind. Aus den gleichen Doppelwerthen der x und y folgt die **Symmetrie** des Kreises gegen jeden der beiden zu Achsen gewählten Durchmesser, also auch **gegen alle Durchmesser**, da immer eine der beiden Achsen in beliebiger Richtung durch den Mittelpunkt gelegt werden kann.

Schreiben wir die Gleichung 2) in der Form

$$y^2 = (r+x)(r-x) \quad \text{oder} \quad (r-x) : y = y : (r+x),$$

so zeigt sich y als mittlere Proportionale zwischen $r-x$ und $r+x$, was auf einen bekannten geometrischen Lehrsatz hinauskommt.

B. Nimmt man einen Punkt der Peripherie zum Anfangspunkte und legt die positive Seite der X-Achse durch den Mittelpunkt, so ist $b = o$ und $a = r$. Hieraus ergiebt sich nach Reduction auf y^2:

$$3) \qquad y^2 = 2rx - x^2.$$

Diese Gleichung soll **Scheitelgleichung** des Kreises genannt werden. Da sie nur in Beziehung auf y rein quadratisch ist, so hat bei der jetzigen Gestaltung des Coordinatensystems der Kreis nur noch gegen die X-Achse eine symmetrische Lage.

Bringen wir Nr. 3) auf die Form

$$x^2 + y^2 = 2rx$$

und beachten, dass $\sqrt{x^2+y^2}$ die Entfernung des beliebigen Peripheriepunktes xy vom Coordinaten-Anfange ausdrückt, die wir zur Abkürzung mit z bezeichnen wollen, so können wir auch schreiben:

$$x : z = z : 2r.$$

Es wird keine Schwierigkeit darbieten, dieses Resultat in einer dazu entworfenen Figur zu deuten, und darin einen bekannten Satz der Elementar-Geometrie zu bewähren.

Um zu allgemeinen Betrachtungen über den Kreis zu gelangen, kehren wir zunächst zu der in Nr. 1) aufgestellten allgemeinen Gleichung zurück und geben ihr mit Ausführung der darin angedeuteten Operationen die Gestalt:

$$4)\qquad x^2+y^2-2ax-2by+P=o,$$

wobei zur Abkürzung

$$5)\qquad P=a^2+b^2-r^2$$

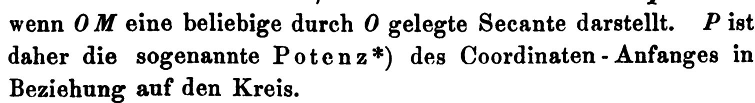
gesetzt worden ist. Es gilt vor allen Dingen, die geometrische Deutung dieser neu eingeführten Constanten P zu untersuchen. Halten wir hierbei fest, dass $\sqrt{a^2+b^2}$ die Entfernung des Mittelpunktes ab vom Coordinaten-Anfange darstellt, die wir mit e bezeichnen wollen, so können wir auch schreiben:

$$6)\qquad P=e^2-r^2.$$

Wir unterscheiden nun folgende drei Fälle:

α) Ist $e>r$, so liegt der Anfangspunkt O ausserhalb des Kreises. (Fig. 19.)

Fig. 19.



Verbinden wir O geradlinig mit dem Mittelpunkte C und legen die Tangente OT, so ist $OC=e$, $CT=r$, also:

$$P=e^2-r^2=\overline{OT}^2$$

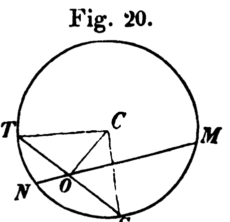
oder nach einer bekannten Eigenschaft der Kreistangente:

$$P=OM.ON,$$

wenn OM eine beliebige durch O gelegte Secante darstellt. P ist daher die sogenannte Potenz*) des Coordinaten-Anfanges in Beziehung auf den Kreis.

β) Wenn $e<r$, so befindet sich der Anfangspunkt O innerhalb des Kreises (Fig. 20).

Fig. 20.



Wir legen rechtwinklig gegen CO die Sehne ST, so ist

$$P=-(r^2-e^2)=-\overline{OT}^2,$$

oder, da $OT=OS$, mit Rücksicht auf die Eigenschaft der in einem Punkte sich schneidenden Kreissehnen,

$$P=-OS.OT=-OM.ON,$$

*) Potenz eines Punktes in Beziehung auf einen Kreis heisst das Product der beiden zwischen ihm und dem Kreisumfange gelegenen Abschnitte jeder durch diesen Punkt gehenden geraden Linie.

wo wieder MN eine beliebige durch O gezogene Sehne bezeichnen mag. P behält hiermit die vorhergehende Bedeutung, ist aber negativ in Rechnung zu ziehen, da die beiden als Factoren der Potenz auftretenden Strecken eine entgegengesetzte Lage haben.

γ. Ist $e = r$, oder liegt der Anfangspunkt auf der Peripherie, so wird

$$P = 0,$$

was ebenfalls mit dem Begriffe der Potenz des Coordinaten-Anfanges zum Kreise insofern übereinstimmt, als hier einer der beiden Factoren in Null übergeht.

Kehren wir von dem im Vorhergehenden enthaltenen Excurs zur Untersuchung der allgemeinen Kreisgleichung zurück, so lässt sich an den in Nr. 1) und 4) aufgestellten Formen das gemeinschaftliche Merkmal festhalten, dass in beiden die Beschränkung auf einen bestimmten Kreis von drei Constanten a, b und r oder a, b und P abhängig gemacht ist, von denen P und r vermittelst der beiden andern Constanten a und b durch die Relation 5) an einander gebunden sind. Sobald nun diese beständigen Grössen nicht unmittelbar gegebene Werthe besitzen, so erfordern sie zu ihrer Feststellung drei von einander unabhängige Bedingungsgleichungen. Wir gewinnen so aus der Gleichungsform das Resultat, dass zur Bestimmung eines Kreises drei Bedingungen nöthig sind. Untersuchen wir den Fall, wenn der Kreis durch drei gegebene Punkte $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ hindurchgehen soll.

Zur Bestimmung der Constanten sind bei dieser Aufgabe unter Festhaltung der Form 4) folgende drei Gleichungen vorhanden:

$$x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + P = 0$$
$$x_2^2 + y_2^2 - 2ax_2 - 2by_2 + P = 0$$
$$x_3^2 + y_3^2 - 2ax_3 - 2by_3 + P = 0.$$

Werden je zwei derselben von einander subtrahirt, so entstehen die neuen Relationen:

$$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - 2a(x_1 - x_2) - 2b(y_1 - y_2) = 0$$
$$x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2 - 2a(x_2 - x_3) - 2b(y_2 - y_3) = 0$$
$$x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 - 2a(x_3 - x_1) - 2b(y_3 - y_1) = 0,$$

die so von einander abhängen, dass aus je zwei derselben die dritte durch Addition gewonnen wird. Aus irgend zweien dieser Gleichungen können daher die Constanten a und b berechnet werden, womit die Lage des Mittelpunktes bestimmt ist. Der Radius

ergiebt sich dann als Entfernung des Punktes ab von einem der drei gegebenen Punkte. Wir wollen von dieser in der allgemeinen Ausführung etwas umständlichen, aber durchaus keine Schwierigkeit darbietenden Rechnung absehen und dafür durch Betrachtung der Form der drei letzten Gleichungen zu einer einfacheren Lösung zu gelangen suchen. Es genügt hierbei, nur eine dieser Gleichungen ins Auge zu fassen, da sie mit Vertauschung der Stellenzeiger für die drei Punkte sämmtlich in der Form übereinstimmen.

Aus der ersten entsteht, wenn man gemeinschaftliche Factoren aushebt und durch -2 dividirt,

$$(x_1 - x_2)\left(a - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + (y_1 - y_2)\left(b - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 0.$$

Hierin bedeuten nach §. 3 Nr. 11) $\frac{x_1 + x_2}{2}$ und $\frac{y_1 + y_2}{2}$ die Coordinaten des Mittelpunktes der Verbindungsgeraden von $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$, die mit ξ und η bezeichnet werden sollen. Betrachten wir nun a und b als veränderlich, so gehören sie einem Punkte der geraden Linie

$$(x_1 - x_2)(x - \xi) + (y_1 - y_2)(y - \eta) = 0$$

an, wo x und y die laufenden Coordinaten ausdrücken. Die letzte Gleichung kann auf die Form

$$y - \eta = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}(x - \xi)$$

gebracht werden und zeigt nach Nr. 6) in §. 6 die Gleichung einer durch den Punkt $\xi\eta$ gehenden Geraden an, welche auf einer Geraden mit der Richtungsconstante $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, oder nach §. 5 Nr. 9) auf der Verbindungslinie von $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ senkrecht steht. So gelangen wir durch diese analytische Untersuchung zu dem aus der Elementar-Geometrie bekannten Satze, dass der Mittelpunkt des durch drei gegebene Punkte gehenden Kreises in den drei Perpendikeln gelegen ist, welche in den Mitten der diese drei Punkte verbindenden Sehnen errichtet werden können.

Ein zweites Merkmal, welches den für den Kreis aufgestellten Gleichungsformen anhaftet, ist, dass sie sämmtlich in Beziehung auf die laufenden Coordinaten dem zweiten Grade angehören. Die allgemeinste Gestalt einer Gleichung zweiten Grades zwischen den veränderlichen x und y ist aber, wenn man jedesmal

die mit gleichen Factoren versehenen Glieder in eines zusammenfasst:

$$7) \quad Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

worin A, B, $C \ldots F$ beliebige zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gelegene beständige Coefficienten vertreten, von denen immer einer, der jedoch von Null verschieden sein muss, durch Division entfernt werden kann. Soll es nun möglich sein, diese Gleichung 7) auf die in Nr. 4) gefundene Form der allgemeinen Kreisgleichung zurückzuführen, so ist die Erfüllung folgender Bedingungen nothwendig und ausreichend:

α. Die Coefficienten der Quadrate von x und y müssen gleich, aber von Null verschieden sein, also: $A = B \gtrless 0$.

β. Es darf nicht das Product der beiden Grössen x und y vorkommen, d. h. es muss $C = 0$ sein.

Unter diesen Bedingungen erhält man nämlich mittelst Division durch A aus Nr. 7)

$$x^2 + y^2 + 2\frac{D}{A}x + 2\frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0,$$

eine Gleichung, die mit Nr. 4) vollständig übereinstimmt, wenn $\frac{D}{A} = -a$, $\frac{E}{A} = -b$ und $\frac{F}{A} = P$ gesetzt wird. a und b bedeuten dann die Coordinaten des Mittelpunktes eines durch die letzte Gleichung charakterisirten Kreises, dessen Radius mittelst der aus Nr. 5) folgenden Relation

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - P}$$

berechnet werden kann. Soll dieser Kreis möglich sein, so ist es noch nöthig, dass die Bedingung

$$a^2 + b^2 > P$$

erfüllt wird. Im gegentheiligen Falle ist kein Kreis, aber auch überhaupt keine Linie möglich.

Sobald nämlich $P = a^2 + b^2$, so entsteht aus Nr. 4)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0,$$

ein Resultat, dem in reellen Zahlen nur genügt werden kann, wenn gleichzeitig $x = a$ und $y = b$ sind. Der Kreis schwindet dabei in einen Punkt — den Mittelpunkt — zusammen.

Soll ferner $P > a^2 + b^2$ sein, so kann man

$$P = a^2 + b^2 + c^2$$

setzen, worin c eine reelle, von Null verschiedene Constante bezeichnet. Man erhält dann aus der in Untersuchung stehenden Gleichung

$$(x-a)^2+(y-b)^2+c^2=0.$$

Die dieser Gleichung zu Grunde liegende Forderung kann aber in reellen Zahlen nicht erfüllt werden, wenn nicht jedes Glied einzeln $=0$ ist.

Wir erkennen hieraus, dass eine den beiden oben gegebenen Bedingungen entsprechende Gleichung zweiten Grades zwischen x und y, wenn überhaupt eine Linie, nothwendig einen Kreis geben muss. Zur Einübung dieses Gesetzes benutzen wir die folgenden beiden Aufgaben.

I. Man soll den Ort der Scheitel aller derjenigen Dreiecke suchen, welche auf einer gegebenen Grundlinie c stehen und in welchen die beiden anderen Seiten ein constantes Verhältniss $1:\varepsilon$ besitzen.

Die Grundlinie c werde zur X-Achse und einer ihrer Endpunkte zum Coordinatenanfange gewählt. Bezeichnen nun für irgend eine Lage des Dreieckes x und y die Coordinaten des Scheitels, so sind die Längen der beiden anderen Dreiecksseiten (vgl. §. 3 Nr. 1)

$$\sqrt{x^2+y^2} \text{ und } \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

und wenn sich diese wie $1:\varepsilon$ verhalten, so entsteht als Gleichung des geometrischen Ortes

$$\varepsilon\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

oder nach Quadrirung und Verbindung der gleichnamigen Glieder

$$8) \qquad (x^2+y^2)(1-\varepsilon^2)-2cx+c^2=0$$

oder

$$x^2+y^2-2\frac{c}{1-\varepsilon^2}x+\frac{c^2}{1-\varepsilon^2}=0.$$

Die letztere Form zeigt für den gesuchten Ort einen Kreis an, der zu Mittelpunktscoordinaten $a=\frac{c}{1-\varepsilon^2}$ und $b=0$ hat. Die Potenz des Coordinatenanfanges für diesen Kreis ist $\frac{c^2}{1-\varepsilon^2}$, und man findet hieraus den Radius

$$r=\sqrt{\frac{c^2}{(1-\varepsilon^2)^2}-\frac{c^2}{1-\varepsilon^2}}=\frac{c\varepsilon}{1-\varepsilon^2}.$$

Wenn $\varepsilon=1$, d. h. wenn die Dreiecke gleichschenklig sein sollen, so verschwinden in der ersten Gleichungsform unter Nr. 8) die quadratischen Glieder und es bleibt für die gesuchte Ortsgleichung nach gehöriger Hebung

$$x = \frac{c}{2}.$$

Der Kreis geht dann in eine gerade Linie über, welche die gemeinschaftliche Grundlinie der Dreiecke in ihrem Halbirungspunkte schneidet.

II. Zu n festen Punkten soll der geometrische Ort eines beweglichen Punktes gesucht werden, welcher die Eigenschaft besitzt, dass die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von allen gegebenen Punkten einem constanten Quadrate q^2 gleich ist.

Es seien $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ .... $a_n b_n$ die Coordinaten der n festen Punkte und xy die des gesuchten Punktes in einer seiner Lagen, so führt die gestellte Aufgabe zu der Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 \\ +\,(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 \\ +\,\ldots\ldots\ldots \\ +\,(x-a_n)^2 + (y-b_n)^2 \end{array}\right\} = q^2.$$

Nach Auflösung der Klammern und Verbindung der gleichnamigen Glieder führen wir mit Anwendung des Summenzeichens Σ die abgekürzten Bezeichnungen ein:

$$\Sigma(a) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$\Sigma(a^2) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \text{ u. s. f.}$$

Dann ergiebt sich für die gesuchte Ortsgleichung:

$$nx^2 + ny^2 - 2x \,.\, \Sigma(a) - 2y \,.\, \Sigma(b) + \Sigma(a^2) + \Sigma(b^2) - q^2 = 0$$

oder nach Division durch n:

$$x^2 + y^2 - 2x \,.\, \frac{\Sigma(a)}{n} - 2y \,.\, \frac{\Sigma(b)}{n} + \frac{\Sigma(a^2) + \Sigma(b^2) - q^2}{n} = 0.$$

Man erkennt hieran einen Kreis mit den Mittelpunktscoordinaten

$$a = \frac{\Sigma(a)}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$
$$b = \frac{\Sigma(b)}{n} = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

Nach den bei der Aufgabe V. in §. 3 angestellten Untersuchungen sind dies die Coordinaten des Punktes der mittleren Entfernung für das gegebene System fester Punkte. Beachten wir hierbei, dass in der auf den gesuchten Kreis bezogenen Potenz

$\frac{\Sigma(a^2) + \Sigma(b^2) - q^2}{n}$ des angenommenen Coordinatenanfanges der Werth q immer so gewählt werden kann, dass der Radius eines der Aufgabe genügenden Kreises jeden beliebigen Werth erhält, so gelangen wir zu folgendem bemerkenswerthen Lehrsatze:

Wenn man den Punkt der mittleren Entfernung in einem Systeme fester Punkte zum Centrum eines Systems concentrischer Kreise wählt, so besitzen diese Kreise die Eigenschaft, dass die Quadrate der Entfernungen jedes ihrer Punkte von allen gegebenen Punkten eine für jeden einzelnen Kreis unveränderliche Summe geben.

§. 10.

Der Kreis und die Gerade.

Zur Aufsuchung der Beziehungen, welche zwischen einem Kreise und einer Geraden stattfinden, wenden wir, um wenigstens für die erstere Linie eine möglichst einfache Gleichung zu erlangen, ein rechtwinkliges Coordinatensystem an, dessen Anfang im Kreismittelpunkte gelegen ist. Die Gleichungen der beiden Linien haben dann die Form:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{und} \quad y = Ax + b,$$

wobei den Constanten A und b die aus der Theorie der geraden Linie bekannten Deutungen zukommen.

Sollen beide Linien gemeinschaftliche Punkte besitzen, so müssen deren Coordinaten den beiden gegebenen Gleichungen Genüge leisten. Durch Elimination von y findet sich für das x solcher Punkte

$$x^2(1 + A^2) + 2Abx + (b^2 - r^2) = 0$$

oder, wenn wir durch $1 + A^2$ dividiren,

$$1) \qquad x^2 + 2x \cdot \frac{Ab}{1 + A^2} + \frac{b^2 - r^2}{1 + A^2} = 0.$$

Das zugehörige y kann aus der Gleichung $y = Ax + b$ berechnet werden.

Da die Form von Nr. 1) eine quadratische ist, so erhalten wir im Allgemeinen daraus zwei Werthe von x und eben so viele für die zugehörigen y, wobei jedoch folgende drei Fälle unterschieden werden müssen:

α. Die beiden Wurzeln der Gleichung haben reelle, der Grösse nach verschiedene Werthe, wenn die Bedingung:

$$\left(\frac{Ab}{1+A^2}\right)^2 > \frac{b^2-r^2}{1+A^2}\ {}^{*)}$$

stattfindet, welche nach einfacher Reduction in $r^2 > \frac{b^2}{1+A^2}$ übergeht.

β. Die beiden Wurzeln sind reell und gleich, sobald

$$\left(\frac{Ab}{1+A^2}\right)^2 = \frac{b^2-r^2}{1+A^2}$$

oder

$$r^2 = \frac{b^2}{1+A^2}.$$

γ. Es sind zwei imaginäre Wurzeln vorhanden, wenn

$$\left(\frac{Ab}{1+A^2}\right) < \frac{b^2-r^2}{1+A^2}$$

oder

$$r^2 < \frac{b^2}{1+A^2}.$$

Die bei Unterscheidung dieser drei Fälle vorkommende Grösse $\frac{b^2}{1+A^2}$ ist nach Nr. 7) in §. 6 das Quadrat der Entfernung der gegebenen geraden Linie vom Coordinatenanfange, d. i. hier vom Kreismittelpunkte; es kommen also die drei Fälle darauf hinaus, dieses Quadrat mit dem Quadrate des Halbmessers oder, wenn wir zu den ersten Potenzen zurückgehen, den Radius mit der erwähnten Entfernung zu vergleichen. Jenachdem der Halbmesser grösser als diese Entfernung, ihr gleich oder kleiner ist, haben Kreis und Gerade zwei Punkte, einen Punkt oder keinen Punkt gemein. Durch die gefundenen Bedingungen werden daher in der Sprache

---

*) Aus der quadratischen Gleichung $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ findet man nach den gewöhnlichen Methoden

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}.$$

Die beiden Wurzeln sind hiernach reell und verschieden, reell und gleich oder endlich imaginär, jenachdem $\beta^2 > \alpha\gamma$, $\beta^2 = \alpha\gamma$ oder $\beta^2 < \alpha\gamma$. — Unter allen Umständen erhält man hierbei, wenn die beiden Wurzeln mit x_1 und x_2 bezeichnet werden:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

der analytischen Geometrie Secanten, Tangenten und solche Gerade unterschieden, welche gänzlich ausserhalb des Kreises liegen.

Nach der Theorie der quadratischen Gleichungen finden, wenn x_1 und x_2 die Wurzeln der Gleichung 1), d. i. die Abscissen der dem Kreise und der Geraden gemeinschaftlichen Punkte bedeuten, die Relationen statt:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{Ab}{1 + A}, \qquad x_1 x_2 = \frac{b^2 - r^2}{1 + A^2}.$$

Um zunächst die geometrische Bedeutung der letzten dieser beiden Gleichungen darzuthun, verweisen wir auf Fig. 21. Darin ist $x_1 = OM_1$, $x_2 = OM_2$, $b = BO$, $A = tan\,\alpha$, wenn α den $\angle P_1 CM_1$ bezeichnet. Die fragliche Gleichung geht hiermit über in

$$OM_1 \,.\, OM_2 = \frac{b^2 - r^2}{sec^2\,\alpha}$$

Fig. 21.

oder, wenn wir beiderseitig mit $sec^2\,\alpha$ multipliciren und für $OM_1 \,.\, sec\,\alpha$ und $OM_2 \,.\, sec\,\alpha$ ihre Werthe einsetzen:

$$BP_1 \,.\, BP_2 = b^2 - r^2.$$

Das Product $BP_1 \,.\, BP_2$ zeigt sich hiernach einzig von der Lage des Punktes B und dem Radius des Kreises abhängig, ohne dass die Richtung der besonderen Geraden in Frage kommt, welcher die Durchschnittspunkte P_1 und P_2 ihre Entstehung verdanken. Die Untersuchung führt somit zu der bereits im vorigen Paragraphen benutzten Eigenschaft der Potenz eines Punktes in Beziehung auf einen gegebenen Kreis zurück.

Was ferner den Werth von $\frac{x_1 + x_2}{2}$ betrifft, so wollen wir zunächst die Abkürzungen $\frac{x_1 + x_2}{2} = \xi$, $\frac{y_1 + y_2}{2} = \eta$ einführen, wobei y_1 und y_2 die den Abscissen x_1 und x_2 zugehörigen Ordinaten der Punkte P_1 und P_2 bedeuten sollen. ξ und η sind unter diesen Voraussetzungen die Coordinaten des Halbirungspunktes der Sehne $P_1 P_2$. Dann ist, mit Rücksicht darauf, dass dieser Punkt auf der Geraden $y = Ax + b$ liegt:

$$\xi = -\frac{Ab}{1 + A^2}, \qquad \eta = A\xi + b.$$

Betrachtet man hierin b als veränderlich, d. h. zieht man alle diejenigen Sehnen in Rechnung, die nur in der Richtungsconstante A übereinstimmen, so lässt sich aus den letzten beiden Gleichungen dieses veränderliche b eliminiren und man erhält als geometrischen Ort der Halbirungspunkte eines Systemes paralleler Sehnen nach einigen Reductionen

$$\xi + A\eta = 0.$$

Wird diese Gleichung auf die Form

$$\eta = -\frac{1}{A} \cdot \xi$$

gebracht, so zeigt sie sich einer durch den Coordinatenanfang (den Kreismittelpunkt) gehenden Geraden angehörig, welche auf den parallelen Sehnen mit der Richtungsconstante A senkrecht steht. Die Mitten paralleler Sehnen liegen hiernach, wie schon aus der Elementar-Geometrie bekannt ist, in einem zu den Sehnen senkrechten Durchmesser.

Da sich die vorhergehenden Untersuchungen auf alle Geraden mit der Richtungsconstante A beziehen, so haben sie auch dann noch Giltigkeit, wenn eine solche Gerade Tangente wird. Die beiden Punkte P_1 und P_2 fallen dann mit $\xi\eta$ in einen, nämlich den Berührungspunkt zusammen, und die Gleichung

$$\xi + A\eta = 0$$

gehört, wenn man ξ und η als veränderliche Coordinaten betrachtet, dem im Berührungspunkte auf der Tangente errichteten Perpendikel oder der sogenannten Normale an. Die Form dieser Gleichung zeigt, dass alle Normalen des Kreises durch seinen Mittelpunkt gehen. Mittelst dieser bekannten Eigenschaft ist es leicht, die Gleichung einer an den Kreis gezogenen Tangente zu bilden, wenn ihr Berührungspunkt $x_1 y_1$ gegeben ist. Wir finden zunächst für die Richtungsconstante der Normale, da sie durch den Punkt $x_1 y_1$ und den Coordinatenanfang geht, nach Nr. 9) in §. 5 den Werth $\frac{y_1}{x_1}$, folglich für die darauf senkrechte Tangente mit Rücksicht auf §. 6 Nr. 6) die Gleichung:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1).$$

Nach einigen Reductionen entsteht hieraus:

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Da $x_1 y_1$ ein Peripheriepunkt, also $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, so erhält man mit Einsetzung dieses Werthes für die Gleichung der im Punkte $x_1 y_1$ an den Kreis gelegten Tangente:

$$2) \qquad x x_1 + y y_1 = r^2.$$

Mit Umgehung der Normale gelangen wir zu derselben Gleichung, wenn wir in der Formel 1), welche für die Abscissen der dem Kreise und der Geraden gemeinschaftlichen Punkte giltig war, die Bedingung substituiren, unter welcher die beiden Durchschnittspunkte in einen zusammenfallen. Für den Berührungspunkt $x_1 y_1$ der an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ gezogenen Tangente $y = Ax + b$ haben wir nämlich nach Nr. 1) die Gleichung:

$$x_1^2 + 2x_1 \cdot \frac{Ab}{1+A^2} + \frac{b^2 - r^2}{1+A^2} = 0,$$

worin, damit die beiden Wurzeln gleich werden,

$$\frac{b - r^2}{1+A^2} = \left(\frac{Ab}{1+A^2}\right)^2$$

sein muss. Man erhält hiermit:

$$x_1^2 + 2x_1 \cdot \frac{Ab}{1+A^2} + \left(\frac{Ab}{1+A^2}\right)^2 = \left(x_1 + \frac{Ab}{1+A^2}\right)^2 = 0,$$

$$x_1 = -\frac{Ab}{1+A^2}.$$

Mittelst der Gleichung $y_1 = Ax_1 + b$ findet sich ferner:

$$y_1 = \frac{b}{1+A^2},$$

und durch Verbindung der beiden letzten Gleichungen entsteht für die Richtungsconstante der Tangente:

$$A = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Durch Substitution dieses Werthes in der Gleichung

$$y - y_1 = A(x - x_1),$$

welche allen durch den Punkt $x_1 y_1$ gehenden Geraden, also auch der Berührenden angehört, kommen wir zu der früher gefundenen Tangentengleichung zurück.

Die für eine Tangente mit gegebenem Berührungspunkte gefundene Gleichung 2) gewährt uns die Mittel, folgende Aufgabe zu lösen:

Von einem ausserhalb eines gegebenen Kreises gelegenen Punkte $x_1 y_1$ sollen an diesen Kreis Berüh-

rende gezogen werden; es sind die Coordinaten der Berührungspunkte zu bestimmen.

Wird ein der gestellten Aufgabe genügender Berührungspunkt mit $\xi\eta$ bezeichnet, so erhält nach dem Vorigen die an diesen Punkt gelegte Tangente die Gleichung:

$$x\xi + y\eta = r^2,$$

die, wenn die Tangente durch den gegebenen Punkt $x_1 y_1$ gehen soll, auch noch mit Einsetzung von x_1 und y_1 für x und y ihre Geltung behalten muss. Beachtet man ferner, dass der Punkt $\xi\eta$ auf der Kreisperipherie liegen soll, so hat man zu seiner Bestimmung folgende zwei Gleichungen:

$$\xi x_1 + \eta y_1 = r^2$$
$$\xi^2 + \eta^2 = r^2.$$

Da die eine dieser beiden Gleichungen quadratisch ist, so müssen sich zwei zusammengehörige Paare von Werthen für ξ und η finden; die Aufgabe lässt also im Allgemeinen eine doppelte Lösung zu, was den bekannten elementar-geometrischen Satz giebt, dass von einem Punkte ausserhalb eines Kreises zwei Tangenten an diesen gezogen werden können. — Die Berechnung der Werthe von ξ und η kann der Selbstübung überlassen bleiben. Einfacher gelangen wir auf die folgende Weise zum Ziele.

Wenn in der ersten der beiden zur Ermittelung von ξ und η führenden Gleichungen, nämlich in

$$\xi x_1 + \eta y_1 = r^2$$

ξ und η als veränderlich angesehen werden, so gehört dieselbe als Gleichung ersten Grades einer geraden Linie an, die durch die beiden gesuchten Berührungspunkte hindurchgehen muss. Bezeichnen wir nun wie gewöhnlich die laufenden Coordinaten mit x und y, so ist

3) $$x x_1 + y y_1 = r^2$$

die Gleichung der sogenannten Berührungssehne (dieselbe nach beiden Seiten hin unendlich verlängert gedacht), in deren Durchschnitten mit dem gegebenen Kreise sich die beiden Berührungspunkte vorfinden. Da die Form dieser Gleichung mit der unter Nr. 2) für die Tangente gefundenen vollkommen übereinstimmt, so besitzt die Berührungssehne wie die Tangente die Eigenschaft, auf der Verbindungsgeraden des Kreismittelpunktes mit dem Punkte $x_1 y_1$ senkrecht zu stehen. Man gelangt hiermit zur vollständigen Bestimmung der Berührungssehne, sobald nur

einer ihrer Punkte bekannt ist. Wir wählen dazu den Durchschnittspunkt mit der eben erwähnten Verbindungslinie. Bezeichnen wir ihn mit xy, so gilt, da er mit dem Coordinatenanfange und dem Punkte $x_1 y_1$ in gerader Linie liegen soll, nach Nr. 12) in §. 5 die Proportion

$$x : x_1 = y : y_1$$

oder mit Vertauschung der inneren Glieder

$$x : y = x_1 : y_1.$$

Nach einem aus der Proportionslehre bekannten Satze entsteht hieraus:

$$(x^2 + y^2) : (xx_1 + yy_1) = (xx_1 + yy_1) : (x_1^2 + y_1^2)\ *).$$

Nun liegt aber der gesuchte Punkt auch auf der Geraden

$$xx_1 + yy_1 = r^2,$$

womit die vorhergehende Proportion die folgende Form annimmt:

$$(x^2 + y^2) : r^2 = r^2 : (x_1^2 + y_1^2).$$

Setzen wir hierin $z^2 = x^2 + y^2$ und $z_1^2 = x_1^2 + y_1^2$, wo z und z_1 die Abstände der Punkte xy und $x_1 y_1$ vom Kreismittelpunkte bedeuten, so entsteht:

$$z^2 : r^2 = r^2 : z_1^2 \text{ oder } z : r = r : z_1.$$

Es zeigt sich also z als dritte Proportionale zu z_1 und r, oder r als mittlere Proportionale zwischen z und z_1. Hierauf kann leicht die aus der Elementargeometrie bekannte Construction der Berührungspunkte gegründet werden.

§. 11.
Zwei Kreise.

Die gegenseitigen Lagen zweier Kreise können immer auf die einer Geraden und eines Kreises zurückgeführt werden. Sind nämlich, um von einer möglichst allgemeinen Auffassung auszugehen, die Gleichungen der beiden Kreise nach Nr. 4) in §. 9 in der Form

$$1)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2b_1 y + P_1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2a_2 x - 2b_2 y + P_2 = 0 \end{cases}$$

gegeben, so muss für ihre etwa vorhandenen gemeinschaftlichen Punkte auch jede neue Gleichung giltig sein, welche als nothwen-

---

*) Aus der Proportion

$$x : y = x_1 : y$$

erhält man nämlich, wenn m, n, p und q beliebige Zahlen bezeichnen,

$$(mx + ny) : (px + qy) = (mx_1 + ny_1) : (px_1 + qy_1).$$

In der obigen Proportion ist $m = x$, $n = y$, $p = x_1$, $q = y_1$ gesetzt.

dige Folge der beiden gegebenen auftritt. Durch Subtraction entsteht die Gleichung ersten Grades:

$$2) \qquad 2x(a_1 - a_2) + 2y(b_1 - b_2) = P_1 - P_2$$

d. i. die Gleichung einer Geraden, welche die Durchschnittspunkte der beiden zu untersuchenden Kreise enthält. Können hiernach die beiden Kreise nur solche Punkte mit einander gemein haben, welche gleichzeitig in dieser Geraden gelegen sind, so folgt zunächst mit Rücksicht auf den vorhergehenden Paragraph, dass solcher Punkte höchstens zwei vorhanden sein werden. Die durch die Gleichung 2) charakterisirte Linie selbst stellt die gemeinschaftliche Secante der beiden Kreise oder ihre gemeinsame Tangente dar, oder liegt endlich ausserhalb beider Kreise, je nachdem dieselben sich schneiden, sich berühren oder keine gemeinschaftlichen Punkte besitzen. Zu einer auf alle diese drei Lagen bezüglichen Eigenschaft der fraglichen Geraden gelangen wir durch die folgende Untersuchung.

Mit Einführung der abgekürzten Bezeichnung

$$3) \qquad \begin{cases} \Pi_1 = x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2b_1 y + P_1 \\ \Pi_2 = x^2 + y^2 - 2a_2 x - 2b_2 y + P_2 \end{cases}$$

können die Gleichungen der beiden Kreise auf die Ausdrücke

$$\Pi_1 = 0 \text{ und } \Pi_2 = 0$$

reducirt werden. Die durch Subtraction entstandene Gleichung 2) gewinnt hiermit die Form

$$\Pi_2 - \Pi_1 = 0,$$

und die zu untersuchende Gerade besitzt diejenige Eigenschaft, welche analytisch durch die daraus folgende Relation

$$4) \qquad \Pi_1 = \Pi_2$$

ausgedrückt wird. Um diese Eigenschaft geometrisch zu deuten, ist auf die Werthe von Π_1 und Π_2 zurückzugehen. Drücken wir zu diesem Endzwecke P_1 mit Benutzung der Formel 5) in §. 9 durch a_1, b_1 und r_1 aus, wobei r_1 den Radius des Kreises bedeutet, für welchen a_1 und b_1 die Mittelpunktscoordinaten darstellen, so kann die erste der Gleichungen unter Nr. 3) auf die Form

$$\Pi_1 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2$$

gebracht werden. Nach einer bereits mehrfach angewendeten Formel stellt hierin der Ausdruck

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2$$

die Entfernung des Punktes xy vom Kreismittelpunkte $a_1 b_1$ dar,

die wir mit e_1 bezeichnen wollen. Für Π_1 ergiebt sich hieraus der Werth:

$$\Pi_1 = e_1^2 - r_1^2.$$

Mit Rücksicht auf die in §. 9 gewonnene Deutung der dortigen Gleichung 6), welche mit der jetzt gefundenen in der Form vollkommen übereinstimmt, bewährt sich hiernach Π_1 als Potenz des Punktes xy für den Kreis, welchem die Constanten a_1, b_1 und r_1 zukommen. In ganz gleicher Weise gelangen wir zu der Erkenntniss, dass Π_2 die Potenz des Punktes xy für den zweiten der in Untersuchung befindlichen Kreise darstellt. Die obige Relation 4) giebt hiernach für die durch die Gleichung 2) bezeichnete Gerade die Eigenschaft, dass jeder ihrer Punkte in Beziehung auf beide Kreise gleiche Potenzen besitzt. Nach dieser Eigenschaft soll sie die Linie gleicher Potenzen oder kurz: Potenzlinie für die beiden Kreise genannt werden. Mittelst der bekannten Bedeutung der Potenz eines Punktes für einen Kreis folgt hieraus unter Anderem, dass, wenn man von einem ausserhalb der beiden Kreise gelegenen Punkte dieser Linie an beide Kreise Tangenten legt, die zwischen diesem Punkte und den Berührungspunkten gemessenen Strecken dieser Tangenten gleich lang sind, dass also z. B. die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise von der Potenzlinie halbirt werden. Hiernach führt sie auch die Benennung: Linie der gleichen Tangenten.*)

Eine zweite allgemeine Eigenschaft der Potenzlinie wird gewonnen, wenn wir ihre in Nr. 2) enthaltene Gleichung auf die Form

$$y = -\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}\,x + \frac{P_1 - P_2}{2\,(b_1 - b_2)}$$

bringen, worin $-\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$ die Richtungsconstante bezeichnet. Nach Nr. 5) in §. 6 zeigt sich, dass jede Gerade mit der Richtungsconstante $\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$ von ihr rechtwinklig durchschnitten wird. Diese letztere Constante gehört aber nach Nr. 9) in §. 5 der die Mittelpunkte der beiden Kreise verbindenden Centrallinie zu. Hieraus entsteht der Satz: Die Potenzlinie zweier Kreise steht

*) Ausserdem kommen noch die Namen: Chordale, Radicalachse u. a. m. vor.

auf der Centrallinie dieser Kreise senkrecht — eine Eigenschaft, die für den Fall, wo die Potenzlinie in die gemeinschaftliche Secante oder gemeinsame Tangente übergeht, aus der Elementargeometrie bekannt ist.

Wird zu den beiden Kreisen noch ein dritter mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2a_3x - 2b_3y + P_3 = 0$$

hinzugefügt, so kommt je zweien dieser Kreise eine Potenzlinie zu. Diese drei Geraden haben nach Nr. 2) folgende Gleichungen:

$$2x(a_1 - a_2) + 2y(b_1 - b_2) = P_1 - P_2$$
$$2x(a_2 - a_3) + 2y(b_2 - b_3) = P_2 - P_3$$
$$2x(a_3 - a_1) + 2y(b_3 - b_1) = P_3 - P_1.$$

Da jede dieser drei Gleichungen durch Addition der beiden andern gebildet werden kann, so muss der Durchschnittspunkt zweier solcher Potenzlinien in der dritten gelegen sein, oder mit andern Worten: Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte. Dieser Lehrsatz kann benutzt werden, um die Potenzlinie zweier sich nicht schneidenden und auch nicht berührenden Kreise geometrisch zu construiren. Legt man nämlich einen dritten Kreis so, dass er die beiden gegebenen Kreise schneidet, so sind die gemeinschaftlichen Secanten zwei Potenzlinien, durch deren Durchschnittspunkt auch die dritte, den beiden gegebenen Kreisen angehörige hindurchgehen muss. Die durch diesen Punkt gelegte Senkrechte zur Centrallinie der beiden ersten Kreise stellt die gesuchte Gerade dar. Die Fällung der Senkrechten kan auch umgangen werden, wenn man einen vierten Kreis zu Hilfe nimmt, welcher wieder die beiden gegebenen schneidet, und mittelst der gemeinsamen Secanten einen zweiten Punkt der gesuchten Potenzlinie construirt.

Gehen wir zu der Aufgabe über, mittelst der Potenzlinie die gegenseitigen Lagen zweier Kreise analytisch zu untersuchen, so soll zunächst zur Vereinfachung der Rechnung das Coordinatensystem so gelegt werden, dass die Gleichungen der beiden Kreise eine möglichst einfache Form gewinnen. Wir treffen hierzu folgende Bestimmungen: Der Mittelpunkt des grösseren der beiden Kreise (mit dem Radius R) werde zum Coordinatenanfangspunkte gewählt und die positive Seite der X-Achse durch den Mittelpunkt des zweiten Kreises (dessen Radius r sein soll) gelegt; die positive Zahl a giebt den Abstand beider Mittelpunkte an. Die Gleichungen der zwei Kreise sind unter diesen Voraussetzungen:

$$5) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x-a)^2 + y^2 = r^2. \end{cases}$$

Man erhält hieraus durch Subtraction als Gleichung der Potenzlinie

$$2ax - a^2 = R^2 - r^2,$$

welche leicht auf die Form

$$6) \quad x = \frac{a^2 + R^2 - r^2}{2a} \text{ oder } x = \frac{a}{2} + \frac{R^2 - r^2}{2a}$$

gebracht werden kann. Nach dieser Form zeigt sich die Potenzlinie parallel zur Y- oder senkrecht zur X-Achse, wodurch wir auf die bereits erwähnte Eigenschaft der rechtwinkligen Lage zur Centrallinie zurückgebracht werden. Zugleich sehen wir, dass sie stets dem Mittelpunkte des kleineren Kreises näher gelegen sein muss, indem sie durch denjenigen Punkt der Centrallinie hindurchgeht, welcher um den nach unsern Voraussetzungen positiven Abstand $\frac{R^2 - r^2}{2a}$ von der Mitte der Strecke a entfernt ist. Es wird keine Schwierigkeit gewähren, mittelst dieses Abstandes den in der Centrallinie gelegenen Punkt geometrisch zu construiren. Im Falle der Gleichheit beider Kreise liegt die Potenzlinie von den beiden Mittelpunkten gleichweit entfernt.

Zur Trennung der möglichen Lagen unterscheiden wir folgende drei Fälle:

α. Ist $x > R$, so liegt die Potenzlinie ausserhalb des grösseren, also auch ausserhalb des kleineren Kreises, da etwa vorhandene gemeinschaftliche Punkte stets allen drei Linien gemeinsam sein müssen. Nach Nr. 6) erhalten wir für diesen Fall die Bedingung

$$\frac{a^2 + R^2 - r^2}{2a} > R$$

und nach leichter Umgestaltung

$$(a - R)^2 - r^2 > 0$$

oder

$$[a - (R + r)]\,[a - (R - r)] > 0.$$

Der letztern Ungleichung wird nur genügt, wenn

entweder $a > R + r$, wobei von selbst $a > R - r$,

oder $a < R - r$, „ „ „ $a < R + r$.

Im ersten dieser beiden Fälle ist $a^2 > (R+r)(R-r)$ oder $R^2 - r^2 < a^2$, folglich mit Rücksicht auf Nr. 6) $x < a$. Die Potenzlinie liegt hier-

nach zwischen beiden Kreisen, so dass dieselben vollständig von einander getrennt sind. Im zweiten Falle erhält man in gleicher Weise $R^2 - r^2 > a^2$ und $x > a$; die Potenzlinie liegt hierbei ausserhalb der beiden Kreise, von welcher der eine den andern umschliesst.

β. Wenn $x = R$, so ergiebt sich durch eine ähnliche Rechnung wie vorher die Bedingungsgleichung:

$$[a - (R + r)]\,[a - (R - r)] = 0,$$

welche nur Befriedigung erlangt, wenn entweder $a = R + r$ oder $a = R - r$. Die Potenzlinie ist hierbei gemeinsame Tangente der beiden Kreise, welche sich im ersten Falle von Aussen, im zweiten von Innen berühren.

γ. Sobald $x < R$, schneidet die Potenzlinie beide Kreise, die sich demnach selbst durchschneiden müssen. Als Bedingung hierfür entsteht:

$$[a - (R + r)]\,[a - (R - r)] < 0,$$

was nur möglich ist, wenn gleichzeitig

$$R + r > a > R - r.$$

Die analytische Untersuchung der Potenzlinie führt hiernach auf die aus der Elementargeometrie bekannten Unterscheidungsmerkmale der Lagen zweier Kreise zurück.

§. 12.

Kreisgleichung für schiefwinklige Coordinaten.

Soll die Fundamentaleigenschaft des Kreises, dass jeder seiner Peripheriepunkte gleichen Abstand vom Mittelpunkte besitzt, durch schiefwinklige Coordinaten ausgedrückt werden, so entsteht mit Beibehaltung der früher für die Mittelpunktscoordinaten und den Radius eingeführten Bezeichnungen nach Nr. 3) in §. 3 als allgemeinste Gleichung:

$$1)\quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b)\cos\omega = r^2,$$

worin wieder ω den Coordinatenwinkel darstellt. Zunächst kann diese Gleichung auf die Form

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega - 2x(a + b\cos\omega) - 2y(b + a\cos\omega) + (a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega - r^2) = 0$$

gebracht werden, und wenn wir hierin zur Abkürzung

$$2)\quad m = a + b\cos\omega, \quad n = b + a\cos\omega, \quad P = a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega - r^2$$

setzen, so geht sie über in:

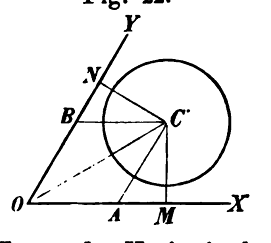
3) $x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega - 2mx - 2ny + P = 0.$

Was die Bedeutung der hierbei benutzten Constanten m, n und P betrifft, so ist vor allen Dingen leicht ersichtlich, dass unter P wieder die Potenz des Coordinatenanfanges für den Kreis zu verstehen ist. Setzen wir nämlich

$$e^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega,$$

so stellt nach Nr. 7) in §. 2 e die Entfernung des Kreismittelpunktes vom Coordinatenanfangspunkte dar. Mit Substitution dieses Werthes in den Ausdruck für P kommen wir aber zur Gleichung 6) des §. 9, folglich auch zu allen daraus gezogenen Consequenzen zurück. Für die Deutung der Constanten m und n ist auf Figur 22 zu verweisen, worin $m = AO = BC$ und $n = BO = AC$. Man erhält hiernach:

Fig. 22.



$$a + b\cos\omega = OM,\ b + a\cos\omega = ON,$$

woraus m und n als Projectionen der Geraden OC auf die beiden Coordinatenachsen erkannt werden. Nach Analogie mit den früher bei Coordinatentransformation benutzten Gleichungen kommt dieser Deutung eine allgemeine, von den besondern Lagen des Kreismittelpunktes unabhängige Geltung zu.

Halten wir die unter 3) gewonnene Gleichung des Kreises gegen die in §. 9 Nr. 7) angeführte allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

so zeigt sich, dass die letzte Gleichung nothwendig einem Kreise — wenn überhaupt einer Linie — angehören muss, sobald der Relation

4) $$A : B : C = 1 : 1 : \cos\omega$$

Genüge geleistet ist. Der Weg, welcher zu diesem Resultate führt, ist mit dem in §. 9 eingeschlagenen vollkommen übereinstimmend.

Die im Vorigen aufgestellten Formeln gehen selbstverständlich in die für rechtwinklige Coordinaten giltigen über, wenn $\omega = 90^0$ gesetzt wird. Dabei vereinfachen sich aber die Beziehungen so sehr, dass fast bei allen auf den Kreis bezüglichen Untersuchungen vom Gebrauche schiefwinkliger Coordinaten abzusehen ist. Wir beschränken uns daher einzig auf das folgende Beispiel:

Es soll die Gleichung eines Kreises aufgesucht werden, welcher die Achsen eines beliebigen Parallelcoordinatensystemes berührt.

Aus Nr. 3) ergiebt sich bei noch unbestimmter Lage des Coordinatensystems für die Abscissen der Durchschnittspunkte des Kreises und der X-Achse mittelst der Substitution $y=0$ die Gleichung:

$$x^2 - 2mx + P = 0,$$

deren linke Seite zu einem vollständigen Quadrat werden muss, wenn die X-Achse Tangente sein soll; man erhält dafür die Bedingung:

$$P = m^2.$$

In gleicher Weise entsteht als Bedingung dafür, dass die Y-Achse vom Kreise berührt wird:

$$P = n^2.$$

Treffen wir nun noch die Verfügung, dass beide Berührungspunkte in den positiven Theilen der Coordinatenachsen gelegen sein sollen, so führt die aus den beiden letzten Gleichungen folgende Relation $m^2 = n^2$ zu dem Resultate:

$$m = n.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die frühere allgemeine Gleichung erhalten wir

$$5)\qquad x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega - 2mx - 2my + m^2 = 0$$

als der gestellten Aufgabe entsprechende Kreisgleichung. Die Substitutionen $x=0$ und $y=0$ zeigen, dass hierin m den Abstand der in den Achsen gelegenen Berührungspunkte vom Coordinatenanfange ausdrückt*).

Wird in der Gleichung 5) beiderseitig das Product

$$2xy(1-\cos\omega) = 4xy\sin^2\frac{\omega}{2}$$

addirt, so gewinnt sie die einfachere Form:

$$6)\qquad (x+y-m)^2 = 4xy\sin^2\frac{\omega}{2}.$$

Multiplicirt man hierin noch auf beiden Seiten mit $\cos^2\frac{\omega}{2}$ und beachtet dabei, dass $4\sin^2\frac{\omega}{2}\cos^2\frac{\omega}{2} = \sin^2\omega$, so kann das Resultat dieser Operation in folgender Weise geschrieben werden:

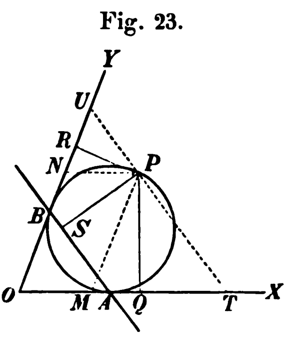
---

*) Dasselbe Resultat folgt auch aus der Bedeutung von P, verbunden mit der obigen Relation: $P = m^2$.

$$7)\qquad \left[(x+y-m)\cos\frac{\omega}{2}\right]^2 = x\sin\omega\,.\,y\sin\omega.$$

Diese letztere Gleichungsform führt zu einer einfachen geometrischen Deutung. Stellt nämlich in Figur 23 AB die den Coordinatenachsen zugehörige Berührungssehne dar, so lege man durch den beliebigen Peripheriepunkt P die Gerade $TU // AB$. Dann ist wegen $AO = BO = m$ auch $PN = UN = x$ und $TM = PM = y$, folglich $x + y - m = AT = BU$, und $(x + y - m)\cos\frac{\omega}{2} = PS$, wenn PS senkrecht zur Berührungssehne, also unter dem Winkel $\frac{\omega}{2}$ gegen jede der beiden Coordinatenachsen gezogen ist. Ferner erhält man $x \sin\omega = PR$ und $y \sin\omega = PQ$, wobei PQ und PR rechtwinklig gegen die Coordinatenachsen gestellt sind. Hiermit gewinnt die Gleichung 7) die Deutung:

Fig. 23.



$$\overline{PS}^2 = PR\,.\,PQ$$

und schliesst den folgenden Lehrsatz in sich: Im Kreise ist der Abstand jedes Peripheriepunktes von der Berührungssehne zweier Tangenten die mittlere Proportionale zwischen den Entfernungen desselben Punktes von den beiden Tangenten.

Zu einem für Tangentenconstructionen brauchbaren Resultate führt noch die Gleichung 5), wenn sie mit der Gleichung einer durch den Coordinatenanfang gehenden Geraden $y = Ax$ zusammengestellt wird. Durch Elimination von y erhält man zunächst für die Coordinate x der Durchschnittspunkte dieser Geraden und des Kreises:

$$8)\qquad x^2(1 + A^2 + 2A\cos\omega) - 2mx(1 + A) + m^2 = 0.$$

Stellen wir uns nun die Aufgabe, auf der Secante $y = Ax$ den zum Coordinatenanfange zugeordneten harmonischen Punkt zu suchen, während die Durchschnittspunkte mit dem Kreise die beiden andern harmonischen Punkte darstellen sollen, so kommt, insofern die y dieser Punkte als Parallelen ein harmonisches Strahlenbüschel bilden, diese Aufgabe darauf hinaus, das harmonische Mittel der beiden Wurzeln in Gleichung 8) ausfindig zu machen.

Zu diesem Zwecke sollen die beiden Wurzeln mit x_1 und x_2 bezeichnet werden; dann ergiebt sich für den gesuchten Punkt:

$$x = x_1 x_2 : \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m^2}{1 + A^2 + 2A \cos \omega} : \frac{m(1 + A)}{1 + A^2 + 2A \cos \omega}$$

oder:

$$x = \frac{m}{1 + A},$$

und zugleich, da er auf der gegebenen Secante liegen soll,

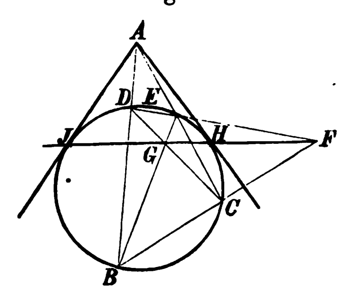
$$y = Ax.$$

Wird aus den beiden letzten Gleichungen noch A eliminirt, so entsteht nach einfacher Umwandlung:

$$9) \qquad \frac{x}{m} + \frac{y}{m} = 1,$$

d. i. die Gleichung der Berührungssehne. Da dieses Resultat für jede durch den Coordinatenanfang gehende Secante Geltung behält, so folgt hieraus der Lehrsatz: Legt man durch einen ausserhalb des Kreises gegebenen Punkt beliebige Secanten, so werden dieselben durch die Berührungssehne und den Kreis harmonisch getheilt, wobei der gegebene Punkt und der Durchschnitt mit der Berührungssehne conjugirte Punkte darstellen. Mit Anwendung des Gesetzes von der harmonischen Theilung der Diagonalen eines vollständigen Vierseits (vgl. §. 8 II.) erwächst hieraus die folgende Linealconstruction zur Lösung der Aufgabe, von einem ausserhalb des Kreises gegebenen Punkte Tangenten an den Kreis zu legen (Figur 24).

Fig. 24.



Man ziehe von dem gegebenen Punkte A aus die beliebigen Secanten AB und AC, welche ausser in B und C den Kreis in D und E schneiden. Die Geraden BC und DE, sowie BE und CD geben dann die Durchschnittspunkte F und G, deren gerade Verbindungslinie FG die Berührungssehne darstellt. AH und AI sind hiernach die gesuchten Tangenten. Da jede dritte zu Hilfe genommene Secante in Verbindung mit einer der beiden vorher angewendeten zu derselben Berührungssehne führen muss, so lässt diese Construction auch die

in Figur 25 enthaltene Abänderung zu. Hier sind durch A die drei Secanten AB, AC und AC' gelegt und dann die Durchschnittspunkte dieser Geraden und des Kreises durch die Sehnen BE und CD, BE' und $C'D$ verbunden. Die hierdurch gewonnenen Schnittpunkte G und G' liegen wieder auf der Berührungssehne HJ.

Fig. 25.

Wir werden später zu der Erkenntniss gelangen, dass die vorigen Constructionen, sowie der Lehrsatz, welchem sie ihre Entstehung verdanken, nicht allein für den Kreis, sondern überhaupt für alle Linien zweiten Grades Anwendung finden.

Viertes Capitel.

Die Kegelschnitte.

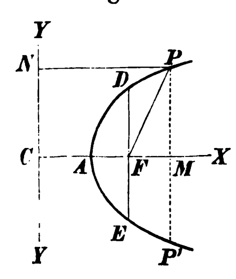
§. 13.

Allgemeine Formen der Kegelschnittsgleichung.

Der Umstand, dass in Folge der in §. 9 und 12 angestellten Betrachtungen die allgemeine Gleichung zweiten Grades für Parallelcoordinaten sich nur unter beschränkten Bedingungen einem Kreise angehörig zeigt, enthält für uns die Aufforderung, noch andere Linien zweiten Grades ausfindig zu machen. Ohne deshalb für jetzt auf die Gleichung selbst zu recurriren, wollen wir zu einer Untersuchung übergehen, die uns mit noch mehren Linien dieser Art bekannt machen wird.

Der geometrische Ort eines Punktes in der Ebene, dessen Entfernungen von einer festen Geraden und einem festen Punkte derselben Ebene in einem unveränderlichen Verhältnisse zu einander stehen, führt den Namen eines Kegelschnittes, weil er auf einer Kegeloberfläche mittelst des Durchschnittes mit einer Ebene räumlich dargestellt werden kann. Wir stellen uns die Aufgabe, diesen Ort analytisch zu untersuchen. Die feste Gerade — die sogenannte Directrix oder Leitlinie — soll hierbei vorläufig als Y-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystemes benutzt werden, dessen X-Achse den gegebenen festen Punkt — den zugeordneten Brennpunkt oder Focus — in sich enthält (Fig. 26).

Fig. 26.



Die vorgelegte Bedingung lässt sich, wenn F den Brennpunkt darstellt, in der Proportion

$$PN : PF = 1 : \varepsilon$$

oder in der Gleichung

$$1) \quad PF = \varepsilon \,.\, PN = \varepsilon \,.\, CM$$

ausdrücken, wobei P einen beliebigen Punkt des Kegelschnittes PAP' und ε den constanten Quotienten seiner Abstände von Brennpunkt und Leitlinie bezeichnet. Setzen wir nun die Distanz des Brennpunktes von der Directrix $CF = d$, so ist

$$\overline{PF}^2 = (x - d)^2 + y^2,$$

und es entsteht aus Nr. 1) mit Substitution von $CM = x$ nach einfacher Reduction die Gleichung

$$2) \qquad y^2 = \varepsilon^2 x^2 - (x - d)^2.$$

Insofern dieselbe in Beziehung auf y rein quadratisch ist, zeigt sie, dass jeder Abscisse zwei gegen die Gerade CF — die sogenannte Achse des Kegelschnittes — symmetrisch gelegene Punkte, wie z. B. P und P', zugehören, was übrigens aus der Entstehung des Kegelschnittes leicht vorhergesehen werden konnte.

Durch die zuletzt gefundene Eigenschaft empfiehlt sich die Beibehaltung der im Vorigen benutzten X-Achse; es erübrigt daher noch die Frage, ob mit Verlegung der Y-Achse einfachere Gleichungsformen zu erzielen sind. Um in dieser Beziehung zu möglichst allgemeinen Resultaten zu gelangen, wollen wir dem neuen Anfangspunkte eine vorläufig noch unbestimmte Abscisse h geben, so dass die früheren x in $x + h$ übergehen. Aus der Gleichung 2) entsteht dann:

$$y^2 = \varepsilon^2 (x + h)^2 - (x + h - d)^2,$$

und, wenn man auf der rechten Seite nach Potenzen von x ordnet, nach einigen leichten Umformungen:

$$3) \; y^2 = [h(1+\varepsilon) - d]\,[d - h(1-\varepsilon)] + 2x[d - h(1-\varepsilon^2)] - x^2(1-\varepsilon^2).$$

Mit Einsetzung specieller Werthe von h können hieraus die Gleichungsformen für besondere Lagen des Coordinatenanfanges gewonnen werden.

Soll z. B. der neue Anfangspunkt mit dem Brennpunkte zusammenfallen, so wird $h = d$, und man erhält mittelst dieser Substitution:

$$4) \qquad y^2 = d^2\varepsilon^2 + 2d\varepsilon^2 x - (1 - \varepsilon^2)x^2.$$

Für die Ordinate im Brennpunkte, die wir mit p bezeichnen wollen, folgt hieraus die Relation:

$$5) \qquad p = d\varepsilon \, {*})$$

und, wenn wir diesen Werth in 4) substituiren, so entsteht:

---

*) Dasselbe Resultat wird übrigens auch ohne weitere Rechnung erhalten, wenn man die obige Gleichung 1) auf die Punkte D und E anwendet.

$$6) \qquad y^2 = p^2 + 2p\varepsilon x - (1-\varepsilon^2)x^2.$$

Die hierbei benutzte neue Constante p bildet die Hälfte der Sehne DE (Fig. 26), welche parallel zur Directrix durch den Brennpunkt hindurchgeht, oder des sogenannten Parameters des Kegelschnittes; sie kann daher selbst Halbparameter oder halber Parameter genannt werden.

Zu möglichst einfachen Gleichungsformen müssen wir gelangen, wenn wir über die Grösse h so verfügen, dass dadurch eines der beiden ersten Glieder auf der rechten Seite von Nr. 3) in Wegfall kommt. Es kann dies auf dreifache Weise erreicht werden, nämlich durch die Substitutionen: $h(1+\varepsilon) = d$, $d = h(1-\varepsilon)$ und endlich $d = h(1-\varepsilon^2)$.

Setzen wir zunächst $h(1+\varepsilon) = d$, also $h = \frac{d}{1+\varepsilon}$, so geht die Gleichung 3) in die folgende über:

$$y^2 = 2d\varepsilon x - (1-\varepsilon^2)x^2,$$

oder mit Benutzung von 5) in

$$7) \qquad y^2 = 2px - (1-\varepsilon^2)x^2.$$

Aus dem hierbei zu Grunde gelegten Werthe von h folgt für jedes zwischen den Grenzen 0 und ∞ gelegene ε die Ungleichung $h < d$. Der neue Coordinatenanfang liegt daher zwischen Directrix und Brennpunkt; ausserdem ist er aber noch ein Punkt des Kegelschnittes selbst, weil in Nr. 7) x und y gleichzeitig zu Null werden, der Anfangspunkt also der Kegelschnittsgleichung Genüge leistet. Wir nennen diesen Punkt A (Fig. 26) Scheitel der Kegelschnittsachse, wonach die Gleichung 7) den Namen Scheitelgleichung erhalten kann. Die Zusammenstellung mit der in §. 9 unter 3) gefundenen Scheitelgleichung des Kreises lässt den Kegelschnitt in einen Kreis mit dem Radius p übergehen, wenn $\varepsilon = 0$ gesetzt wird; der Kreis kann demnach als ein Grenzfall der Kegelschnitte aufgefasst werden. — Bezeichnen wir noch den Abstand AF des Brennpunktes vom Scheitel mit f, so entsteht aus $f = d - h$ das Resultat $f = \frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon}$ oder

$$8) \qquad f = \frac{p}{1+\varepsilon}.$$

Für $\varepsilon = 0$ wird daher im Kreise $f = p$, und, da p in diesem Falle Radius war, so trifft der Brennpunkt mit dem Mittelpunkte zusammen. Die Directrix rückt dagegen in unendliche Entfernung, wie

sich sogleich zeigt, wenn man in der aus Nr. 5) folgenden Gleichung $d = \frac{p}{\varepsilon}$ für ε den Werth 0 einsetzt.

Die zweite zur Vereinfachung von Nr. 3) dienende Substitution $d = h\ (1 - \varepsilon)$ oder $h = \frac{d}{1 - \varepsilon}$ führt zu einer Gleichung, welche mit Ausnahme des Vorzeichens von $2px$ mit Nr. 7) vollkommen übereinstimmt. Diese Substitntion lässt aber nicht eine allgemeine Anwendbarkeit zu, weil sie für $\varepsilon = 1$ einen unendlichen Werth von h oder eine Verschiebung des Coordinatenanfanges ins Unendliche erfordern würde. Für die beiden noch übrig bleibenden Fälle $\varepsilon < 1$ und $\varepsilon > 1$ zeigen sich hierbei zugleich Formverschiedenheiten darin, dass im ersteren Falle h grösser als d wird, im zweiten dagegen einen negativen Werth annimmt. — Zu ganz ähnlichen Bemerkungen giebt die Substitution $d = h\ (1 - \varepsilon^2)$ Veranlassung, mittelst deren das zweite Glied von Nr. 3) in Wegfall gebracht werden kann. Für $\varepsilon = 1$ bleibt sie unanwendbar, weil dann h unendlich wird; für $\varepsilon < 1$ wird eine Verschiebung des Coordinatenanfanges von der Leitlinie weg über den Brennpunkt hinaus, für $\varepsilon > 1$ dagegen nach der dem Brennpunkte entgegengesetzten Seite hin bedingt. Die Kegelschnitte zerfallen hiermit in drei verschiedene Formen, welche die Namen Parabel, Ellipse und Hyperbel führen, je nachdem $\varepsilon = 1$, $\varepsilon < 1$ oder endlich $\varepsilon > 1$.

§. 14.

Specielle Gleichungen für die drei Kegelschnittslinien.

I. Die Parabel. Die Fundamentaleigenschaft, aus welcher die Kegelschnitte zur Entstehung gelangten, geht, wenn $\varepsilon = 1$ gesetzt wird, in Gleichheit der Entfernungen jedes Parabelpunktes von Directrix und Brennpunkt über. Der Scheitel kommt hierbei in die Mitte zwischen Brennpunkt und Directrix zu liegen, und es finden überhaupt nach 5) und 8) des vorhergehenden Paragraphen für die daselbst eingeführten beständigen Grössen die Relationen

$$1)\qquad p = d, \qquad f = \frac{p}{2}$$

statt. Wählen wir ferner den Scheitel zum Coordinatenanfange,

so ergiebt sich mit Beibehaltung der früheren X-Achse nach Nr. 7) als Gleichung der Parabel für rechtwinklige Coordinaten

$$2)\qquad y^2 = 2px.$$

Nach dieser Gleichung wird y für jedes negative x imaginär, während dagegen allen positiven Werthen von x reelle y zugehören. Bezeichnet man zwei Parabelpunkte mit xy und $x_1\ y_1$, so folgt aus den Gleichungen

$$y^2 = 2px \text{ und } y_1^2 = 2px_1$$

die Proportion:

$$x : x_1 = y^2 : y_1^2,$$

d. h. *die Abscissen sind den Quadraten der Ordinaten proportional.* Die y wachsen also gleichzeitig mit den x, jedoch in einem schwächeren Verhältnisse. Durch Verbindung dieser Eigenschaft mit der früher schon bewiesenen Symmetrie aller Kegelschnitte in Beziehung auf die Achse erhält die Parabel die Gestalt der Curve LAL' (Fig. 27), so dass sie zu beiden Seiten der Achse AX ins Unendliche verläuft. A stellt hierbei den Scheitel und F den Brennpunkt dar. Die Leitlinie würde in einem mit AF gleichen Abstande rückwärts von A senkrecht gegen die Achse gelegen sein.

Fig. 27.

II. *Die Ellipse.* Sobald $\varepsilon < 1$, kann in Nr. 3) des vorigen Paragraphen die Substitution $h = \frac{d}{1-\varepsilon^2}$ angewendet werden. Die Gleichung der Ellipse erlangt hierdurch die Form:

$$y^2 = \frac{d^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} - (1-\varepsilon^2)\,x^2$$

oder mit Einführung des Halbparameters und geänderter Ordnung der Glieder

$$3)\qquad (1-\varepsilon^2)\,x^2 + y^2 = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}.$$

Da diese Gleichung sowohl für x als y rein quadratisch ist, so hat die Ellipse in Beziehung auf beide Coordinatenachsen eine symmetrische Form, besteht demnach aus vier congruenten Quadranten. Der hierbei vorausgesetzte Coordinatenanfang führt den Namen: *Mittelpunkt* der Ellipse und liegt in dem Abstande $\frac{d}{1-\varepsilon^2}$ von der Directrix, also, da dieser Werth nothwendig grösser als d ist,

über den zugeordneten Brennpunkt hinaus. Bezeichnen wir die Entfernung des Mittelpunktes vom Brennpunkte — die sogenannte lineare Excentricität — mit c, so folgt aus der Relation $c = h - d$ mit Benutzung der Constanten p die Gleichung:

$$4) \qquad c = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}.$$

Wird ferner der Abstand des Mittelpunktes vom Scheitel gleich a gesetzt, so ist mit Beibehaltung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen $a = c + f$, und mit Substitution der Werthe von c und f (vergl. §. 13. Nr. 8) nach einfacher Reduction

$$5) \qquad a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}.$$

Bei Anwendung dieser Gleichung und der daraus folgenden

$$\frac{p}{a} = 1 - \varepsilon^2$$

geht Nr. 3) oder die Mittelpunktsgleichung der Ellipse über in:

$$\frac{p}{a} \cdot x^2 + y^2 = ap,$$

und hieraus entsteht, wenn man auf beiden Seiten durch ap dividirt,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{ap} = 1.$$

Bezeichnen wir endlich die mittlere Proportionale zwischen a und p mit b, oder gebrauchen die Relation

$$6) \qquad b^2 = ap,$$

so erlangt die Ellipsengleichung die höchst symmetrische Form:

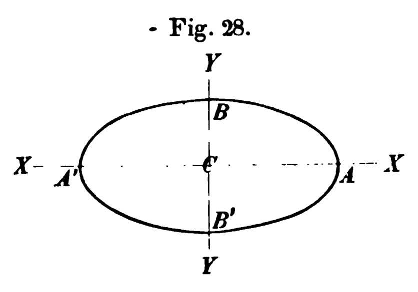
$$7) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Hieraus folgen für reelle Werthe der Coordinaten die Bedingungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \leqq 1, \qquad \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqq 1,$$

wonach die Abscissen aller Ellipsenpunkte zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$, die Ordinaten zwischen $-b$ und $+b$ enthalten sind. Beschränken wir uns auf den elliptischen Quadranten, in welchem x und y positiv sind, und von welchem mit Rücksicht auf die Symmetrie gegen beide Achsen die übrigen drei Quadranten getreue Abbilder gewähren, so gehören der Gleichung zufolge wachsenden x abnehmende y zu. Die Ellipse zeigt sich daher als

Fig. 28.



geschlossene Curve in der Gestalt von Fig. 28. Für $x=0$ und $y=0$ finden sich $x=\pm a$ und $y=\pm b$ als Coordinaten der in den Achsen gelegenen Punkte A, A', B und B', der sogenannten Achsenscheitel. Die Strecken $AA'=2a$, $BB'=2b$ führen die Namen grosse und kleine Achse der Ellipse, die Constanten a und b stellen also die beiden Halbachsen dar. Zu der Berechtigung, zwischen den beiden Achsen einen Gegensatz der Grösse festzustellen, gelangt man mittelst der beiden Gleichungen 5) und 6), aus denen die Ungleichung

$$a > b > p$$

folgt. Nur wenn $\varepsilon = 0$, d. h. wenn die Ellipse in einen Kreis übergeht, werden diese drei Werthe unter sich gleich.

Zwischen den bei den vorhergehenden Gleichungen eingeführten beständigen Grössen finden noch einige Relationen statt, welche zur Herleitung von Eigenschaften der Ellipse benutzt werden können. Dividirt man zunächst die obige Gleichung 4) durch 5), so entsteht:

$$8) \qquad \varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Die Constante ε erhält hiermit die Eigenschaft, die lineare Excentricität als Bruchtheil der grossen Halbachse darzustellen, weshalb man ihr den Namen numerische Excentricität verleiht. Zugleich zeigt sich aber mit Rücksicht auf die frühere Bedeutung von ε, dass zwischen der grossen Halbachse einer Ellipse und ihrer linearen Excentricität dasselbe Verhältniss stattfindet, in welchem die Abstände eines beliebigen Punktes dieser Curve von der Leitlinie und dem zugeordneten Brennpunkte stehen.

Aus der Verbindung von 5) und 6) ergiebt sich ferner

$$b^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2)$$

und hieraus mit Benutzung der Relation 8) nach geänderter Ordnung der Glieder:

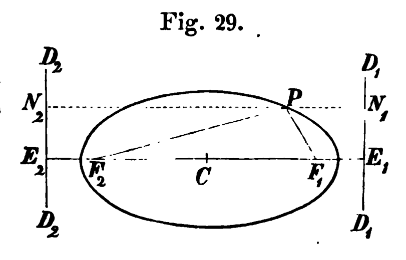
$$9) \qquad a^2 = b^2 + c^2.$$

Die Gleichungen 8) und 9) können dazu dienen, für eine mit ihren Achsen gegebene Ellipse die Lage des Brennpunktes und

er zugeordneten Leitlinie ausfindig zu machen. Nach Nr. 9) giebt ich nämlich vorerst die lineare Excentricität als Kathete eines echtwinkligen Dreieckes zu erkennen, in welchem die beiden Ialbachsen die Hypotenuse und die andere Kathete darstellen; ler Brennpunkt liegt daher in einer der grossen Halbachse glei- hen Entfernung von den Scheiteln der kleinen Achse. Beachtet nan ferner, dass der Abstand eines Scheitels der kleinen Achse von der Directrix mit der Entfernung der letzteren Linie vom Mittelpunkte identisch ist, so folgt, wenn man die oben bei Nr. 8) gefundene Proportionalität auf diese Entfernung anwendet, dass die Distanz zwischen Directrix und Mittelpunkt, die grosse Halbachse und die lineare Excentricität in stetiger Proportion stehen. Nach diesen Bemerkungen gewährt es keine Schwierigkeit, Brennpunkt und Leitlinie zu construiren; man gelangt aber dabei, insofern jede dieser Constructionen zu beiden Seiten der kleinen Achse ausgeführt werden kann, sogleich zu der Wahrnehmung, dass zwei Leitlinien und zwei Brennpunkte vorhanden sein müssen, von denen jedesmal die auf derselben Seite vom Mittelpunkte aus gelegenen einander zugeordnet sind. In der Symmetrie der Ellipse gegen die kleine Achse findet diese Eigenthümlichkeit ihre einfache Erklärung.

Die Existenz zweier Brennpunkte giebt noch zu der folgenden Betrachtung Veranlassung. Sind $D_1 D_1$ und $D_2 D_2$ die beiden Leitlinien der Ellipse in Fig. 29, ferner F_1 und F_2 die zugeordneten Brennpunkte, so gelten in Folge der Eigenschaft, die wir der Entstehung der Kegelschnitte zu Grunde gelegt haben, die beiden Gleichungen:
$PF_1 = \varepsilon . PN_1$, $PF_2 = \varepsilon . PN_2$,
und es folgt hieraus:

Fig. 29.



$$PF_1 + PF_2 = \varepsilon . E_1 E_2.$$

Nach der zwischen Entfernung einer Leitlinie vom Mittelpunkte C, grosser Halbachse und linearer Excentricität stattfindenden stetigen Proportion ist aber $CE_1 = \frac{a^2}{c}$, also $E_1 E_2 = \frac{2a^2}{c} = \frac{2a}{\varepsilon}$, und demnach:

$$PF_1 + PF_2 = 2a.$$

Geben wir dem Abstande eines Kegelschnittspunktes vom Brennpunkte den im Polarsysteme gebräuchlichen Namen Leitstrahl oder Radiusvector, wonach jedem Punkte einer Ellipse zwei Leitstrahlen zugehören, so führt das Vorhergehende zu dem Lehrsatze: Für jeden Ellipsenpunkt ist die Summe der beiden Leitstrahlen unveränderlich gleich der grossen Achse.

III. Die Hyperbel. Ganz ähnliche Beziehungen wie bei der Ellipse finden auch in dem Falle statt, wenn $\varepsilon > 1$, nur dass dadurch eine wesentliche Verschiedenheit der Gestalt bedingt wird. Zunächst kann die Substitution $h = \frac{d}{1 - \varepsilon^2}$ wieder angewendet werden; sie erfordert aber, weil $1 - \varepsilon^2$ negativ ist, eine Rückwärtsverschiebung der Y-Achse um die Strecke $-\frac{d}{\varepsilon^2 - 1}$. Der neue Coordinatenanfang führt auch hier den Namen Mittelpunkt; es zeigt sich aber dabei im Vergleich mit der Ellipse der Unterschied, dass, während dort der Mittelpunkt von der Directrix aus über den Brennpunkt hinaus gelegen war, bei der Hyperbel der Mittelpunkt und Brennpunkt die Leitlinie zwischen sich einschliessen. Behalten wir die bei Untersuchung der Ellipse eingeführten Bezeichnungen bei, so folgt, wenn man mit Berücksichtigung der Lagenverschiedenheit die zur Herleitung von Nr. 4) und 5) angewendeten Rechnungen wiederholt, für die lineare Excentricität oder den Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkte das Resultat:

$$10) \qquad c = \frac{p\,\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1},$$

und für die Entfernung des Mittelpunktes vom Scheitel:

$$11) \qquad a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Dieser letzte Werth kann in die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel eingesetzt werden. Da diese Gleichung ihre Entstehung derselben Substitution verdankt, welche auch bei der Ellipse angewendet wurde, so muss sie mit Nr. 3) vollkommen übereinstimmen; sie wird aber, wenn man negative Glieder vermeiden will, zweckmässiger in der Form

$$(\varepsilon^2 - 1)\,x^2 - y^2 = \frac{p^2}{\varepsilon^2 - 1}$$

geschrieben. Mit Benutzung von Nr. 11) erhält man aus ihr nach einfacher Umgestaltung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{ap} = 1,$$

oder, wenn man wieder eine Hilfsgrösse b einführt, für welche die Relation 6) giltig ist,

$$12) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Aus der Form dieser Gleichung folgt vorerst wieder die Symmetrie der Hyperbel in Beziehung auf die X- und Y-Achse; es besteht also auch diese Curve in Uebereinstimmung mit der Ellipse aus vier unter sich congruenten Quadranten. Dabei ist aber die Gestalt eine durchaus verschiedene, wie sich mittelst der aus Nr. 12) folgenden Bedingungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \geqq 1, \quad \left(\frac{y}{b}\right)^2 < \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

übersehen lässt. Nach der ersten dieser Relationen sind nämlich keine Hyperbelpunkte möglich, wenn

$$+a > x > -a,$$

also bei Uebereinstimmung der Achsen und des Werthes a gerade innerhalb des Raumes, wo sich alle ausserhalb der X-Achse gelegenen Ellipsenpunkte befinden; nur für $y = 0$ fallen beide Curven zusammen und geben $x = \pm a$ für die Abscissen der Achsenscheitel. Die Hyperbel zerfällt hiermit in zwei von einander getrennte, zu beiden Seiten der Y-Achse gelegene Zweige. — Fassen wir ferner von den vier congruenten hyperbolischen Quadranten denjenigen besonders ins Auge, innerhalb dessen beide Coordinaten positiv sind, so wachsen in Folge der unter 12) gefundenen Mittelpunktsgleichung die y gleichzeitig mit den x; dabei ist aber gemäss der Ungleichung $\left(\frac{y}{b}\right)^2 < \left(\frac{x}{a}\right)^2$ immer

$$y < \frac{b}{a}\,x,$$

d. h. die Hyperbelordinaten sind bei übereinstimmendem x kleiner als die y einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden mit der Richtungsconstante $\frac{b}{a}$. Um die gegenseitige Lage der Hyperbel und dieser Geraden näher zu untersuchen, bringen wir die Hyperbelgleichung auf die Form:

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 - y^2 = b^2$$

oder, indem wir linker Hand in Factoren zerlegen:

$$\left(\frac{b}{a}x - y\right)\left(\frac{b}{a}x + y\right) = b^2.$$

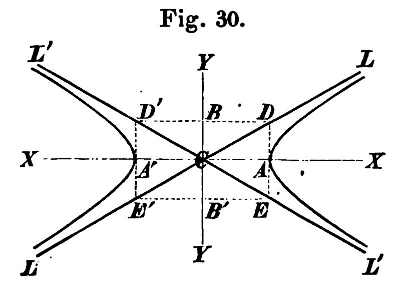
Hieraus folgt für jeden Punkt der in Rede stehenden Hälfte des einen Hyperbelzweiges

$$\frac{b}{a}x - y = \frac{ab^2}{bx + ay}.$$

Der auf der rechten Seite befindliche Quotient giebt für die Differenz von $\frac{b}{a}x$ und y, d. i. für die Ordinatendifferenz der Geraden und Hyperbel Werthe, die sich bei gleichzeitig wachsenden x und y fort und fort verkleinern; ja es kann, wenn man x hinreichend gross wählt und damit auch y entsprechend anwachsen lässt, dieser Unterschied kleiner als jede noch so kleine Grösse werden, ohne doch jemals ganz in Null überzugehen. Eine Gerade, wie die eben untersuchte, an welche sich eine krumme Linie mehr und mehr anschmiegt, ohne doch je mit ihr vollständig zusammenzufallen, heisst eine Asymptote der Curve; die Hyperbel besitzt mit Rücksicht auf ihre Symmetrie gegen die von uns gewählten Coordinatenachsen zwei Asymptoten, die sich im Mittelpunkte schneiden. Die Gleichungen dieser hyperbolischen Asymptoten sind:

13) $$y = +\frac{b}{a}x \text{ und } y = -\frac{b}{a}x.$$

Fig. 30.



In Figur 30 ist eine Hyperbel mit den Asymptoten LL und $L'L'$ dargestellt. Die Gerade $AA' = 2a$ führt den Namen Hauptachse; die durch den Mittelpunkt senkrecht zur Hauptachse gelegte Gerade YY wird die Nebenachse genannt. Unter Länge der Nebenachse versteht man das Doppelte derjenigen Grösse, die wir mit b bezeichnet haben. Diese Länge kann durch eine Gerade $DE = D'E'$ dargestellt werden, welche man durch einen Achsenscheitel parallel zur Nebenachse zwischen den Asymptoten legt.

Nach den Gleichungen der Asymptoten ist nämlich, wenn wir $\angle DCA$ oder die Hälfte des sogenannten Asymptotenwinkels DCE mit γ bezeichnen,

$$14) \qquad \tan\gamma = \frac{b}{a},$$

und hieraus folgt:

$$DA = a \,.\, \tan\gamma = b, \text{ also } DE = 2\,b.$$

Von DE oder $D'E'$ aus wird diese Länge leicht auf die Nebenachse nach BB' übertragen. Zu bemerken ist dabei, dass eine Ellipse mit denselben Halbachsen a und b in das zu dieser Construction benutzte Rechteck $DEE'D'$ völlig eingeschlossen sein würde.

Die Relation $a > b$, welche bei der Ellipse Geltung fand, kommt für die Hyperbel in Wegfall. Es ergiebt sich diese Wahrnehmung unmittelbar aus der Gleichung 11), wonach $a > p$, wenn $\varepsilon^2 < 2$, dagegen $a < p$, wenn $\varepsilon^2 > 2$. Da nun b immer die mittlere Proportionale zwischen a und p darstellt, so muss im ersteren Falle auch $a > b$ und im letzteren $a < b$ sein. Sobald $\varepsilon^2 = 2$, oder $\varepsilon = \sqrt{2}$, werden a, b und p unter sich gleich; die Hyperbel wird dann eine gleichseitige genannt. Aus Nr. 14) folgt ohne Schwierigkeit, dass der Asymptotenwinkel einer gleichseitigen Hyperbel ein rechter sein muss, während er für $a > b$ spitz und für $a < b$ stumpf ist.

Was die übrigen für die beständigen Grössen der Ellipse aufgestellten Beziehungen betrifft, so zeigen zunächst die Gleichungen 10) und 11), dass die Formel

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

auch für die Hyperbel Anwendung findet. Hiermit können aber zugleich die daraus gezogenen Folgerungen übertragen werden. Nur Nr. 9) erleidet eine Abänderung, indem die Verbindung von 6) und 11) zu dem Resultate

$$b^2 = a^2\,(\varepsilon^2 - 1)$$

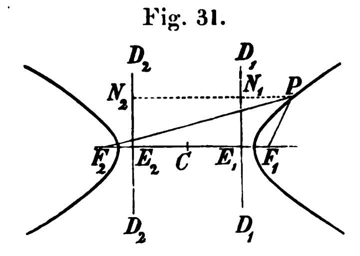
hinführt, woraus mit Einsetzung des Werthes von ε und geänderter Ordnung der Glieder die Relation

$$15) \qquad c^2 = a^2 + b^2$$

hergeleitet wird. $CD = CE$ in Fig. 30 ist daher identisch mit dem Abstande des Brennpunktes vom Mittelpunkte.

In gleicher Weise wie bei der Ellipse gelangen wir auch bei der Hyperbel zu zwei Leitlinien und zwei Brennpunkten, von denen wieder die auf derselben Seite der Nebenachse gelegenen einander zugehören. In Fig. 31 sind diese beiden Leitlinien durch $D_1 D_1$ und $D_2 D_2$ dargestellt, mit den zugeordneten Brennpunkten F_1 und F_2. Bezeichnen wir mit ε die numerische Excentricität, so folgt aus einer ähnlichen Rechnung, wie die zu Fig. 29 bei Untersuchung der elliptischen Leitstrahlen angestellte,

Fig. 31.



$$PF_2 - PF_1 = \varepsilon \,.\, E_1 E_2,$$

und hieraus:

$$PF_2 - PF_1 = 2a.$$

Dies giebt den zur Construction der Hyperbel brauchbaren Lehrsatz: Für jeden Hyperbelpunkt ist die Differenz der beiden Leitstrahlen unveränderlich gleich der Hauptachse.

Die zwischen der Ellipse und Hyperbel stattfindenden Analogien können analytisch auf die Zusammenstellung ihrer Mittelpunktsgleichungen 7) und 12) zurückgeführt werden. Beide Gleichungen werden identisch, sobald man die elliptische Halbachse b in $b\sqrt{-1}$ übergehen lässt. Dadurch ist der Ausspruch gerechtfertigt: die Hyperbel kann als Ellipse mit imaginärer kleiner Achse aufgefasst werden. Um endlich noch eine Vergleichung mit der Parabel zu erlangen, muss man für alle drei Curven die Scheitelgleichung anwenden, weil in der Parabel kein Mittelpunkt vorhanden ist. Bei Benutzung der Beziehungen 5) und 11) entsteht aus Nr. 7) in §. 13 das folgende System von Gleichungen:

$$16) \quad \begin{cases} y^2 = 2px - \dfrac{p}{a}x^2 \\ y^2 = 2px \\ y^2 = 2px + \dfrac{p}{a}x^2 \end{cases}$$

welche in der gewählten Reihenfolge der Ellipse, Parabel und Hyperbel als Gleichungen aus dem Scheitel angehören. Ellipse und Hyperbel gehen nach dieser Zusammenstellung in Parabel über, wenn man a unendlich werden lässt. Die Parabel kann da-

her als eine Ellipse oder Hyperbel mit unendlich grosser Achse betrachtet werden.

Von dem allgemeinen Ueberblicke der drei Hauptformen der Kegelschnitte wenden wir uns in den folgenden Capiteln zu der speciellen analytischen Untersuchung dieser Curven. Wir gehen dabei von der Parabel aus, die insofern für die einfachste dieser drei Linien anzusehen ist, als ihre Gleichung nur von einer Constanten abhängig gemacht werden kann, während für die Ellipse und Hyperbel die Einführung von zwei beständigen Grössen nöthig wird.

Fünftes Capitel.

Die Parabel.

§. 15.

Die Gleichung: $y^2 = 2px$.

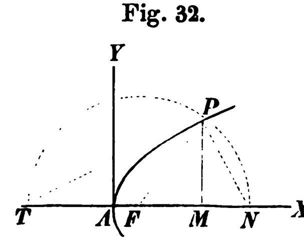
Nachdem wir im vorigen Paragraphen unter I. aus der Gleichung

$$1) \qquad y^2 = 2px$$

bereits die Hauptumrisse der Gestalt für die dadurch repräsentirte Linie — die Parabel — hergeleitet haben, wollen wir jetzt die Gleichung anwenden, um aus ihr die Mittel zur geometrischen Darstellung dieser Curve zu gewinnen.

I. Wird Nr. 1) in eine stetige Proportion aufgelöst, so erscheint y als mittlere Proportionale zwischen $2p$ und x, oder auch zwischen p und $2x$. Jede elementar-geometrische Construction, durch welche die mittlere Proportionale zweier Strecken gefunden wird, ist daher brauchbar, um beliebig viele Punkte einer Parabel zu erlangen, deren Achse, Scheitel und Parameter gegeben sind.

Fig. 32.



Trägt man z. B. aus dem Scheitel A (Fig. 32) die Abscisse AM auf der Achse rückwärts nach AT, macht $MN = p$ und construirt über dem Durchmesser TN einen Halbkreis, so wird die Ordinate PM in einem Parabelpunkte P geschnitten, weil nach einem bekannten Satze PM die mittlere Proportionale zwischen TM und MN bildet. Die besondere Auftragung der Strecke MN kann hierbei noch erspart werden, wenn man beachtet, dass der Mittelpunkt F des beschriebenen

Halbkreises den Brennpunkt der Parabel abgiebt. Der Construction zufolge ist nämlich

$$FT = \tfrac{1}{2}\, TN = x + \tfrac{1}{2} p,$$

folglich, da $AT = x$,

$$AF = \tfrac{1}{2} p.$$

Dieser Werth ist aber nach §. 14 Nr. 1) mit dem Abstande des Brennpunktes vom Scheitel identisch. — Das angegebene Verfahren empfiehlt sich namentlich insofern, als wir später finden werden, dass dabei gleichzeitig in PT und PN die Tangente und Normale des Parabelpunktes P zum Vorschein kommen.

II. Liegt ein Punkt auf zwei Geraden, für welche die Gleichungen

2) $$y = Ax$$

3) $$y = \frac{2p}{A}$$

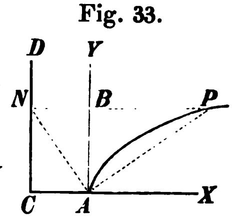
gegeben sind, so gilt für seine Coordinaten auch die aus Multiplication von 2) und 3) entstehende Gleichung:

$$y^2 = 2px;$$

er ist also ein Parabelpunkt. Dies giebt zur folgenden Construction Veranlassung.

Im Abstande $AC = 2p$ vom Scheitel (Fig. 33) errichte man die feste Gerade CD senkrecht zur Achse. Wird dann durch den Scheitel A die Gerade AP in beliebiger Richtung gelegt, hierauf das Perpendikel AN gefällt und zuletzt NP parallel zur Achse AX gezogen, so liegt der Punkt P auf der Parabel.

Fig. 33.



Setzt man nämlich $\angle PAX = \alpha$, also nach der bei der Theorie der Geraden eingeführten Bezeichnung $A = \tan \alpha$, so ist Nr. 2) die Gleichung von AP. Ferner hat man

$$AB = BN \,.\, \cot \alpha = AC \,.\, \cot \alpha,$$

also auch

$$AB = \frac{2p}{A}.$$

Hiernach stellt Nr. 3) die Gleichung der Geraden NP dar, und der Punkt P, für welchen 2) und 3) Geltung finden, genügt den gegebenen Bedingungen.

III. In Betracht, dass

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)+\left(x-\frac{p}{2}\right)=2x$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)-\left(x-\frac{p}{2}\right)=p,$$

kann die Gleichung 1) auch in der Form

$$y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$$

geschrieben werden, wodurch man zu dem Ausdrucke

$$4)\qquad \left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

gelangt. Der linker Hand befindliche Werth giebt die Entfernung des Punktes xy von einem festen Punkte mit den Coordinaten 0 und $\frac{p}{2}$ an, d. i. nach §. 14 Nr. 1) seinen Abstand vom Brennpunkte oder den Leitstrahl. Bezeichnen wir letzteren mit z, so wird aus Nr. 4)

$$z^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

oder, da hier nur positive Grössen in Frage kommen können,

$$5)\qquad z=x+\frac{p}{2}\,*).$$

Wenn man beachtet, dass der Werth $\frac{p}{2}$ in der Parabel auch den Abstand des Scheitels von der Leitlinie darstellt, so wird man leicht sehen, dass diese Relation den analytischen Ausdruck für diejenige Eigenschaft enthält, auf welche wir die Entstehung der Parabel gegründet haben, nämlich für die Gleichheit der Entfernungen jedes Punktes dieser Curve von Directrix und Brennpunkt. Die hieraus herzuleitende Construction von Parabelpunkten mag, da sie durchaus keine Schwierigkeit gewährt, der Selbstübung anheim gegeben werden; wir legen nur noch die Frage vor, ob nicht etwa eine Modification dadurch erzielt werden kann, dass vielleicht, wie bei Ellipse und Hyperbel, mehr als ein Brennpunkt vorhanden ist.

Im allgemeinsten Sinne führt jeder Punkt in der Ebene einer Curve, der im Vereine mit einer zugeordneten Geraden (Directrix)

---

*) Dasselbe Resultat kann in Fig. 32 direct abgelesen werden. Dort ist nämlich $PF=z$, also, da im Kreise alle Radien gleich sind,

$$z=FT=x+\tfrac{1}{2}p.$$

ie Eigenschaft besitzt, dass die Entfernungen jedes Curvenpunktes on diesem festen Punkte und der zugehörigen Directrix in einem onstanten Verhältnisse stehen, den Namen Brennpunkt. Bezeichnen wir seine Coordinaten mit ξ und η und setzen für die Gleichung der Leitlinie

$$y = Ax + b,$$

so muss nach der angegebenen Fundamentaleigenschaft des Brennpunktes die Gleichung der Curve die Form

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \varepsilon^2 \left[\frac{y-(Ax+b)}{\sqrt{1+A^2}}\right]^2$$

annehmen können, wobei ε einen unveränderlichen Factor ausdrückt [vgl. §. 3 Nr. 1) und §. 6 Nr. 7)]. Werden hierin statt A, b und ε zur Abkürzung drei neue Constanten α, β, γ eingeführt, für welche die Relationen

$$\alpha = -\frac{A\varepsilon}{\sqrt{1+A^2}}, \qquad \beta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+A^2}}, \qquad \gamma = -\frac{b\varepsilon}{\sqrt{1+A^2}}$$

giltig sind, so erlangt die Curve mit dem Brennpunkte $\xi\eta$ die Gleichung:

$$6) \qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2$$

oder, wenn man die darin angedeuteten Operationen ausführt und nach Potenzen der Variabeln x und y ordnet,

$$7) \quad \begin{cases} x^2(1-\alpha^2) + y^2(1-\beta^2) - 2\alpha\beta xy \\ \quad - 2x(\xi + \alpha\gamma) - 2y(\eta + \beta\gamma) \\ \quad + \xi^2 + \eta^2 - \gamma^2 = 0. \end{cases}$$

Die Form dieser Gleichung führt uns zu der aus der Entstehung der Kegelschnitte bereits ersichtlichen Bemerkung zurück, dass Brennpunkte nur bei Linien zweiten Grades vorkommen können. Soll nun eine solche Linie zur Parabel werden, so muss Nr. 7) in

$$y^2 = 2px$$

übergehen. Hierzu sind die folgenden Bedingungen nöthig:

$$1-\alpha^2 = 0 \qquad \alpha\beta = 0$$
$$\eta + \beta\gamma = 0 \qquad \xi^2 + \eta^2 - \gamma^2 = 0,$$

welche, da mit Rücksicht auf die beiden ersten dieser Beziehungen

$$\beta = 0$$

sein muss, sich auf

$$\alpha^2 = 1, \qquad \eta = 0 \quad \text{und} \quad \xi^2 = \gamma^2$$

reduciren. Die Relation $\eta = 0$ zeigt, dass Brennpunkte nur in der

Achse der Parabel gelegen sein können. — Mit Einsetzung der vorhergehenden Werthe entsteht aus Nr. 7)

$$y^2 = 2x(\xi + \alpha\gamma)$$

als Gleichung einer Parabel, für welche

$$\xi + \alpha\gamma = p.$$

Wird diese letzte Bedingung mit den oben aufgestellten vereinigt, so gelangt man nach Elimination von α und γ zu dem Resultate:

$$p(p - 2\xi) = 0.$$

Dieser Gleichung kann aber in einer Parabel, deren Halbparameter p von Null verschieden ist, nur genügt werden, wenn

$$\xi = \frac{p}{2}.$$

Die Parabel besitzt demnach nur einen Brennpunkt, nämlich den auf der Achse im Abstande $\frac{p}{2}$ vom Scheitel gelegenen.

§. 16.

Die Parabel und die Gerade.

Legen wir den folgenden Untersuchungen die Gleichung der Parabel wieder in der Form

$$1)\qquad y^2 = 2px$$

zu Grunde, so ist dabei in Uebereinstimmung mit den vorhergehenden Betrachtungen ein rechtwinkliges Coordinatensystem vorausgesetzt, dessen X-Achse mit der Parabelachse zusammenfällt und dessen Anfangspunkt im Scheitel gelegen ist. Was die hierbei angenommene Y-Achse betrifft, so ergiebt sich, wenn wir ihre Gleichung

$$x = 0$$

mit der oben für die Parabel gegebenen verbinden, die Gleichung

$$y^2 = 0,$$

welche zwei gleiche Wurzeln $y = 0$ besitzt. Der Coordinatenanfang, soweit er gleichzeitig auf der Y-Achse und Parabel liegt, ist daher so anzusehen, als wenn er aus zwei zusammenfallenden Punkten bestände, welche beiden Linien gemeinschaftlich sind. Hiermit gewinnt die Y-Achse den Charakter einer Tangente; wir wollen ihr den Namen Scheiteltangente geben.

Gehen wir nach dieser Vorbemerkung zu den möglichen Lagen einer beliebigen Geraden gegen die Parabel über, so soll erstere durch die Gleichung

2) $$y = Ax + b$$,

fixirt sein. Für etwa vorhandene gemeinschaftliche Punkte beider Linien gelten dann die beiden Gleichungen 1) und 2), aus denen, wenn man y eliminirt, für die Abscissen dieser Punkte das Resultat

3) $$A^2 x^2 + 2x(Ab - p) + b^2 = 0$$

entsteht. Die zugehörigen y finden sich aus Nr. 2).

Rücksichtlich der Gleichung 3) müssen wir die beiden Fälle unterscheiden, ob $A = 0$ oder von Null verschieden ist, d. h. ob die Gerade der Parabelachse parallel läuft oder sie schneidet. Im ersteren Falle giebt die Gleichung, weil sie in Beziehung auf x dem ersten Grade angehört, nur eine Wurzel, woraus das Resultat folgt, dass jede der Parabelachse parallele Gerade die Parabel in einem Punkte schneidet. Ist dagegen A von Null verschieden, so behält Nr. 2) ihre quadratische Form; die Parabel und die Gerade haben daher mit Rücksicht auf die Beschaffenheit der Wurzeln dieser Gleichung zwei verschiedene, einen oder besser gesagt zwei zusammenfallende Punkte und endlich keinen Punkt gemein, jenachdem

$$(Ab - p)^2 \gtreqless A^2 b^2.$$

Nach nöthiger Hebung gewinnt dieses Kriterium die Form

$$p(p - 2Ab) \gtreqless 0.$$

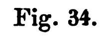
Wenn man hierbei noch beachtet, dass der Parameter $2p$ immer einen wesentlich positiven Werth besitzt, so lässt sich die Unterscheidung der drei erwähnten Fälle davon abhängig machen, ob die Differenz

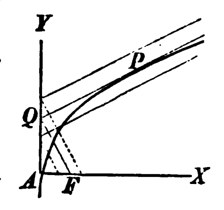
$$\frac{p}{2} - Ab$$

positiv, gleich Null oder negativ ist. Im ersteren Falle hat die Gerade den Charakter einer Secante, im zweiten einer Tangente, im dritten liegt sie mit allen ihren Punkten ausserhalb der Parabel.

Was die geometrische Deutung des angegebenen Merkmales betrifft, so ist für die Tangente PQ (Fig. 34), wenn man mit α den Winkel bezeichnet, welchen die Gerade mit der X-Achse einschliesst,

$$Ab = AQ \,.\, \tan \alpha = AF.$$


Fig. 34.



Beachtet man ferner, dass $\frac{p}{2}$ den Abstand

des Brennpunktes vom Scheitel darstellt, so führt das Obige zu dem Resultate: Fällt man auf eine Gerade in ihrem Durchschnittspunkte mit der Scheiteltangente der Parabel ein Perpendikel, so kann man von der Lage des Punktes, in welchem dieses Perpendikel die Achse trifft, abhängig machen, ob die Gerade die Parabel in zwei Punkten schneiden, in einem Punkte berühren oder keinen Punkt mit ihr gemein haben wird. Der erste, zweite oder dritte Fall tritt ein, jenachdem jener Punkt zwischen Scheitel und Brennpunkt, im Brennpunkte oder jenseits des Brennpunktes gelegen ist. Besonders wichtig ist von diesen drei Fällen der auf Tangenten bezügliche, indem er dazu benutzt werden kann, um bei gegebenem Brennpunkte alle auf Parabeltangenten bezügliche Aufgaben geometrisch zu lösen.

Wir wenden uns zur analytischen Behandlung solcher Aufgaben, wobei wir das Kriterium festzuhalten haben, dass jede Gerade, deren Constanten die Bedingung

$$\frac{p}{2} - Ab = 0$$

oder

$$p = 2Ab \tag{4}$$

erfüllen, eine Tangente darstellt.

Aus Nr. 4) folgt zunächst, wenn die Richtung einer zu ziehenden Tangente gegeben ist,

$$b = \frac{p}{2A}$$

und hieraus für die Gleichung der Berührungslinie selbst:

$$y = Ax + \frac{p}{2A}. \tag{5}$$

Dieses Resultat zeigt, dass in derselben Richtung stets nur eine Parabeltangente möglich ist. Die Construction von 5) führt, wenn man die Grösse $\frac{p}{2A}$ (gleich AQ Fig. 34) geometrisch darstellt, auf das oben für Tangenten festgesetzte Merkmal zurück.

Soll ferner eine Gerade $y = Ax + b$ die Parabel berühren und dabei durch einen festen Punkt $x_1 y_1$ hindurchgehen, so hat man zur Bestimmung der beständigen Grössen A und b die beiden Bedingungen:

$$p = 2Ab, \qquad y_1 = Ax_1 + b.$$

Hieraus entsteht, wenn man b eliminirt, zur Berechnung von A die Gleichung:

• 6) $$2A^2x_1 - 2Ay_1 + p = 0.$$

Die zugehörigen b ergeben sich aus:

7) $$b = y_1 - Ax_1.$$

Mit Rücksicht auf die quadratische Form von Nr. 6) folgt, dass durch den Punkt x_1y_1 zwei Tangenten, eine oder keine möglich sind, jenachdem

$$y_1^2 \gtreqless 2px_1,$$

was, wie man leicht finden wird, darauf hinauskommt, ob der gegebene Punkt ausserhalb der Parabelfläche, auf der Peripherie oder innerhalb gelegen ist.

Soll der Punkt x_1y_1 Berührungspunkt sein, so findet die Gleichung:

8) $$y_1^2 = 2px_1$$

statt. Wird nun Nr. 6) mit p multiplicirt, so entsteht mit Benutzung von 8)

$$A^2y_1^2 - 2Apy_1 + p^2 = 0,$$

und hieraus folgt:

9) $$A = \frac{p}{y_1}.$$

Für die Constante b ergiebt sich aus Nr. 7), wenn man den gefundenen Werth von A einsetzt,

$$b = y_1 - \frac{px_1}{y_1},$$

oder, wenn man auf gleichen Nenner bringt und wieder mit Hilfe von Nr. 8) reducirt:

10) $$b = \frac{px_1}{y_1} = \frac{y_1}{2}.$$

Durch die Substitution der Werthe 9) und 10) in die Gleichung der Geraden erhält man als Gleichung einer Tangente mit dem Berührungspunkte x_1y_1:

11) $$yy_1 = p(x + x_1).$$

Setzt man hierin $y = 0$, so folgt für die Abscisse a desjenigen Punktes, in welchem die Tangente die Parabelachse schneidet,

12) $$a = -x_1.$$

Dieser letzte Werth ist besonders geeignet, um bei gegebenem Berührungspunkte die Tangente zu construiren.

Fig. 35.

Soll z. B. die Parabel im Punkte P (Fig. 35) von einer Geraden berührt werden, so hat man nur, wenn PM die Ordinate dieses Punktes darstellt, $AT = AM$ zu machen und PT zu ziehen, um die Tangente zu erhalten. Bemerkenswerth ist hierbei, dass man, wenn die Abscisse $AM = x$ gesetzt wird, für den Abstand des Punktes T vom Brennpunkte

$$FT = x + \tfrac{1}{2}p$$

erhält, woraus mit Rücksicht auf Nr. 5) des vorhergehenden Paragraphen die Gleichheit von FT und FP, also auch die Gleichheit der Winkel PTF und TPF hervorgeht. Dies giebt den Satz: Die Tangente an einem Parabelpunkte bildet mit der Parabelachse denselben Winkel, wie mit dem Leitstrahle jenes Punktes. Legt man ferner PR parallel zur Achse, so sind nach dem Vorigen auch die Winkel T_1PR und TPF einander gleich. Hierauf beruhen die physikalischen Eigenschaften des Parabelbrennpunktes*).

Ist $x_1 y_1$ ein ausserhalb der Parabel gelegener Punkt, von welchem aus zwei Tangenten gezogen werden können, so lässt sich durch ein ganz ähnliches Räsonnement, wie das zur Herleitung der Gleichung 3) in §. 10 angewendete, nachweisen, dass für diesen Fall Nr. 11) die Gleichung der Berührungssehne darstellt. Bezeichnet man nämlich die Coordinaten eines der beiden Berührungspunkte mit x und y, so findet, da x_1 und y_1 einem Punkte angehören, welcher in der durch xy gehenden Tangente gelegen ist, zwischen x, x_1, y und y_1 nach 11) die Relation

$$13) \qquad yy_1 = p\,(x + x_1)$$

statt, wobei nur x und x_1, y und y_1 ihre Bedeutungen vertauscht haben. Ganz Gleiches gilt auch für den zweiten Berührungspunkt; folglich ist die Gleichung 13), welche als Gleichung ersten Grades zweien mit xy bezeichneten Punkten Genüge leistet, der Ver-

---

*) In einem Hohlspiegel, dessen spiegelnde Fläche durch Rotation einer Parabel um ihre Achse gebildet ist, werden Licht- oder Wärmestrahlen, die parallel zur Achse einfallen, im Brennpunkte vereinigt. Umgekehrt werden solche Strahlen, wenn sie vom Brennpunkte ausgehen, in einer mit der Achse parallelen Richtung reflectirt.

bindungsgeraden dieser beiden Punkte angehörig. Hiernach ist es leicht, die Berührungssehne zu construiren. Man findet, wie bei der Tangente, für die Abscisse ihres Durchschnittspunktes mit der Parabelachse

$$a = -x_1,$$

wodurch einer ihrer Punkte bestimmt ist; ferner für ihre Richtungsconstante

$$A = \frac{p}{y_1},$$

d. h. mit Rücksicht auf Nr. 9): sie läuft mit der Tangente eines Parabelpunktes parallel, dessen Ordinate mit y_1 gleich ist.

N o r m a l e n d e r P a r a b e l. Eine im Parabelpunkte $x_1 y_1$ errichtete Normale hat, weil sie auf der Tangente dieses Punktes senkrecht steht, nach Nr. 6) in §. 6 die Gleichungsform:

$$y - y_1 = -\frac{1}{A}(x - x_1),$$

wobei A die der Tangente zugehörige Richtungsconstante bezeichnet. Mit Substitution des in Nr. 9) gegebenen Werthes von A erhält man hieraus als G l e i c h u n g d e r N o r m a l e:

$$14) \qquad y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Setzt man hierin $y = 0$, so ergiebt sich für die Abscisse ξ des Durchschnittspunktes der Normale und Parabelachse das Resultat:

$$15) \qquad \xi - x_1 = p.$$

Die Differenz $\xi - x_1$, d. i. die auf der Achse zwischen dem Fusspunkte der Ordinate und dem Einfallspunkte der Normale enthaltene Strecke, führt den Namen S u b n o r m a l e*). Mit Einführung dieser Benennung entsteht aus Nr. 15) der Satz: D i e S u b n o r m a l e j e d e s P a r a b e l p u n k t e s i s t b e s t ä n d i g g l e i c h d e m H a l b p a r a m e t e r.

Aus der Gleichheit der Winkel, welche eine Parabeltangente mit Leitstrahl und Achse einschliesst, kann noch auf einfache Weise das Resultat hergeleitet werden, dass die gleiche Eigenschaft auch für die Normale Geltung besitzt.

---

*) In ähnlicher Weise wird die zwischen dem Einfallspunkte der Tangente und dem Fusspunkte der Ordinate auf der Achse gelegene Strecke S u b t a n g e n t e genannt. Ihre Grösse ist in der Parabel nach dem Früheren gleich der doppelten Abscisse des Berührungspunktes.

§. 17.

Fortsetzung.

Durchmesser der Parabel. Wenn man die in Nr. 3) des vorhergehenden Paragraphen für die Abscissen der gemeinschaftlichen Punkte einer Parabel und einer Geraden aufgestellte Gleichung durch A^2 dividirt, so kann diese Gleichung auf die Form

$$1) \qquad x^2 - 2x\left(\frac{p - Ab}{A^2}\right) + \left(\frac{b}{A}\right)^2 = 0$$

gebracht werden. Es ist hierbei vorausgesetzt, dass A von Null verschieden ist, d. h. dass die Gerade nicht mit der Parabelachse parallel läuft. Der ausgeschlossene Fall ist also der, wo die Gerade nur einen Punkt mit der Parabel gemein haben kann.

Angenommen nun, die Gerade schneide die Parabel in zwei Punkten, so wollen wir mit $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ die Coordinaten dieser beiden Durchschnittspunkte bezeichnen. Dann folgt aus 1) nach dem algebraischen Lehrsatze über die Summe der Wurzeln einer quadratischen Gleichung:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p - Ab}{A^2}.$$

Der linker Hand befindliche Werth drückt hier die Abscisse des Mittelpunktes der auf der Geraden abgeschnittenen Parabelsehne aus. Wählen wir für diesen Mittelpunkt die Bezeichnung xy, so dass

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

so besitzen wir zu seiner Bestimmung aus dem Vorigen die beiden Gleichungen:

$$2) \qquad x = \frac{p - Ab}{A^2}, \qquad y = Ax + b.$$

Durch Eliminirung der Constanten b entsteht hieraus:

$$3) \qquad Ay = p.$$

Da diese Gleichung den Ort der Sehnenmitte nur von der Richtung der Sehne (mittelst der Constanten A) abhängig macht, so gilt sie zugleich für die Mittelpunkte aller mit der untersuchten Geraden parallelen Sehnen und giebt als geometrischen Ort dieser Punkte eine zur Parabelachse parallele Gerade. So entsteht der Lehrsatz: In der Parabel liegen die Mitten eines jeden Systemes paralleler Sehnen in einer zur Achse pa-

rallelen Geraden, oder, insofern man einer Geraden den Namen Durchmesser einer Curve giebt, wenn sie die Eigenschaft besitzt, ein System paralleler Sehnen zu halbiren: Alle Parabeldurchmesser laufen mit der Achse parallel. Aus Nr. 3) folgt, wenn die Richtung der Sehnen gegeben ist, für den Abstand des zugehörigen Durchmessers von der Achse:

$$4)\qquad y = \frac{p}{A}.$$

Umgekehrt bildet eine in der Entfernung y gezogene Parallele zur Parabelachse den Durchmesser aller derjenigen Sehnen, welche die Richtungsconstante

$$5)\qquad A = \frac{p}{y}$$

besitzen. Die Uebereinstimmung dieser letzten Gleichung mit Nr. 9) des vorhergehenden Paragraphen zeigt zugleich, dass dieses zugehörige Sehnensystem gleiche Richtung mit derjenigen Geraden hat, welche die Parabel in ihrem Durchschnittspunkte mit dem Durchmesser tangirt.

Die soeben gefundenen Eigenschaften gewähren die Mittel, in einer gegebenen Parabel die Lage der Achse, des Brennpunktes und somit auch der Directrix ausfindig zu machen. Mittelst zweier parallelen Sehnen kann man nämlich einen Durchmesser und eine Tangente construiren; mit Hilfe der letzteren erhält man aber eine den Brennpunkt enthaltende Gerade durch Anwendung des Satzes, dass jede Parabeltangente gleiche Winkel mit dem Leitstrahle ihres Berührungspunktes und einer Parallelen zur Achse einschliesst. Wird dieselbe Construction an einem zweiten Paare paralleler Sehnen wiederholt, so lässt sich hierdurch der Brennpunkt und aus diesem die Achse und die Directrix vollständig bestimmen.

Ein Parabeldurchmesser und die Tangente des in ihm gelegenen Parabelpunktes bilden ein System zusammengehöriger Linien, für welches die Parabelachse und Scheiteltangente den speciellen Fall der senkrechten Lage beider Geraden darstellen. Wählt man daher zwei Gerade der erstgenannten Art zur X und Y-Achse eines schiefwinkligen Coordinatensystems, so muss die für dieses System geltende Gleichung der Parabel die Scheitelgleichung als besonderen Fall in sich schliessen. Mit Anwendung der in §. 4 aufgestellten Transformationsformeln kann man rückwärts von der Scheitelgleichung zu jener allgemeineren gelangen.

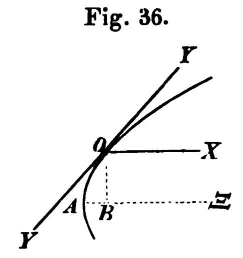


Fig. 36.

Wir wollen hierzu den Coordinatenwinkel YOX in Fig. 36 mit ω bezeichnen, und die auf die Parabelachse $A\Xi$ und den Scheitel bezogenen rechtwinkligen Coordinaten des neuen Anfangspunktes $AB = a$ und $BO = b$ setzen. Dann folgt aus Nr. 5)

$$6) \qquad tan\ \omega = \frac{p}{b}$$

und aus der Scheitelgleichung der Parabel:

$$7) \qquad b^2 = 2ap.$$

Nach Nr. 8) in §. 4 ist beim Uebergange vom ursprünglichen bei allen früheren Untersuchungen angewendeten Coordinatensysteme zu dem neuen das frühere x mit

$$a + x + y\ cos\ \omega$$

und das frühere y mit

$$b + y\ sin\ \omega$$

zu vertauschen, insofern nämlich die in §. 4 angewendeten Winkel α und β hier die Werthe 0 und ω besitzen. Die Scheitelgleichung der Parabel wird hierdurch in die für das neue System geltende Gleichung

$$(b + y\ sin\ \omega)^2 = 2p\,(a + x + y\ cos\ \omega)$$

transformirt, welche nach Ausführung der darin angedeuteten Operationen und geänderter Ordnung der Glieder in die Form

$$y^2 sin^2\ \omega = 2px + 2y\,(p\ cos\ \beta - y\ sin\ \beta) + 2ap - b^2$$

übergeführt werden kann. Beachtet man noch, dass nach Nr. 6) und 7)

$$p\ cos\ \beta - y\ sin\ \beta = 0, \qquad 2ap - b^2 = 0,$$

so bleibt:

$$y^2 sin^2\ \omega = 2px,$$

oder, wenn man beiderseitig durch $sin^2\ \omega$ dividirt:

$$8) \qquad y^2 = 2\,\frac{p}{sin^2\ \omega}\,x.$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach mit der Scheitelgleichung vollständig überein, nur dass die Constante p in die neue beständige Grösse $\frac{p}{sin^2\ \omega}$ übergegangen ist. Alle auf die Form der Scheitelgleichung gestützten Untersuchungen der beiden vorhergehenden Paragraphen können daher, soweit sie von der recht-

winkligen Lage des Coordinatensystemes unabhängig sind, auf das neue System übertragen werden.

Wiederholt man z. B., um nur einen hierher gehörigen Fall auszuheben, der eine constructive Anwendung zulässt, die auf Tangenten bezüglichen Untersuchungen in derselben Weise, wie in §. 16, so kehrt auch die von der Grösse der Constanten p und der rechtwinkligen Lage des Coordinatensystemes unabhängige Relation 12) wieder, nach welcher der Berührungspunkt einer Tangente und ihr Durchschnittspunkt mit der X-Achse gleiche, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Abscissen besitzen. Hierauf kann eine Lösung der Aufgabe gegründet werden, von einem ausserhalb der Parabel befindlichen Punkte Tangenten an die Parabel zu legen. Zieht man nämlich durch diesen Punkt einen Durchmesser, so läuft die Berührungssehne mit der Tangente des Durchschnittspunktes dieses Durchmessers und der Parabel parallel, und zwar ebensoweit von dieser Tangente entfernt, als dieselbe vom gegebenen Punkte absteht.

§. 18.

Die Parabel und der Kreis.

Nach Nr. 4) in §. 9 kann bei Anwendung rechtwinkliger Coordinaten die Gleichung eines jeden Kreises in der Form

$$1) \qquad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + P = 0$$

geschrieben werden, wobei a und b die Mittelpunktscoordinaten bedeuten, P aber die Potenz des Coordinatenanfanges für den Kreis ausdrückt. Kehren wir nun zu dem früheren Coordinatensysteme zurück, dessen Anfang im Scheitel der Parabel lag und dessen X-Achse mit der Parabelachse zusammenfiel, so wollen wir der hierauf bezogenen Gleichung der Parabel durch Reduction auf x die Form

$$2) \qquad x = \frac{y^2}{2p}$$

geben. Für etwa vorhandene gemeinschaftliche Punkte der Parabel und des Kreises entsteht dann durch Substitution des Werthes 2) in 1), wenn man noch ausserdem die ganze Gleichung mit $4p^2$ multiplicirt,

$$3) \qquad y^4 + 4p(p - a)y^2 - 8bp^2y + 4p^2P = 0.$$

Diese Gleichung giebt die Ordinaten der gemeinschaftlichen

Punkte, zu denen die zugehörigen Abscissen aus 2) berechnet werden können.

Die Form von Nr. 3) als einer Gleichung vierten Grades, die höchstens vier reelle Wurzeln besitzen kann, gewährt den Fundamentalsatz: Ein Kreis kann mit einer Parabel höchstens vier Punkte gemein haben. Alle Combinationen von reellen und imaginären, gleichen und ungleichen Wurzeln, die in einer Gleichung vierten Grades zulässig sind, gewähren in gleicher Weise, wie dies bei den Untersuchungen über Parabel und Gerade mit den Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades geschehen ist, bei Anwendung auf Nr. 3) die möglichen Fälle der gegenseitigen Lage, welche zwischen Parabel und Kreis stattfinden können. Wir beschränken uns, da eine derartige allgemeine Untersuchung für eine Gleichung vierten Grades nicht ganz frei von Schwierigkeiten ist, auf den Fall der gleichen Wurzeln, der sich zugleich für Auffindung der Beziehungen zwischen Parabel und Kreis als der wichtigste herausstellt.

Da die Gleichung 3) kein mit der dritten Potenz von y behaftetes Glied enthält, so kann sie vier gleiche Wurzeln in dem einzigen Falle besitzen, wenn alle ihre Glieder mit Ausschluss von y^4 zu Null werden.*) Dies geschieht, wenn

$$a = p, \qquad b = 0, \qquad P = 0$$

gesetzt wird, oder mit Rücksicht auf die Bedeutung der Potenz P (vergl. §. 9 Nr. 5), wenn zu den beiden ersten dieser Relationen die Beziehung

$$r = p$$

hinzutritt, wobei r wie früher den Radius des Kreises bezeichnet. Da nach Einsetzung dieser Werthe Nr. 3) in

$$y^4 = 0$$

übergeht und diese Gleichung mit Hinzuziehung von Nr. 2) einzig durch den Parabelscheitel befriedigt wird, so hat der durch diese Constanten bestimmte Kreis den Scheitel mit der Parabel gemein. Hierbei muss dieser gemeinsame Punkt so angesehen werden, als

---

*) Ist nämlich jede der vier gleichen Wurzeln $= r$, so hat die Gleichung die Form:

$$(y - r)^4 = 0,$$

oder nach Entwickelung des linker Hand befindlichen Ausdruckes:

$$y^4 - 4ry^3 + 6r^2y^2 - 4r^3y + r^4 = 0.$$

Hierin kann ein Glied nur fehlen, wenn $r = 0$ ist; dann kommen aber auch alle Glieder mit Ausschluss des ersten in Wegfall.

wenn er aus vier zusammenfallenden Punkten bestände, welche gleichzeitig auf der Parabel und dem Kreise gelegen sind. Diese innigste Berührung, welche zwischen einer Parabel und einem Kreise vorkommen kann, findet also nur in einem Punkte, nämlich im Scheitel, statt.

In jedem andern Falle kann die Gleichung 3) höchstens drei gleiche Wurzeln enthalten, d. h. die Parabel steht dann mit demjenigen Kreise in der innigsten Berührung, welcher drei zusammenfallende Punkte mit ihr gemein hat. Ein solcher Kreis wird Krümmungskreis, sein Mittelpunkt Krümmungsmittelpunkt, sein Radius Krümmungshalbmesser genannt. Die allgemeine Bedingungsgleichung für den Fall, wo ein Kreis in den Krümmungskreis einer Parabel übergeht, wird gefunden, wenn man das Kriterium aufsucht, von welchem das Vorhandensein dreier gleichen Wurzeln in Nr. 3) abhängig ist. Einfacher jedoch, als auf diesem für elementare Untersuchungen bei Gleichungen höherer Grade nicht ganz bequemen Wege, kann man zur Bestimmung von Krümmungskreisen einer Parabel gelangen, wenn man zunächst den Mittelpunkt eines Kreises sucht, welcher durch drei von einander getrennte Parabelpunkte hindurchgeht, und dann hieraus diejenige Form des Resultates ermittelt, welche sich ergiebt, sobald diese drei Punkte in einen zusammenfallen. Dieselbe Methode kann selbstverständlich in ganz gleicher Weise auch zur Aufsuchung der Krümmungskreise für andere Curven benutzt werden.

Der Mittelpunkt eines durch drei Punkte zu legenden Kreises befindet sich bekanntlich im Durchschnitte der auf den Mitten der Verbindungsgeraden dieser drei Punkte errichteten Senkrechten. Soll daher ein Kreis durch drei Parabelpunkte hindurchgehen, so hat man zur Auffindung seines Mittelpunktes sich zwei Sehnen gezogen zu denken, von denen jede zwischen zweien der gegebenen Punkte gelegen ist, und den gemeinschaftlichen Punkt der auf den Mitten dieser Sehnen stehenden Perpendikel zu suchen. Wir wollen die beiden Sehnenmittelpunkte mit $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ bezeichnen. Nach Nr. 5) des vorigen Paragraphen gehört der ersten von den beiden Sehnen die Richtungsconstante

$$A = \frac{p}{y_1}$$

zu; die im Punkte $x_1 y_1$ darauf senkrechte Gerade hat demnach die Gleichung:

$$4)\qquad y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Eben so findet sich für die zweite Senkrechte:

$$5)\qquad y - y_2 = -\frac{y_2}{p}(x - x_2),$$

und, wenn man aus 4) und 5) y eliminirt, für die Abscisse des gesuchten Kreismittelpunktes:

$$x = p + \frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{y_1 - y_2}$$

oder auch:

$$6)\qquad x = p + x_1 + \frac{y_2(x_1 - x_2)}{y_1 - y_2}.$$

Nach Nr. 9) in §. 5 stellt $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ die Richtungsconstante der durch die Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ gehenden Geraden dar; bezeichnet man daher mit α den Winkel, welchen diese Gerade mit der X-Achse einschliesst, so ist

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = cot\,\alpha,$$

und aus Nr. 6) entsteht:

$$7)\qquad x = p + x_1 + y_2\,cot\,\alpha.$$

Wird endlich dieser Werth von x in der Gleichung 4) eingesetzt, so erhält man für die Ordinate des gesuchten Mittelpunktes:

$$8)\qquad y = -y_1 y_2\,cot\,\alpha.$$

Die in 7) und 8) gefundenen Werthe von x und y behalten noch eine bestimmte Grösse, wenn man die drei Parabelpunkte und damit auch die Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ in einen zusammenfallen lässt; sie gehen dann in die Coordinaten des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes über. Die Verbindungsgerade der Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ wird hierbei zur Parabeltangente; nach Nr. 9) in §. 16 ist demnach in diesem Falle

$$tan\,\alpha = \frac{p}{y_1}$$

zu setzen. Man erhält so für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$x = p + x_1 + \frac{y_1^2}{p}$$

oder mit Benutzung der Parabelgleichung

9) $$x = p + 3x_1$$
und

10) $$y = -\frac{y_1^3}{p^2}.$$

Beachtet man, dass beim Zusammenfallen zweier Curvenpunkte die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte in die Tangente, und die auf der Mitte der zugehörigen Sehne errichtete Senkrechte in die Normale desjenigen Curvenpunktes übergeht, in welchem die beiden anfänglich getrennten Punkte zusammengetreten sind, so wird man leicht bemerken, dass die im Vorigen angewendete Methode darauf hinauskommt, den Durchschnittspunkt zweier unmittelbar benachbarten Normalen zu suchen. In der That zeigt auch die Vergleichung mit Nr. 14) in §. 16, dass die von uns angewendeten Gleichungen 4) und 5) die Gleichungen zweier Normalen in den Parabelpunkten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ darstellen. Wenn hiernach der Krümmungsmittelpunkt allemal in der Normale des zugehörigen Curvenpunktes gelegen sein muss, so genügt es zu seiner constructiven Darstellung, eine seiner beiden Coordinaten zu kennen, oder noch besser, sogleich die Länge des Krümmungshalbmessers ausfindig zu machen.

Wird wie im Vorigen mit xy der einem Curvenpunkte $x_1 y_1$ zugehörige Krümmungsmittelpunkt bezeichnet, so gilt für den Krümmungshalbmesser ϱ, welcher die Entfernung dieser beiden Punkte misst, die Gleichung:

11) $$\varrho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Mit Einsetzung der in 9) und 10) aufgestellten Werthe von x und y, welche für die Parabel Geltung finden, entsteht hieraus:

$$\varrho^2 = (p + 2x_1)^2 + \left(y_1 + \frac{y_1^3}{p^2}\right)^2,$$

und hieraus wieder mit Benutzung der Parabelgleichung nach einfacher Reduction:

$$\varrho^2 = \frac{(p^2 + y^2)^3}{p^4},$$

also für den Krümmungshalbmesser selbst:

12) $$\varrho = \frac{(\sqrt{p^2 + y_1^2})^3}{p^2}.$$

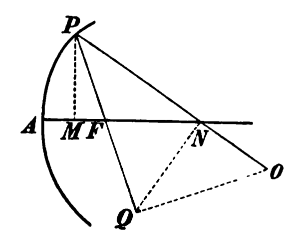
Fasst man im Zähler dieses Werthes p als Subnormale auf, so wird man leicht erkennen, dass $\sqrt{p^2 + y_1^2}$ die zwischen dem Parabelpunkte und der X-Achse enthaltene Strecke der Normale, die

sogenannte Länge der Normale darstellt. Wird dieselbe mit N bezeichnet, so kann Nr. 12) in der Form

13) $$\varrho = N\left(\frac{N}{p}\right)^2$$

geschrieben werden. Dieser Ausdruck gewährt eine sehr einfache Construction des Krümmungshalbmessers. Ist nämlich PM in Figur 37 die Ordinate des Parabelpunktes P und $MN = p$ seine Subnormale, so dass $PN = N$, so wird

Fig. 37.



$$\frac{N}{p} = sec\,MNP,$$

oder auch wegen der Gleichheit der Winkel, welche die Normale mit Leitstrahl und Achse einschliesst,

$$\frac{N}{p} = sec\,NPF.$$

Setzen wir also $\angle NPF = \gamma$, so ist mit Rücksicht auf die Bedeutung von N

$$\varrho = PN\,.\,sec^2\gamma.$$

Wird daher im Punkte N auf der Normale eine Senkrechte NQ errichtet, bis sie den verlängerten Leitstrahl in Q schneidet, so ist

$$PQ = PN\,.\,sec\,\gamma,$$

und, wenn man nachher wieder in Q eine Senkrechte auf PQ zieht, bis sie im Punkte O die Normale trifft, so folgt:

$$PO = PQ\,.\,sec\,\gamma = PN\,.\,sec^2\gamma.$$

PO ist also Krümmungshalbmesser und O Krümmungsmittelpunkt für den Parabelpunkt P.

§. 19.

Die Quadratur der Parabel.

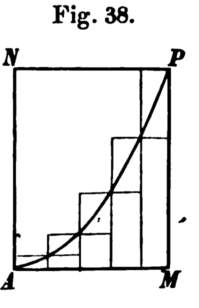
Wenn man in dem rechtwinkligen Coordinatensysteme, welches wir bis jetzt zur Untersuchung der Parabel benutzt haben, die X- und Y-Achse unter einander vertauscht, also die Parabelachse zur Achse der y und die Scheiteltangente zur Achse der x werden lässt, so kann die Gleichung der Parabel in der Form

1) $$y = \frac{x^2}{2p}$$

geschrieben werden, indem bei dieser Vertauschung der Achsen die x und y lediglich ihre Stellen wechseln. Wir machen von

dieser Gleichung Gebrauch zur Bestimmung des Inhaltes der parabolischen Fläche APM (Fig. 38), welche von dem Parabelbogen AP und den Coordinaten des Punktes P, nämlich $AM = x$ und $PM = y$ begrenzt ist. Mit Rücksicht auf das zu Grunde gelegte Coordinatensystem stellt hierbei A den Parabelscheitel dar und die Abscisse AM ist auf der Scheiteltangente gemessen.

Fig. 38.



Theilen wir $AM = x$ in n gleiche Theile und legen durch jeden Theilpunkt eine Ordinate, so zerfällt die gesuchte Fläche in eine gleiche Anzahl von Streifen, von denen jeder über der Basis $\frac{x}{n}$ steht. Die Ordinaten, durch welche diese Streifen begrenzt werden, haben nach Nr. 1) in ihrer Reihenfolge vom Scheitel aus die Längen:

$$\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{2p}, \quad \frac{\left(\frac{2x}{n}\right)^2}{2p}, \quad \frac{\left(\frac{3x}{n}\right)^2}{2p}, \ldots \frac{\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2}{2p}, \quad \frac{\left(\frac{nx}{n}\right)^2}{2p},$$

oder auch:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 y, \quad \left(\frac{2}{n}\right)^2 y, \quad \left(\frac{3}{n}\right)^2 y, \ldots \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 y, \quad y.$$

Jeder einzelne von zwei solchen Ordinaten begrenzte Streifen kann nun in zwei Grenzen eingeschlossen werden, indem man über der Basis $\frac{x}{n}$ ein Mal ein Rechteck mit der Anfangsordinate, ein anderes Mal mit der Endordinate construirt. Ein Rechteck ersterer Art ist seinem entsprechenden Streifen eingeschrieben, besitzt also einen kleineren Inhalt, während das zweite umschriebene Rechteck grösser ist als die zugehörige Streifenfläche. Die Summe aller umschriebenen Rechtecke ist hiernach ebenfalls grösser, die aller eingeschriebenen dagegen kleiner als die gesuchte parabolische Fläche, welche wir F nennen wollen. Hieraus entstehen nach gehöriger Reduction folgende zwei Ungleichungen:

$$F < \left(\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}\right) xy$$

$$F > \left(\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3}\right) xy.$$

Mit Benutzung der Formel

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\text{*)}$$

erhält man:

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right),$$

folglich:

$$\frac{1}{3}xy\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)>F>\frac{1}{3}xy\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right).$$

Beide Grenzwerthe, zwischen denen die Fläche F eingeschlossen ist, nähern sich bei unendlich wachsenden n der gemeinschaftlichen Grenze $\frac{1}{3}xy$, die demnach mit F identisch sein muss. Man hat also

2) $$F=\frac{1}{3}xy$$

und hieraus für die Fläche APN, welche F' heissen mag,

3) $$F'=\frac{2}{3}xy.$$

Eine grössere Verallgemeinerung erlangen die gefundenen Resultate, wenn man die zu ihrer Herleitung benutzte Methode auf das im §. 17 zu Fig. 36 aufgestellte Coordinatensystem überträgt und dabei wieder eine Vertauschung der X- und Y-Achse eintreten lässt.

Man erhält dann aus §. 17 Nr. 8) die Parabelgleichung

4) $$y=\frac{x^2\sin^2\omega}{2p},$$

---

*) Aus der Formel

$$(z+1)^3=z^3+3z^2+3z+1$$

ergiebt sich:

$$z^2=\frac{(z+1)^3-z^3-1}{3}-z.$$

Setzt man hier in der Reihe nach $z=1, 2, 3 \ldots n$ und addirt alle so entstehenden Gleichungen, so folgt:

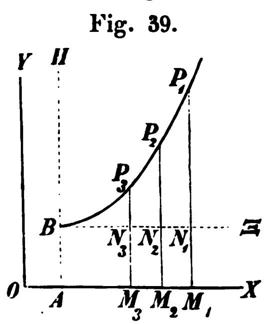
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{(n+1)^3-(n+1)}{3}-\frac{n(n+1)}{2},$$

und hieraus entsteht nach einfacher Reduction die Formel, von welcher oben Gebrauch gemacht wurde.

elche in ähnlicher Weise wie die obige Gleichung 1) angewen-
:t werden kann, um die parabolische Fläche zwischen einem
arabelbogen, der Tangente eines seiner Endpunkte und der durch
:n andern Endpunkt gelegten Parallelen zur Parabelachse zu be-
:chnen. Das Rechteck $AMPN$ in Fig. 38 wird dabei zum schief-
inkligen Parallelogramm, dessen eine Seite AM den Parabelbo-
:n AP berührt, während die andere mit der Achse parallel läuft.
ls Resultat ergiebt sich wie vorher, dass auch hier der Parabel-
›gen den dritten Theil des Parallelogrammes abschneidet.

Die Simpson'sche Regel. Von der obigen Gleichung 2)
sst sich noch Gebrauch machen, um daraus eine allgemeine Me-
ode zur näherungsweisen Berechnung solcher ebenen Flächen
:rzuleiten, welche, über einer gegebenen Abscisse stehend, von
vei rechtwinkligen Ordinaten und einem beliebigen Curvenbogen
:grenzt sind. Hierzu führt folgende Voruntersuchung.

Fig. 39.



In Fig. 39 stellt B den Scheitel einer
ırabel dar, deren Achse BH mit der
-Achse des rechtwinkligen Coordina-
nsystems parallel läuft. Wir stellen
ıs die Aufgabe, die Fläche $M_1 M_3 P_3 P_1$,
e mit S bezeichnet werden mag, mit-
lst der Coordinaten der drei Punkte
, P_2 und P_3 zu berechnen, wobei der
ınkt P_2 so gewählt ist, dass durch seine
rdinate die Strecke $M_1 M_3$ in zwei gleiche
heile getheilt wird. Verschieben wir die Coordinatenachsen pa-
llel zu sich selbst in die Lagen BH und $B\Xi$, und bezeichnen
e Coordinaten eines auf das neue System bezogenen Punktes
it ξ und η, so lautet nach Nr. 1) die Parabelgleichung:

$$5) \qquad \eta = \frac{\xi^2}{2p}.$$

ir den durch die Scheiteltangente $B\Xi$ von der zu berechnenden
äche S abgeschnittenen Theil $N_1 N_3 P_3 P_1 = T$ gilt dann nach 2)
e Formel

$$T = \frac{1}{3}(\xi_1 \eta_1 - \xi_3 \eta_3)$$

er mit Benutzung von Nr. 5):

$$T = \frac{\xi_1^3 - \xi_3^3}{6p},$$

wobei $\xi_1\,\eta_1$ und $\xi_3\,\eta_3$ sich auf die Punkte P_1 und P_3 beziehen. Hieraus folgt, wennn man $M_1M_2 = M_2M_3 = \varepsilon$, also $\xi_1 - \xi_3 = 2\varepsilon$ setzt:

$$T = \frac{\varepsilon\,(\xi_1^2 + \xi_1\,\xi_3 + \xi_3^2)}{3p},$$

oder nach einfacher Umgestaltung:

$$T = \frac{\varepsilon\,[\xi_1^2 + (\xi_1 + \xi_3)^2 + \xi_3^2]}{6p}.$$

Nun ist aber $\frac{\xi_1 + \xi_3}{2} = \xi_2$, d. i. der Abscisse des Punktes P_2 gleich. Mit Wiedereinsetzung der Ordinaten aus Nr. 5) entsteht hiernach:

$$6) \qquad T = \frac{1}{3}\,(\eta_1 + 4\eta_2 + \eta_3).$$

Kehren wir jetzt zum ursprünglichen Coordinatensysteme zurück und setzen

$$OA = a, \qquad AB = b$$
$$M_1P_1 = y_1, \qquad M_2P_2 = y_2, \qquad M_3P_3 = y_3,$$

so ergiebt sich aus Nr. 6)

$$T = \frac{1}{3}\,\varepsilon\,[(y_1 - b) + 4(y_2 - b) + (y_3 - b)]$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$T = \frac{1}{3}\,\varepsilon\,(y_1 + 4y_2 + y_3) - 2b\,\varepsilon.$$

Hieraus folgt, wenn man beiderseitig

Fläche $M_1M_3N_3N_1 = 2\,b\,\varepsilon$

addirt,

$$S = \frac{1}{3}\,\varepsilon\,(y_1 + 4y_2 + y_3).$$

Dieses Resultat bleibt von dem Vorzeichen von b unabhängig, gilt also auch noch dann, wenn der Parabelbogen der X-Achse seine concave Seite zukehrt.

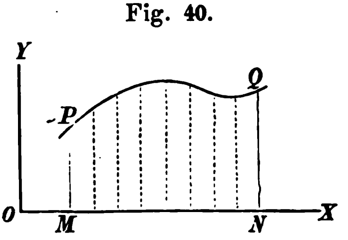
Die vorhergehenden Betrachtungen lassen insofern eine Umkehrung zu, als, wenn drei Punkte in der Lage von P_1, P_2 und P_3 gegeben sind, es immer möglich ist, durch dieselben eine Parabel zu legen, deren Achse den Ordinaten parallel läuft. Unter der gemachten Voraussetzung lautet nämlich nach Nr. 5) die Parabelgleichung

$$y - b = \frac{(x - a)^2}{2p},$$

und, wenn man hierin die Coordinaten der drei Punkte P_1, P_2 und P_3 einsetzt, so erhält man drei Bedingungsgleichungen, aus denen sich die Constanten a, b und p herleiten lassen. Die Rechnung zeigt, dass die gestellte Forderung in dem einzigen Falle einen Widerspruch in sich trägt, wenn die drei Punkte in derselben geraden Linie liegen; doch lässt sich leicht übersehen, dass auch dann noch die Formel 7) ihre Geltung behält. Jedesmal also, wenn man sich durch die Endpunkte der drei um die Strecke ε von einander entfernten Ordinaten y_1, y_2 und y_3 eine Parabel gelegt denkt, ist die Fläche des zwischen y_1 und y_3 enthaltenen Streifens gleich dem Werthe 7).

Hiervon kann Gebrauch zur näherungsweisen Berechnung der Fläche $MNQP$ (Fig. 40) gemacht werden. Zerlegt man die zu bestimmende Fläche, die wir F nennen wollen, durch Ordinaten in eine g e r a d e Anzahl von Streifen, so mag wieder ε die Breite eines jeden solchen Streifens sein, während die auf einander folgenden Ordinaten mit y_0, y_1, $y_2 \ldots y_{2n}$ bezeichnet werden sollen. Man kann jetzt die Bögen, welche drei auf einander folgende Ordinatenendpunkte verbinden, näherungsweise als Parabelbögen ansehen, und erhält dann, wenn man für jedes Streifenpaar einen Ausdruck von der Form 7) aufstellt, durch Summirung aller Streifenpaare nach gehöriger Verbindung der gleichartigen Grössen

Fig. 40.



$$8)\quad F = \frac{1}{3}\varepsilon\,[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{2n-1})$$
$$+ 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{2n-2})].$$

Diese Formel ist unter dem Namen der S i m p s o n'schen R e g e l bekannt und empfiehlt sich in den meisten Fällen durch einen nicht unbeträchtlichen Grad von Genauigkeit.

Sechstes Capitel.

Die Ellipse.

§. 20.

Die Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

Bei Gelegenheit der im §. 14 angestellten allgemeinen Betrachtung der Kegelschnitte haben wir unter Nr. 7) die Gleichung

$$1)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

einer Ellipse angehörig gefunden, deren grosse und kleine Achse $2a$ und $2b$ die Coordinatenachsen darstellen. Die Form dieser Gleichung liess uns bereits die allgemeinen Umrisse der darin repräsentirten Curve erkennen; es bleibt uns noch übrig, das Bild dadurch weiter auszuführen, dass wir der Gleichung die Mittel zur geometrischen Darstellung der Linie entnehmen.

Wird Nr. 1) durch Entfernung der Nenner auf die Form

$$2)\qquad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

gebracht, so lässt sich mit Einsetzung von $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ die Ellipse auf ein Polarcoordinatensystem beziehen, welches den Mittelpunkt zum Pol und die grosse Achse zur polaren Achse hat. Es entsteht nach einfacher Umgestaltung:

$$3)\qquad r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi},$$

oder, wenn wir nach §. 14 Nr. 9 mittelst der Gleichung

$$b^2 = a^2 - c^2$$

die lineare Excentricität c einführen,

$$4)\qquad r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - c^2 \cos^2\varphi}.$$

Beschränken wir uns auf die zwischen den Grenzen 0 und 90° gelegenen Anomalien, was insofern ausreicht, als damit einer der vier unter sich congruenten Ellipsenquadranten vollständig umfasst wird, so erkennen wir hieraus, dass r mit wachsendem φ abnimmt, dass also a und b den grössten und kleinsten elliptischen Radius darstellen. Der vom Mittelpunkte aus mit dem Halbmesser a beschriebene Kreis ist daher der Ellipse umschrieben, der concentrische Kreis mit dem Radius b dagegen eingeschrieben. Beide Kreise werden ausschliesslich der umschriebene und der eingeschriebene Kreis der Ellipse genannt. Kehren wir zum rechtwinkligen Coordinatensysteme zurück, so hat der erstere dieser Kreise die Gleichung

$$5)\qquad x^2+y^2=a^2,$$

der zweite dagegen

$$6)\qquad x^2+y^2=b^2.$$

Aus der Zusammenstellung dieser beiden Gleichungen mit Nr. 1) oder 2) finden wir Mittel zur constructiven Darstellung der Ellipse. Es genügt hierbei vollkommen, wenn wir uns zunächst auf den Quadranten beschränken, in welchem beide Coordinaten positive Werthe besitzen, weil mit Rücksicht auf die Symmetrie der Ellipse gegen beide Achsen die übrigen drei Quadranten getreue Abbilder hiervon enthalten.

Bezeichnen wir die Ordinaten der Ellipse und des umschriebenen Kreises, welche einer und derselben Abscisse angehören, mit y und y', so folgt aus 1) und 5)

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\qquad y'=\sqrt{a^2-x^2},$$

und hieraus wieder

$$7)\qquad y:y'=b:a,$$

d. h. die derselben Abscisse entsprechenden Ordinaten der Ellipse und des umschriebenen Kreises stehen zu einander in dem unveränderlichen Verhältnisse der Halbachsen. Hiernach können beliebig viele Punkte einer Ellipse gewonnen werden, wenn man die auf einem Durchmesser rechtwinkligen Ordinaten eines Kreises in einem constanten Verhältnisse verkürzt.

Bei Vergleichung der Ellipse mit dem eingeschriebenen Kreise sollen x und x'' die derselben Ordinate zugehörigen Abscissen der Ellipse und des Kreises darstellen. Dann ergiebt sich aus 1) und 6)

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}, \qquad x'' = \sqrt{b^2 - y^2},$$

und dies führt zu der Proportion:

8) $$x : x'' = a : b.$$

Die Ellipse kann hiernach gebildet werden, indem man sämmtliche Abscissen des eingeschriebenen Kreises in dem unveränderlichen Verhältnisse der elliptischen Halbachsen verlängert*).

Die im Vorigen enthaltene Vergleichung der Ellipse mit den beiden über ihren Achsen beschriebenen Kreisen führt auf die folgende einfache Construction von beliebig vielen ihrer Punkte, mit gleichzeitiger Anwendung beider Kreise. Zieht man in Fig. 41 den Radius OP', welcher die beiden Kreise in den Punkten P' und P'' schneidet, und legt durch P' die Gerade $P'M$ parallel zur Y-Achse, und $P''N$ durch P'' parallel zur X-Achse, so ist der Durchschnittspunkt P dieser beiden Geraden ein Ellipsenpunkt. Sobald nämlich mit Anwendung der obigen Bezeichnungen

Fig. 41.

$$PN = OM = x, \qquad PM = ON = y,$$
$$P''N = x'', \qquad P'M = y'$$

gesetzt wird, so ergiebt sich aus

$$PM : P'M = OP'' : OP'$$

die Proportion 7), und Nr. 8) aus:

$$OM : P''N = OP' : OP''.$$

Zu bemerken ist hierbei noch, dass die angewendete Construction eine einfache Bestätigung findet, wenn man die Quotienten $\frac{OM}{OP'} = \frac{x}{a}$ und $\frac{ON}{OP''} = \frac{y}{b}$ als trigonometrische Functionen der

---

*) Bekanntlich wird eine Gerade durch geometrische Projection auf eine Ebene im Verhältniss des Cosinus ihres Neigungswinkels gegen diese Ebene verkürzt. Hiermit lassen sich die obigen Vergleichungen der Ellipse und ihres umschriebenen und eingeschriebenen Kreises darauf zurückführen, dass die Ellipse als Projection des umschriebenen Kreises, und der eingeschriebene Kreis als Projection der Ellipse angesehen werden kann. Diese Bemerkung ist insofern von Wichtigkeit, als die Geometrie darin ein Mittel findet, Eigenschaften der Ellipse durch Projection aus entsprechenden Kreiseigenschaften herzuleiten.

gleichen Winkel $P'OM$ und $NP''O$ auffasst. Bezeichnet man jeden dieser Winkel mit α, so ist

$$\frac{x}{a} = \cos\alpha, \qquad \frac{y}{b} = \sin\alpha,$$

und hieraus folgt sogleich für den Punkt P die Ellipsengleichung 1).

Die hierin enthaltene Analogie zwischen der trigonometrischen Gleichung

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

und der Gleichung der Ellipse kann zu einer zweiten Darstellungsweise dieser Curve benutzt werden. Lässt man eine Gerade AB von unveränderlicher Länge mit ihren Endpunkten A und B auf den Schenkeln OY und OX eines rechten Winkels gleiten und beobachtet den Weg, den dabei ein auf der Geraden gelegener fester Punkt P durchläuft, so ist, wenn man $AP = a$, $BP = b$, $OM = PN = x$, $PM = ON = y$ setzt, für jede Lage des Punktes P

Fig. 42.

$$\frac{x}{a} = \cos APN, \qquad \frac{y}{b} = \sin ABO,$$

folglich, da $\angle APN = \angle ABO$,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Der Punkt P beschreibt also eine Ellipse. — Es ist leicht ersichtlich, dass hierbei der beschreibende Punkt auch auf der Verlängerung der unveränderlichen Geraden gelegen sein kann. Die Gerade $A'B'$ in Fig. 42, die mit dem Punkte A' auf der Y-Achse und mit B' auf der X-Achse gleitet, stellt diesen Fall dar. $A'P$ ist hier wieder $= a$ und $B'P = b$ angenommen.

Sowie in §. 15 unter II. die Parabel durch Zerlegung ihrer Gleichung in zwei Factoren ersten Grades mittelst des Durchschnittes von zwei veränderlichen Geraden dargestellt wurde, so lässt sich auch ein ähnliches Verfahren für die Ellipse und überhaupt für jede Linie zweiten Grades anwenden. Haben zwei Gerade die Gleichungen

9)
$$\frac{y}{b_1} = 1 + \frac{x}{a}$$

10)
$$\frac{y}{b_2} = 1 - \frac{x}{a},$$

so gilt für ihren Durchschnitsspunkt auch die durch Multiplication daraus entstehende Gleichung

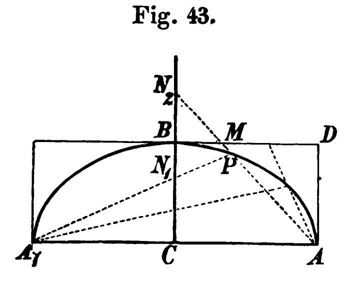
$$\frac{y^2}{b_1 b_2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \text{ oder } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b_1 b_2} = 1,$$

und diese gehört einer Ellipse an, wenn $b_1 b_2 = b^2$ oder wenn die stetige Proportion

11)
$$b_1 : b = b : b_2$$

erfüllt wird. Hierauf gründet sich die folgende Construction.

Fig. 43.



In dem Rechtecke $ACBD$ (Fig. 43), dessen Seiten AC und BC die Halbachsen der zu construirenden Ellipse darstellen, theile man BD und BC in den Punkten M und N_1 so, dass die Proportion

$$DM : BD = CN_1 : BC$$

stattfindet. Legt man hierauf durch den Scheitel A der grossen Achse die Gerade AN_2 und durch den zweiten Scheitel A_1 die Gerade A_1N_1, so ist der Durchschnittspunkt P beider Geraden ein Ellipsenpunkt. Wird nämlich $CN_1 = b_1$, $CN_2 = b_2$ gesetzt und bezeichnen wir wie gewöhnlich die Halbachsen mit a und b, so stellt Nr. 9) die Gleichung der Geraden A_1N_1 und Nr. 10) die von AN_2 dar. Was die dabei zu erfüllende Bedingung 11) betrifft, so gilt der Construction zufolge die Proportion:

$$DM : AC = AD : CN_2.$$

Hieraus entsteht aber, wenn man AC mit der gleichen Strecke BD vertauscht, und die gegebene Relation

$$DM : BD = CN_1 : BC$$

anwendet, die verlangte Bedingung.

Brennpunkte der Ellipse. Soll die Ellipse mittelst ihrer Brennpunkte construirt werden, so entsteht wieder, wie bei der Parabel, die Frage nach der Anzahl und Lage solcher Punkte. Wir haben in §. 15 unter Nr. 6) und 7) gefunden, dass, wenn x und y die Coordinaten eines auf einer Linie zweiten Grades gelegenen Punktes, ξ und η dagegen die eines zugehörigen Brenn-

›unktes darstellen, zwischen diesen Grössen eine Gleichung von ler Form

$$12)\qquad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2=(\alpha x+\beta y+\gamma)^2$$

tattfinden muss, welche nach Ausführung der Rechnung in

$$13)\qquad \left\{\begin{array}{l} x^2(1-\alpha^2)+y^2(1-\beta^2)-2\alpha\beta x y \\ \quad -2x(\xi+\alpha\gamma)-2y(\eta+\beta\gamma) \\ \qquad +\xi^2+\eta^2-\gamma^2=0 \end{array}\right.$$

ibergeht. Damit es möglich ist, diese Gleichung auf die Formen 1) ›der 2) der Ellipsengleichung zurückzuführen, müssen die Belingungen

$$\alpha\beta=0,\qquad \xi+\alpha\gamma=0,\qquad \eta+\beta\gamma=0$$

:rfüllt werden, von denen die erste und zweite, oder die erste und lritte nur dann neben einander bestehen können, wenn entweder ;ugleich $\alpha=0$ und $\xi=0$, oder $\beta=0$ und $\eta=0$ ist. Man sieht iieraus, dass elliptische Brennpunkte nur in einer der beiden \chsen gelegen sein können. Nehmen wir zunächst $\beta=0$ und $\eta=0$, suchen also solche Brennpunkte, die in der X-Achse geegen sind, so ist nach der zweiten der zu erfüllenden Bedingun;en noch $\alpha=-\frac{\xi}{\gamma}$ zu setzen. Mit Substitution dieser Werthe :ann Nr. 13) auf die Form

$$x^2\left(\frac{\gamma^2-\xi^2}{\gamma^2}\right)+y^2=\gamma^2-\xi^2$$

;ebracht werden, woraus sich die Gleichung

$$\frac{x^2}{\gamma^2}+\frac{y^2}{\gamma^2-\xi^2}=1$$

›rgiebt. Dieselbe gehört einer Ellipse an, für deren Halbachsen lie Beziehungen

$$a=\gamma,\qquad b^2=\gamma^2-\xi^2$$

›tattfinden. Durch Verbindung der beiden letzten Relationen entsteht

$$14)\qquad \xi^2=a^2-b^2,$$

oder mit Einführung der linearen Excentricität c:

$$15)\qquad \xi=\pm c,$$

wodurch wir auf die zwei bereits bekannten Brennpunkte der Ellipse zurückkommen.

Für Brennpunkte in der Y-Achse müsste $\alpha=0$ und $\xi=0$ gesetzt und dazu die Bedingung $\beta=-\frac{\eta}{\gamma}$ gefügt werden. Wird

8*

mit Benutzung dieser Grössen die vorhergehende Rechnung wiederholt, so gelangt man durch blose Buchstabenvertauschung zu dem Resultate

16) $$\eta^2 = b^2 - a^2,$$

was, da $a > b$ vorausgesetzt ist, zu imaginären Werthen hinführt. Die Ellipse enthält also nur die beiden in der grossen Achse, zu beiden Seiten des Mittelpunktes im Abstande c gelegenen Brennpunkte.

Bezeichnen wir mit z_1 den Abstand eines Ellipsenpunktes xy von dem auf der Seite der positiven x gelegenen Brennpunkte, so ist in der aus Nr. 12) folgenden Gleichung

$$z_1^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2$$

nach den oben gefundenen Relationen

$$\gamma = a, \qquad \beta = 0, \qquad \alpha = -\frac{\xi}{\gamma} = -\frac{c}{a} = -\varepsilon$$

zu setzen, wobei ε wie früher (vgl. §. 14 Nr. 8) die numerische Excentricität darstellt. Hieraus folgt:

$$z_1^2 = (a - \varepsilon x)^2,$$

und, da für jedes x (also z. B. auch für $x = 0$) nur positive Werthe von z_1 zulässig sind,

17) $$z_1 = a - \varepsilon x.$$

In gleicher Weise findet sich, wenn man $\xi = -c$ nimmt, für den auf den andern Brennpunkt bezogenen Leitstrahl

18) $$z_2 = a + \varepsilon x,$$

und endlich aus der Verbindung von 17) und 18)

19) $$z_1 + z_2 = 2a.$$

So gelangen wir durch die analytische Untersuchung der Ellipsengleichung zu der bereits im §. 14 aus Fig. 29 hergeleiteten Unveränderlichkeit der Summe der Leitstrahlen zurück. Es gewährt durchaus keine Schwierigkeit, dieser Eigenschaft die Mittel zur Construction einer Ellipse zu entnehmen, für welche die grosse Achse und die Brennpunkte gegeben sind.

§. 21.

Die Ellipse und die Gerade.

Für die Coordinaten derjenigen Punkte, welche gleichzeitig in einer Ellipse mit der Gleichung

1) $$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

und einer Geraden

2) $$y = Mx + n$$ *)

gelegen sind, müssen die Gleichungen beider Linien Geltung finden. Durch Elimination von y erhält man hieraus für die Abscissen dieser Punkte:

$$a^2 (Mx + n)^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

oder nach Auflösung der Klammer und besserer Ordnung der Glieder

3) $$x^2 (a^2 M^2 + b^2) + 2 a^2 Mnx + a^2 (n^2 - b^2) = 0.$$

Das y, welches einem jeden hieraus folgenden x zugehört, ist aus Nr. 2) zu berechnen.

Da $a^2 M^2 + b^2$ in einer Ellipse nicht gleich Null sein kann, so ist die Gleichung 3) stets quadratisch, gewährt also rücksichtlich der Beschaffenheit ihrer Wurzeln die bei quadratischen Gleichungen möglichen drei Fälle. Jenachdem also

$$a^4 M^2 n^2 \gtreqless a^2 (n^2 - b^2)(a^2 M^2 + b^2),$$

haben die Gerade und die Ellipse zwei verschiedene, zwei zusammenfallende oder keinen Punkt gemein. Das angegebene Kriterium lässt sich durch einfache Umgestaltung auf die Form

$$a^2 b^2 (a^2 M^2 + b^2 - n^2) \gtreqless 0$$

bringen, wonach, da $a^2 b^2$ immer positiv sein muss, die Unterscheidung der drei Fälle einzig davon abhängt, ob die Differenz

$$a^2 M^2 + b^2 - n^2$$

positiv, gleich Null oder negativ ist. Im ersteren Falle stellt die Gerade eine Secante, im zweiten eine Tangente der Ellipse dar; im dritten sind keine gemeinschaftlichen Punkte vorhanden.

Um dem gefundenen Unterscheidungsmerkmale eine geometrische Deutung abzugewinnen, wollen wir uns zunächst auf den einfachen Fall beschränken, wo die angegebene Differenz gleich Null ist, die Gerade also den Charakter einer Tangente an sich trägt. Das hierfür geltende analytische Kennzeichen

4) $$a^2 M^2 + b^2 = n^2$$

kommt, wenn man mittelst der Gleichung

$$b^2 = a^2 - c^2$$

die lineare Excentricität einführt, auf die Form:

---

*) Um jede Verwechselung mit den Constanten der Ellipse zu vermeiden, ist die Richtungsconstante der Geraden mit M und die Ordinate ihres in der Y-Achse gelegenen Punktes mit n bezeichnet worden.

$$a^2(1+M^2)=c^2+n^2.$$

Bezeichnen wir nun mit α den von der Geraden und der X-Achse eingeschlossenen Winkel, so ist bekanntlich

$$1+M^2=sec^2\alpha,$$

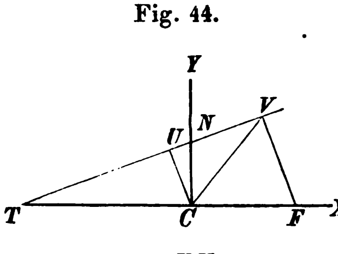
und es entsteht hiermit aus der vorhergehenden Gleichung:

$$a^2 sec^2\alpha=c^2+n^2$$

oder

5) $$a^2=(c\cos\alpha)^2+(n\cos\alpha)^2.$$

Fig. 44.



Um diese Relation zu deuten, ist in Fig. 44 $CF=c$ gesetzt, indem C den Mittelpunkt und F einen Brennpunkt der Ellipse darstellt. TV ist die zu untersuchende Tangente, also $CN=n$. Zieht man CU und FV senkrecht auf TV, so wird

$$UV=c\cos\alpha,\qquad CU=n\cos\alpha;$$

folglich erhält man aus 5)

$$a^2=\overline{UV}^2+\overline{CU}^2=\overline{CV}^2,\qquad a=CV.$$

Der Fusspunkt V des vom Brennpunkte F auf die Tangente gefällten Perpendikels liegt hiernach im Abstande a vom Mittelpunkte der Ellipse, d. i. auf der Peripherie des umschriebenen Kreises.

Untersucht man in gleicher Weise die beiden noch übrigen Fälle, was durch blose Vertauschung der Gleichheits- und Ungleichheitszeichen in den letzten Formeln geschehen kann, so gelangt man leicht zu dem Satze: Eine Gerade schneidet eine Ellipse in zwei Punkten, berührt sie in einem Punkte oder hat keinen Punkt mit ihr gemein, jenachdem der Fusspunkt des von einem Brennpunkte auf die Gerade herabgelassenen Perpendikels innerhalb, auf oder ausserhalb der Peripherie des der Ellipse umschriebenen Kreises liegt. — Durch Umkehrung dieses Satzes kommt man unter Anderem zu dem Resultate, dass, wenn man auf einer Ellipsentangente in den beiden Punkten, worin sie den umschriebenen Kreis schneidet, Senkrechte errichtet, jede dieser Senkrechten durch einen der beiden Brennpunkte hindurchgehen muss.

Tangenten der Ellipse. Die auf Tangenten bezüglichen Fundamentalaufgaben, eine Berührende in gegebener Richtung

oder durch einen gegebenen Punkt an eine Ellipse zu legen, können leicht geometrisch mit Hilfe des umschriebenen Kreises nach dem obigen Lehrsatze gelöst werden. Die analytische Behandlung dieser Aufgaben stützt sich auf die Bedingsgleichung 4), welche das Kriterium für den Fall enthält, in welchem eine Gerade zur Tangente der Ellipse wird.

Soll erstens eine Gerade mit der Richtungsconstante M die Ellipse berühren, so gelten für diesen Fall die Gleichungen

$$y = Mx + n, \qquad a^2 M^2 + b^2 = n^2,$$

aus denen die unbekannte Constante n eliminirt werden kann. Es folgt dann als Gleichung der Tangente bei gegebener Richtung:

$$6) \qquad y = Mx \pm \sqrt{a^2 M^2 + b^2}.$$

Da hierin die Wurzelgrösse nicht zu Null werden kann, so sind nach jeder Richtung hin zwei parallele Tangenten möglich, welche mit Rücksicht auf die Form von Gleichung 6) die Y-Achse zu beiden Seiten des Mittelpunktes in gleichem Abstande durchschneiden. Was die Coordinaten der zugehörigen Berührungspunkte betrifft, so finden sich dieselben aus Nr. 3), wenn man für n die Werthe $\pm \sqrt{a^2 M^2 + b^2}$ substituirt. Führen wir die Abkürzung

$$\sqrt{a^2 M^2 + b^2} = r$$

ein, so treten in Beziehung auf die beiden Berührungspunkte zu Nr. 3) die Relationen:

$$n = \pm r, \qquad a^2 M^2 + b^2 = r^2, \qquad n^2 - b^2 = a^2 M^2.$$

Hiermit geht 3) über in

$$r^2 x^2 \pm 2 a^2 M r x + a^4 M^2 = 0,$$

woraus man

$$7) \qquad x = \mp \frac{a^2 M}{r}$$

erhält. Wird dieser Werth in

$$y = Mx \pm r$$

eingesetzt, so ergiebt sich mit Benutzung der Formel

$$r^2 - a^2 M^2 = b^2$$

nach einfacher Umgestaltung

$$8) \qquad y = \pm \frac{b^2}{r}.$$

Aus 7) und 8) wird leicht hergeleitet, dass die beiden Berührungspunkte in einer durch den Mittelpunkt der Ellipse gehenden Geraden gelegen sind.

Wird zweitens die Forderung gestellt, durch einen gegebenen Punkt $x_1 y_1$ Tangenten an die Ellipse zu legen, so hat man für die Constanten dieser Berührenden die Beziehungen

$$a^2 M^2 + b^2 = n^2, \qquad y_1 = M x_1 + n.$$

Hieraus entsteht durch Elimination von n die Gleichung:

$$a^2 M^2 + b^2 = (y_1 - M x_1)^2,$$

oder nach besserer Ordnung der Glieder:

$$9) \qquad M^2 (a^2 - x_1^2) + 2 M x_1 y_1 + (b^2 - y_1^2) = 0.$$

Die Constante n, welche einem jeden dieser Gleichung genügenden M zugehört, ergiebt sich aus:

$$10) \qquad n = y_1 - M x_1.$$

Die Form von Nr. 9) zeigt, dass durch den gegebenen Punkt entweder zwei Tangenten gelegt werden können, oder nur eine oder endlich keine möglich ist, jenachdem

$$x_1^2 y_1^2 \gtreqless (a^2 - x_1^2)(b^2 - y_1^2)$$

oder auch

$$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 \gtreqless a^2 b^2.$$

Bringt man die hierin enthaltenen Relationen auf die Form

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 \gtreqless 1,$$

so erkennt man leicht, dass die zu unterscheidenden drei Fälle davon abhängen, ob der gegebene Punkt ausserhalb, auf der Peripherie oder innerhalb der Ellipse gelegen ist.

Fassen wir zunächst den Fall ins Auge, wo sich der Punkt $x_1 y_1$ auf der Peripherie befindet, also den Berührungspunkt abgiebt, so erhalten wir aus Nr. 9) auf sehr einfache Weise die Richtung der Tangente, wenn wir vor allen Dingen diese Gleichung mit $a^2 b^2$ multipliciren. In dem hieraus entstehenden Resultate

$$a^2 b^2 M^2 (a^2 - x_1^2) + 2 a^2 b^2 M x_1 y_1 + a^2 b^2 (b^2 - y_1^2) = 0$$

kann nämlich, wenn $x_1 y_1$ Peripheriepunkt ist, nach der Ellipsengleichung 1)

$$b^2 (a^2 - x_1^2) = a^2 y_1^2, \qquad a^2 (b^2 - y_1)^2 = b^2 x_1^2$$

gesetzt werden, und man erhält hieraus:

$$a^4 y_1^2 M^2 + 2 a^2 b^2 x_1 y_1 M + b^4 x_1^2 = 0$$

oder

$$11) \qquad M = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes in Nr. 10) findet sich, wenn man aufs Neue mit Hilfe der Ellipsengleichung reducirt,

$$12)\qquad n = \frac{b^2}{y_1}.$$

Mittelst der in 11) und 12) aufgestellten Constanten ergiebt sich für die Gleichung der durch den Berührungspunkt $x_1 y_1$ gehenden Tangente

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \cdot x + \frac{b^2}{y_1},$$

woraus nach gehöriger Reduction

$$a^2 y y_1 + b^2 x x_1 = a^2 b^2$$

oder

$$13)\qquad \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$$

hergeleitet wird. Für die Abscisse des in der X-Achse gelegenen Punktes, die wir mit m bezeichnen wollen, folgt hieraus:

$$14)\qquad m = \frac{a^2}{x_1}.$$

Die Werthe 12) und 14) sind besonders zur geometrischen Darstellung der Tangente geeignet. Da nämlich m nur von a und x_1 abhängt, so müssen in allen über derselben grossen Achse construirten Ellipsen die Berührenden solcher Punkte, die eine gleiche Abscisse besitzen, die X-Achse in demselben Punkte schneiden; es gilt dies also auch, da die kleine Achse ganz ausser dem Spiele bleibt, für die Tangente im umschriebenen Kreise. In gleicher Weise wird mit Rücksicht auf Nr. 12) die Y-Achse bei gleich bleibender Ordinate der Berührungspunkte von den Tangenten aller über derselben kleinen Achse befindlichen Ellipsen in demselben Punkte geschnitten, also auch von der Tangente im eingeschriebenen Kreise. Hiernach kann die Darstellung der Tangente leicht an die in Fig. 41 enthaltene Construction der Ellipse aus dem umschriebenen und eingeschriebenen Kreise angelehnt werden.

Befindet sich der Punkt $x_1 y_1$, durch welchen Berührende an die Ellipse gelegt werden sollen, ausserhalb der Peripherie, so führt eine gleiche Schlussfolgerung, wie die zur Herleitung von Nr. 3) in §. 10 und Nr. 13) in §. 16 angestellte, zu dem Resultate, dass

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Berührungssehne darstellt. Hiermit kann in ähnlicher Weise, wie es bei den Tangenten geschah, die Berührungssehne in der Ellipse mit den entsprechenden Linien im umschriebenen und im eingeschriebenen Kreise in Zusammenhang gebracht werden.

Normalen der Ellipse. Für die Normale im Ellipsenpunkte $x_1 y_1$ ergiebt sich mittelst der in Nr. 11) gefundenen Richtungsconstante der hierzu senkrechten Tangente die Gleichung:

$$15)\qquad y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Wird hierin $y = 0$ gesetzt, so entsteht, wenn wir die zugehörige Abscisse mit ξ bezeichnen, für die Subnormale der Werth

$$16)\qquad \xi - x_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2},$$

und hieraus für ξ selbst mit Einführung der numerischen Excentricität nach bekannten Reductionsformeln:

$$17)\qquad \xi = \varepsilon^2 x_1.$$

Da die x aller Ellipsenpunkte zwischen den Grenzen $+a$ und $-a$ gelegen sind, so folgt die Relation:

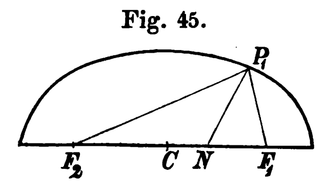
$$\varepsilon^2 a > \xi > -\varepsilon^2 a,$$

oder mit Benutzung der linearen Excentricität:

$$\varepsilon c > \xi > -\varepsilon c.$$

Man wird hieraus leicht ersehen, dass die grosse Achse von jeder Normale zwischen den beiden Brennpunkten und zwar, von der kleinen Achse aus gerechnet, auf derselben Seite geschnitten wird, auf welcher sich der zugehörige Ellipsenpunkt befindet.

Fig. 45.



Sind nun in Fig. 45 F_1 und F_2 die beiden Brennpunkte, ist ferner C der Mittelpunkt der Ellipse und $P_1 N$ die Normale des Punktes P_1, so hat man $\xi = CN$, und hiernach folgt für die Abstände des Punktes N von den beiden Brennpunkten

$$F_1 N = c - \xi = \varepsilon(a - \varepsilon x_1)$$
$$F_2 N = c + \xi = \varepsilon(a + \varepsilon x_1).$$

Mit Rücksicht auf die in §. 20 unter 17) und 18) gefundenen Werthe der Leitstrahlen $F_1 P_1$ und $F_2 P_2$ ist also

$$F_1 N = \varepsilon \,.\, F_1 P_1, \qquad F_2 N = \varepsilon \,.\, F_2 P_2.$$

Dies giebt die Proportion:

18) $$F_1N : F_2N = F_1P_1 : F_2P_2,$$

woraus nach einem bekannten geometrischen Satze geschlossen wird, dass die Normale P_1N den Winkel $F_1P_1F_2$ halbirt*). Man erhält so den Satz: die Normale eines jeden Ellipsenpunktes bildet mit den zugehörigen Leitstrahlen gleiche Winkel. Hieraus ergiebt sich sofort die gleiche Eigenschaft für die Tangente, worauf in ähnlicher Weise, wie bei der Parabel, physikalische Eigenschaften der Brennpunkte gegründet werden. Auch kann hiernach leicht Tangente und Normale construirt werden, sobald die Brennpunkte bekannt sind.

Die Länge der Normale P_1N, die wir mit N bezeichnen wollen, findet sich aus der Formel:

$$N^2 = (x_1 - \xi)^2 + y_1^2.$$

Mit Benutzung des obigen Werthes von ξ und der für x_1y_1 geltenden Ellipsengleichung erhält man hieraus nach einigen Reductionen:

19) $$N^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \varepsilon^2 x_1^2),$$

oder, wenn man für die Leitstrahlen F_1P_1 und F_2P_2 die bereits in §. 20 angewendeten Bezeichnungen z_1 und z_2 gebraucht,

20) $$N^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot z_1 z_2.$$

Hierauf kann eine einfache Formel für die Grösse des Winkels basirt werden, welchen die Normale mit jedem der Leitstrahlen einschliesst. Setzen wir diesen Winkel gleich γ, so folgt aus Fig. 45 nach einem bekannten Dreieckssatze:

$$2P_1N \cdot P_1F_1 \cdot \cos\gamma = \overline{P_1N}^2 + \overline{P_1F_1}^2 - \overline{F_1N}^2,$$

d. i. mit Benutzung der gefundenen Werthe und der eingeführten Bezeichnungen

---

*) Setzt man $\angle F_1P_1N = \gamma_1$, $\angle F_2P_1N = \gamma_2$, $\angle P_1NF_1 = \nu$, so gelten die Proportionen:

$$\sin\gamma_1 : \sin\nu = F_1N : F_1P_1$$
$$\sin\gamma_2 : \sin\nu = F_2N : F_2P_2.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} : 1 = \frac{F_1N}{F_2N} : \frac{F_1P_1}{F_2P_2},$$

also mit Rücksicht auf 18)

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1, \quad \sin\gamma_1 = \sin\gamma_2 \text{ u. s. f.}$$

$$2 N z_1 \cos \gamma = N^2 + z_1^2 - \varepsilon^2 z_1^2.$$

Wenn man nun hierin rechterhand den Werth 20) für N^2 substituirt und ε durch die Halbachsen ausdrückt, so entsteht mit Benutzung des Satzes von der Summe der Leitstrahlen

$$N \cos \gamma = \frac{b^2}{a}$$

oder nach §. 14 Nr. 6)

$$21) \qquad N \cos \gamma = p,$$

wobei p den Halbparameter darstellt. Nach dieser Formel kann der Winkel γ leicht berechnet werden; zugleich ist darin der Lehrsatz enthalten: In der Ellipse giebt die Projection der Normale auf einen Leitstrahl des zugehörigen Peripheriepunktes den Halbparameter*).

§. 22.

Fortsetzung.

Durchmesser der Ellipse. Wir sind berechtigt, die Gleichung 3) des vorigen Paragraphen durch $a^2 M^2 + b^2$ zu dividiren, weil dieser Werth immer von Null verschieden sein muss. Dann entsteht für die Abscissen derjenigen Punkte, welche die in Untersuchung stehende Gerade mit der Ellipse gemein hat, die Gleichung:

$$1) \qquad x^2 + 2x \cdot \frac{a^2 M n}{a^2 M^2 + b^2} + \frac{a^2 (n^2 - b^2)}{a^2 M^2 + b^2} = 0.$$

Angenommen nun, die Ellipse werde von der Geraden in zwei Punkten geschnitten, so soll mit xy der Mittelpunkt der zwischen den beiden Durchschnittspunkten enthaltenen Sehne bezeichnet werden. Sind also x_1 und x_2 die Wurzeln der obigen Gleichung, y_1 und y_2 die dazu gehörenden Ordinaten, so ist

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Mit Rücksicht auf die Summe der Wurzeln von Nr. 1) und auf die Gleichung der Geraden ergiebt sich:

---

*) Da sich dieser Satz unabhängig von der Grösse der elliptischen Achsen zeigt, so muss er auch für die Parabel gelten, von der wir früher gesehen haben, dass sie als Ellipse mit unendlicher grosser Achse aufgefasst werden kann. Ohne alle Rechnung ergiebt sich übrigens dort dieselbe Eigenschaft aus der Grösse der Subnormale mittelst der zu Fig. 37 angestellten Betrachtungen.

2) $$x = -\frac{a^2 M n}{a^2 M^2 + b^2}, \qquad y = Mx + n.$$

Hieraus erhält man durch Elimination von n für die Mitten einer Schaar paralleler Sehnen (mit der gemeinschaftlichen Richtungsconstante M) die Gleichung:

3) $$a^2 y M + b^2 x = 0.$$

Aus der Form dieser Gleichung folgt: **Die Mitten aller parallelen Sehnen einer Ellipse liegen in einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden.** Die Curve besitzt also geradlinige Durchmesser, die sich sämmtlich im Mittelpunkte schneiden, und es kann hiernach dieser Punkt in einer gegebenen Ellipse mittelst des Durchschnittes zweier Geraden construirt werden, von denen jede ein Paar paralleler Sehnen halbirt.

Bringen wir Nr. 3) auf die Form

$$y = -\frac{b^2}{a^2 M} x,$$

so findet sich für die Richtungsconstante des Durchmessers, die wir mit M' bezeichnen wollen, die Gleichung

$$M' = -\frac{b^2}{a^2 M}$$

oder auch:

4) $$MM' = -\frac{b^2}{a^2},$$

d. h. die Richtungsconstanten eines beliebigen Systemes paralleler Sehnen und ihres zugehörigen Durchmessers bilden für jede Ellipse ein unveränderliches Product. Da hierbei, unbeschadet der Richtigkeit der Gleichung, die Factoren M und M' ihre Rollen austauschen können, so folgt, dass, wenn man den Sehnen die Richtung des Durchmessers giebt, letzterer die Richtung der Sehnen annimmt. Legt man also zu den Sehnen, welche von einem Durchmesser halbirt werden, eine Parallele durch den Mittelpunkt, so ist diese Parallele selbst wieder Durchmesser für diejenigen Sehnen, welche mit dem ersten gleiche Richtung haben. Zwei in der angegebenen Weise von einander abhängige Durchmesser heissen zusammengehörige oder **conjugirte Durchmesser.** Einer derselben kann immer in beliebiger Richtung durch den Mittelpunkt der Ellipse gelegt werden; man findet dann den andern, wenn man den Halbirungspunkt einer dazu parallelen Sehne geradlinig mit dem Mittelpunkte verbindet. Zugleich erhellt hier-

aus, dass alle Durchmesser selbst im Mittelpunkte der Ellipse halbirt werden — eine Eigenschaft, die übrigens schon aus der Symmetrie der Curve gegen beide Achsen oder aus der in §. 20 Nr. 3) gefundenen Polargleichung leicht hervorgeht. Hierdurch rechtfertigt sich der Name ‚Mittelpunkt', womit man überhaupt einen Punkt in der Ebene einer Curve dann belegt, wenn in ihm alle hindurch gelegten Sehnen halbirt werden.

Die beiden Achsen der Ellipse sind als ein singulärer Fall der conjugirten Durchmesser zu betrachten, und zwar als der einzige, wo diese Linien senkrecht auf einander stehen. Für jeden andern Fall gilt nämlich, wenn mit α und β die Winkel bezeichnet werden, unter denen beide Durchmesser gegen die Achse der positiven x geneigt sind, nach Nr. 4) die Relation

$$5)\qquad tan\,\alpha\,.\,tan\,\beta = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Bei rechtwinkliger Lage müsste dieses Product zu -1 werden, was nur möglich ist, wenn $b = a$, d. h. wenn die Ellipse in einen Kreis übergeht. — Die Bemerkung, dass die beiden Achsen den einzigen Fall darstellen, in welchem conjugirte Durchmesser einen rechten Winkel einschliessen, gewährt ein einfaches Mittel, in einer Ellipse mit gegebenem Mittelpunkte die Lage der Achsen zu bestimmen. Beschreibt man nämlich über einem Durchmesser einen die Ellipse schneidenden Halbkreis und verbindet den Durchschnittspunkt geradlinig mit den Enden des Durchmessers, so stehen zwei zu diesen Sehnen durch den Mittelpunkt gelegte Parallelen auf einander senkrecht und besitzen zugleich die Eigenschaft conjugirter Durchmesser; folglich sind es die beiden Achsen.

Das in Nr. 5) rechterhand befindliche Vorzeichen weist darauf hin, dass von den Winkeln α und β der eine immer spitz, der andere stumpf sein muss, dass also jeder der beiden Durchmesser zwei andere der vier elliptischen Quadranten durchschneidet. Verstehen wir nun unter α den spitzen dieser beiden Winkel, so ist $\beta - \alpha$ der von der kleinen Achse durchschnittene Winkel, welcher die beiden Durchmesser zu Schenkeln hat. Dann ergiebt sich

$$tan\,(\beta-\alpha) = \frac{tan\,\beta - tan\,\alpha}{1 - tan\,\alpha\,.\,tan\,\beta}$$

oder mit Rücksicht auf Nr. 5) nach einfacher Umformung, wenn wir zugleich mit β' den spitzen Nebenwinkel von β bezeichnen,

$$tan\,(\beta - \alpha) = -\frac{a^2\,(tan\,\alpha + tan\,\beta')}{a^2 - b^2}.$$

Da dieser Werth immer negativ ist, so zeigt sich, dass von den beiden durch die conjugirten Durchmesser begrenzten Nebenwinkeln der stumpfe von der kleinen, der spitze also von der grossen Achse durchschnitten wird.

Die conjugirten Durchmesser lassen sich noch in eine einfache Beziehung zu den Tangenten der Ellipse bringen, wenn man auf Nr. 3) zurückgeht. Reducirt man nämlich auf M, so entsteht:

$$6)\qquad M = -\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

wobei xy als Sehnenmittelpunkt einen Punkt des zugehörigen Durchmessers und M als Richtungsconstante der Sehne die Richtung des conjugirten Durchmessers anzeigt. Da der Durchmesser mit dem Punkte xy durch den Coordinatenanfang geht, so gilt wenn wir mit x_1 und y_1 die Coordinaten eines der beiden Punkte bezeichnen, worin er die Ellipse schneidet, die Proportion

$$x : x_1 = y : y_1,$$

durch deren Anwendung Nr. 6) in die Formel 11) des vorhergehenden Paragraphen übergeführt werden kann. Da durch diese Formel die Richtung der Tangente im Punkte $x_1 y_1$ bestimmt wurde, so folgt der Satz: Jeder Durchmesser der Ellipse läuft parallel mit den Tangenten der in seinem conjugirten Durchmesser gelegenen Ellipsenpunkte*). Hiernach ist es leicht, eine Tangente mittelst des durch ihren Berührungspunkt gehenden Durchmessers zu construiren, indem man die Richtung des hierzu conjugirten Durchmessers ermittelt.

Legt man durch den Mittelpunkt der Ellipse ein schiefwinkliges Coordinatensystem, dessen Achsen mit zwei conjugirten Durchmessern zusammenfallen, so müssen nach der Eigenschaft dieser Linien jedem Werthe der einen Coordinate Doppelwerthe der andern Coordinate von gleicher Grösse und entgegengesetztem Vorzeichen zugehören; die auf dieses System bezogene Gleichung der Ellipse muss daher wieder in Beziehung auf x sowohl, als auf y rein quadratisch sein. Wir können diese Bemerkung durch An-

*) Es gründet sich dies einfach darauf, dass bei paralleler Verrückung der Sehne schliesslich beide Endpunkte zusammenfallen, wodurch die verlängerte Sehne in eine Tangente übergeht.

wendung der Transformationsformeln bestätigen. Sind α und β die Winkel, welche der Reihe nach die neue X- und Y-Achse mit der grossen Achse der Ellipse bilden, so ist beim Uebergange zum neuen Systeme nach §. 4 Nr. 1)

$$x \cos\alpha + y \cos\beta \text{ für } x$$
$$x \sin\alpha + y \sin\beta \text{ „ } y$$

zu setzen. Man erhält dann als Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x \cos\alpha + y \cos\beta}{a}\right)^2 + \left(\frac{x \sin\alpha + y \sin\beta}{b}\right)^2 = 1,$$

und hieraus nach einigen Umformungen

$$x^2 \left(\frac{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}{a^2 b^2}\right) + y^2 \left(\frac{a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta}{a^2 b^2}\right)$$
$$+ 2xy \left(\frac{a^2 \sin\alpha \sin\beta + b^2 \cos\alpha \cos\beta}{a^2 b^2}\right) = 1.$$

Der Zähler des Factors von $2xy$ ist hierbei nach Nr. 5) gleich Null. Gebraucht man daher noch die Abkürzungen:

$$7) \quad \begin{cases} a_1^2 = \dfrac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha} \\ b_1^2 = \dfrac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta}, \end{cases}$$

so bleibt die auf zwei conjugirte Durchmesser bezogene Ellipsengleichung:

$$8) \quad \left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 = 1.$$

Die Vergleichung der Formeln 7) mit der in §. 20 Nr. 3) aufgestellten Polargleichung der Ellipse zeigt, dass hierin a_1 und b_1 die in den Coordinatenachsen gelegenen Halbmesser darstellen. Bestätigt wird diese Bemerkung, wenn wir in Nr. 8) eine der beiden Coordinaten zu Null werden lassen.

Aus der Uebereinstimmung der Form von Nr. 8) mit der auf die beiden Achsen der Ellipse bezüglichen Gleichung dieser Curve folgt, dass alle aus dieser Form entnommenen Schlussfolgerungen, soweit sie von der rechtwinkligen Lage des Coordinatensystems unabhängig sind, auch dann noch Anwendung finden, wenn bei schiefwinkligem Coordinatensysteme die Achsen die Rolle conjugirter Durchmesser spielen. Was z. B. die in §. 20 gegebenen Constructionen der Ellipse betrifft, so kann die in Fig. 43 dargestellte unverändert beibehalten werden, wenn man das mit den Halbachsen gebildete Rechteck gegen ein über zwei conjugirten

Halbmessern beschriebenes Parallelogramm austauscht. Auch alle übrigen Constructionen lassen sich auf die conjugirten Durchmesser übertragen, wenn man anfangs eine Ellipse mit den Halbachsen a_1 und b_1 bildet und dann die den einzelnen Abscissen zugehörigen Ordinaten in die nöthige schiefe Lage überführt. Ebenso behalten die auf Tangenten bezüglichen Entwickelungen, insofern man von der geometrischen Deutung absieht, ihre volle Geltung. Die Gleichung

$$9) \qquad \frac{x x_1}{a_1^2} + \frac{y y_1}{b_1^2} = 1$$

stellt wieder die Gleichung der Tangente im Berührungspunkte $x_1 y_1$ dar, oder gehört der Berührungssehne an, wenn der Punkt $x_1 y_1$ ausserhalb der Ellipse gelegen ist.

Zwischen den Grössen conjugirter Halbmesser finden zwei wichtige Relationen statt, welche aus den in Nr. 7) gegebenen Werthen entlehnt werden können. Bildet man zunächst das Product der rechterhand befindlichen Nenner, so entsteht das Resultat

$$a^4 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + b^4 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + a^2 b^2 (\sin^2 \beta \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha).$$

Fügt man hierzu die sich aufhebenden Glieder

$$+ 2 a^2 b^2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta - 2 a^2 b^2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta,$$

so erlangt das Product die Form

$$(a^2 \sin \alpha \sin \beta + b^2 \cos \alpha \cos \beta)^2 + a^2 b^2 \sin^2 (\beta - \alpha),$$

wovon, da nach Nr. 5)

$$a^2 \sin \alpha \sin \beta + b^2 \cos \alpha \cos \beta = 0$$

ist, nur das letzte Glied übrig bleibt. Wird nun der von den conjugirten Durchmessern eingeschlossene spitze Winkel, den wir Conjugationswinkel nennen wollen, mit ω bezeichnet, so ist

$$\sin (\beta - \alpha) = \sin \omega.$$

Mit Einführung dieses Werthes in das vorhergehende Resultat erhält man durch Multiplication von a_1^2 und b_1^2 in Nr. 7)

$$a_1^2 b_1^2 = \frac{a^2 b^2}{\sin^2 \omega}$$

oder

$$10) \qquad a_1 b_1 \sin \omega = a b.$$

Dies giebt unter Anderem die geometrische Deutung: In einer Ellipse sind alle Parallelogramme, welche entstehen, wenn man die Endpunkte irgend zweier conjugirten Durchmesser verbindet, flächengleich.

Zur Herleitung einer zweiten Relation machen wir zuvor b_1 vom Winkel α abhängig. Drückt man $sin^2 \beta$ und $cos^2 \beta$ in Nr. 7) durch die Tangente aus, so entsteht, wenn man zugleich im Zähler und Nenner mit a^2 multiplicirt,

$$b_1^2 = \frac{a^4 b^2 (1 + tan^2 \beta)}{a^4 tan^2 \beta + a^2 b^2}.$$

Nach Formel 5) kann hierin

$$a^4 tan^2 \beta = b^4 cot^2 \alpha$$

gesetzt werden. Dividirt man dabei noch Zähler und Nenner durch b^2, so ergiebt sich:

$$b_1^2 = \frac{a^4 + b^4 cot^2 \alpha}{a^2 + b^2 cot^2 \alpha},$$

und hieraus:

$$11) \qquad b_1^2 = \frac{a^4 sin^2 \alpha + b^4 cos^2 \alpha}{a^2 sin^2 \alpha + b^2 cos^2 \alpha}.$$

Wird dieser Werth zum Ausdrucke 7) von a_1^2 addirt, so folgt

$$a_1^2 + b_1^2 = \frac{a^4 sin^2 \alpha + a^2 b^2 + b^4 cos^2 \alpha}{a^2 sin^2 \alpha + b^2 cos^2 \alpha}$$

oder auch

$$a_1^2 + b_1^2 = \frac{a^2 sin^2 \alpha (a^2 + b^2) + b^2 cos^2 \alpha (a^2 + b^2)}{a^2 sin^2 \alpha + b^2 cos^2 \alpha}$$

und hieraus endlich:

$$12) \qquad a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2,$$

d. h. in einer Ellipse ist die Summe der Quadrate irgend zweier conjugirten Durchmesser constant.

Die Unveränderlichkeit der Summe $a_1^2 + b_1^2$ zeigt, dass das Product $a_1^2 b_1^2$, also auch $a_1 b_1$ möglichst gross und damit nach Nr. 10) der Sinus des Conjugationswinkels möglichst klein werden muss, wenn die beiden conjugirten Durchmesser gleich lang sind. Mit Rücksicht auf die Ausdrücke 7) findet sich leicht, dass dies nur vorkommen kann, wenn $\beta = 180^0 - \alpha$, d. h. wenn die grosse Achse den Conjugationswinkel halbirt. Aus

$$tan \beta = - tan \alpha \quad \text{und} \quad tan \alpha \, . \, tan \beta = - \frac{b^2}{a^2}$$

folgt dann, wenn wir immer noch unter α den spitzen Winkel verstehen,

$$13) \qquad tan \alpha = \frac{b}{a}.$$

Die Diagonalen eines Rechteckes, dessen Seiten die Tangenten

ler Achsenscheitel bilden, stellen hiernach die **gleichen conjugirten Durchmesser** dar und schliessen den kleinsten in ler Ellipse möglichen Conjugationswinkel ein. Bezeichnen wir nit r einen der gleichen Halbmesser, so ergiebt sich aus 12)

$$14)\qquad r^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

ınd für den zugehörigen **kleinsten Conjugationswinkel** ıus 10)

$$15)\qquad \sin\omega = \frac{2ab}{a^2 + b^2},$$

in Werth, der leicht mittelst der Formel 13) durch Berechnung on $\sin 2\alpha$ verificirt werden kann. — Die auf die gleichen Durchnesser als Coordinatenachsen bezogene Ellipsengleichung lautet ıach 8)

$$16)\qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

st also mit der Mittelpunktsgleichung des Kreises für rechtwinkige Coordinaten identisch, nur dass sie bei der Ellipse für ein inziges Coordinatensystem, und zwar für ein schiefwinkliges, Gelung findet.

Mit Hilfe der Gleichungen 10) und 12) können irgend zwei ler darin enthaltenen fünf Grössen berechnet werden, wenn die lrei anderen gegeben sind; man kann daher z. B. aus zwei nach age und Grösse bestimmten conjugirten Durchmessern die Achen finden. Am leichtesten gelangt man hierbei zum Ziele, wenn nan Summe und Differenz der beiden Halbachsen als Unbekannte etrachtet. Aus der Verbindung der beiden gegebenen Gleichunen entstehen nämlich die Formeln

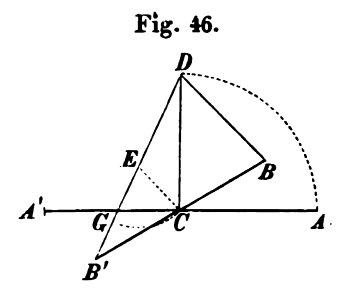
$$(a + b)^2 = a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1 \sin\omega$$
$$(a - b)^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \sin\omega$$

der

$$17)\qquad \begin{cases} (a + b)^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \cos(90^0 + \omega) \\ (a - b)^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \cos(90^0 - \omega). \end{cases}$$

Diese Ausdrücke lassen eine einfache geometrische Darstellung u, da die rechterhand stehenden Werthe als Seiten zweier Dreicke aus zwei mit dem eingeschlossenen Winkel gegebenen Seiten onstruirt werden können. Sind nämlich $AC = A'C = a_1$ und $BC = B'C = b_1$ in Fig. 46 die conjugirten Halbmesser, welche len Conjugationswinkel $ABC = \omega$ einschliessen, so errichte man $CD = AC$ senkrecht auf AA'; dann ist $BD = a - b$ und $B'D = a + b$.

Fig. 46.



Zieht man nun $CE \parallel BD$, so wird $CE = \frac{a-b}{2}$, $DE = \frac{a+b}{2}$, folglich, wenn man $GE = CE$ nimmt, $DG = a$, $B'G = b$.

Ist die Grösse der Achsen gefunden, so kann man die Lage der grossen und damit auch die der kleinen Achse aus einer der Formeln 7) berechnen. Man findet z. B. aus dem Werthe für a_1^2, wenn man Sinus und Cosinus durch Tangente ausdrückt,

$$a_1^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + tan^2 \alpha)}{a^2 tan^2 \alpha + b^2},$$

und hieraus

$$tan^2 \alpha = \frac{b^2 (a^2 - a_1^2)}{a^2 (a_1^2 - b^2)}$$

oder auch

$$18) \qquad tan\, \alpha = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{(a + a_1)(a - a_1)}{(a_1 + b)(a_1 - b)}}.$$

Einfacher gelangt man jedoch constructiv zum Ziele, wenn man mittelst der grossen Achse den umschriebenen Kreis bildet, parallel zu jedem der beiden Durchmesser die Tangenten der Endpunkte des conjugirten Durchmessers legt und dann den Satz benutzt, dass die in den Durchschnitten der Tangenten und des umschriebenen Kreises errichteten Perpendikel durch die Brennpunkte gehen. Mit Hilfe der Brennpunkte ist die Lage der grossen Achse vollständig bestimmt.

§. 23.

Die Krümmungskreise der Ellipse.

Bei Untersuchung der gegenseitigen Lagen einer Ellipse und eines Kreises, deren Gleichungen beiderseits dem zweiten Grade angehören, gelangt man in gleicher Weise, wie bei der entsprechenden auf Parabel und Kreis bezüglichen Betrachtung (§. 18), zu einer Gleichung vierten Grades, aus welcher die gemeinschaftlichen Punkte beider Linien zu entnehmen sind. Der weitere Verfolg dieser Untersuchung führt aber wegen der complicirteren Form der sich hierbei ergebenden Gleichung zu noch grösseren Schwierigkeiten, als bereits die Parabel darbot. Wir wollen uns

aber wie dort auf den praktisch wichtigsten Fall, die Ermittelung er Krümmungskreise, beschränken, wobei wir nach den Ergebissen des §. 18 den Krümmungsmittelpunkt am einfachsten mitelst des Durchschnittes benachbarter Normalen bestimmen.

Nehmen wir die beiden Achsen der Ellipse in der früheren Weise als Coordinatenachsen an, so lautet nach §. 21 Nr. 15) die leichung der Normale im Ellipsenpunkte $x_1 y_1$

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

urch einfache Umgestaltung kommt dieselbe auf die Form:

$$1) \qquad a^2 x y_1 - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2)\, x_1 y_1.$$

ı gleicher Weise findet sich für eine zweite Normale im Punkte $_1 y_2$ die Gleichung

$$2) \qquad a^2 x y_2 - b^2 x_2 y = (a^2 - b^2)\, x_2 y_2,$$

ıs deren Verbindung mit Nr. 1) die Coordinaten des Durchschnits beider Linien zu berechnen sind. Man erhält durch Eliminan von y

$$x = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) x_1 x_2 \left(\frac{y_1 - y_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2}\right),$$

er, wenn wir die numerische Excentricität ε und die Abkürzung

$$m = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}$$

ıführen,

$$x = \varepsilon^2 \left(\frac{x_1 x_2}{m}\right).$$

ıch §. 5 Nr. 11) stellt hierbei m die Abscsisse desjenigen Punkı der X-Achse dar, in welchem sie von der Verbindungsgeraden r Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ geschnitten wird. Lässt man nun, um m Krümmungsmittelpunkte zu gelangen, die Punkte $x_1 y_1$ und y_2 in einen übergehen, so wird die Verbindungsgerade zur ıngente des Punktes $x_1 y_1$, folglich nach §. 21 Nr. 14)

$$m = \frac{a^2}{x_1}.$$

ieraus entsteht für die Abscisse des zu $x_1 y_1$ zugehörigen Krümıngsmittelpunktes der Werth

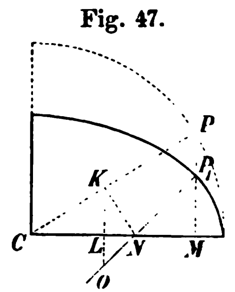
$$3) \qquad x = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2}.$$

eser Ausdruck kann leicht construirt und damit der in der Norıle gelegene Krümmungsmittelpunkt gefunden werden. Nach

§. 21 Nr. 17) ist nämlich $\varepsilon^2 x_1$ die Abscisse des Durchschnittspunktes von Normale und X-Achse, die wir mit ξ bezeichnen. Dann folgt:

$$x = \xi \left(\frac{x_1}{a}\right)^2,$$

Fig. 47.



wobei sich der in der Klammer enthaltene Quotient mittelst des umschriebenen Kreises darstellen lässt. Ist P in Fig. 47 derjenige Punkt dieses Kreises, der mit P_1 die Abscisse $CM = x_1$ gemein hat, so ist, wenn wir $\angle PCM = \alpha$ setzen,

$$\frac{x_1}{a} = \cos \alpha,$$

folglich, wenn $P_1 N$ die Normale in P_1 darstellt,

$$x = CN \,.\, \cos^2 \alpha.$$

Wird daher KN senkrecht auf CP und KO senkrecht auf CM errichtet, so ist $CL = x$, folglich O der gesuchte Krümmungsmittelpunkt.

Substituiren wir den Werth von x in der Gleichung 1) der Normale, so erlangen wir für die Ordinate von O das Resultat

$$y = \frac{\varepsilon^2 y_1 (x_1^2 - a^2)}{b^2}$$

oder, wenn wir mittelst der Ellipsengleichung x_1 durch y_1 ausdrücken,

$$4) \qquad y = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4}.$$

Die Einsetzung von x und y in die Gleichung

$$\varrho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

(vgl. §. 18 Nr. 11) lässt den Krümmungshalbmesser ϱ berechnen. Man erhält, wenn man beide Coordinaten durch x_1 ausdrückt und soweit als möglich reducirt,

$$5) \qquad \varrho^2 = \frac{(a^2 - \varepsilon^2 x_1^2)^3}{a^2 b^2}.$$

Nach §. 21 Nr. 19) ist hierin

$$a^2 - \varepsilon^2 x_1^2 = \frac{a^2 N^2}{b^2},$$

wenn N die Länge der Normale bezeichnet, folglich

$$\varrho^2 = \frac{a^4 N^6}{b^8} = \frac{N^6}{p^4}$$

und

6) $$\varrho = \frac{N^3}{p^2},$$

übereinstimmend mit dem in §. 18 Nr. 13) gefundenen Werthe des Krümmungshalbmessers der Parabel. Beachten wir, dass nach §. 21 Nr. 21 der Ausdruck $\frac{N}{p}$ wie in der Parabel die Secante des von Normale und Leitstrahl eingeschlossenen Winkels bedeutet, so gelangen wir zu dem Resultate, dass die in Fig. 37 enthaltene Construction des Krümmungshalbmessers auch für die Ellipse ungeänderte Anwendung findet.

§. 24.

Die Quadratur der Ellipse.

Auf die in §. 20 Nr. 7) gefundene Proportionalität, welche zwischen den Halbachsen einer Ellipse und den zu gleicher Abscisse gehörenden Ordinaten der Ellipse und des umschriebenen Kreises stattfindet, lässt sich eine Vergleichung der Ellipsenfläche mit der Kreisfläche gründen. Wir theilen zu diesem Zwecke die Abscisse $CM = x$ (Fig. 48) in n gleiche Theile, ziehen durch alle Theilpunkte Ordinaten und construiren mit jeder Ordinate und der Strecke $\frac{x}{n}$ ein umschriebenes Rechteck; dann ist die Summe dieser Rechtecke, welche S heissen möge, grösser als die elliptische Fläche $BCMP = F$. Bezeichnen wir BC mit y_0, und mit $y_1, y_2, y_3 \dots y_n = MP$ der Reihe nach die darauf folgenden Ordinaten, so ist

Fig. 48.

$$S = \frac{x}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}),$$

oder, wenn $B'C = \eta_0, \eta_1, \eta_2 \dots \eta_n = MP'$ die mit $y_0, y_1, y_2 \dots y_n$ zu gleichen Abscissen gehörenden Ordinaten des umschriebenen Kreises ausdrücken,

1) $$S = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{n}(\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \dots \eta_{n-1}).$$

Setzen wir ferner

2) $$S' = \frac{x}{n}(\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{n-1}),$$

so bedeutet, wenn die vorhergehende Construction auf den umschriebenen Kreis übertragen wird, S' die Summe der dort in gleicher Weise wie in der Ellipse gebildeten umschriebenen Rechteckflächen, und stellt eine obere Grenze für die Kreisfläche $B'CMP' = F'$ dar. Aus der Verbindung von 1) und 2) folgt

$$S = \frac{b}{a} \cdot S',$$

oder in Proportionsform

$$3) \qquad S : S' = b : a.$$

Dasselbe Verhältniss muss aber auch zwischen den Flächen F und F' stattfinden, weil mit fortwährender Vergrösserung der Zahl der auf der Abscisse gebildeten Theile schliesslich S mit F und S' mit F' zum Zusammenfallen gebracht werden kann. Bildet man nämlich in der elliptischen Fläche mit der Strecke $\frac{x}{n}$ und den Endordinaten der einzelnen Streifen, worein sie zerlegt wurde, eingeschriebene Rechtecke, so folgt für deren Summe, die s heissen mag, in ähnlicher Weise wie oben das Resultat

$$4) \qquad s = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{n} (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots + \eta_n).$$

Die Vergleichung von 1) und 4) giebt

$$S - s = \frac{b}{a} \cdot \frac{x(\eta_0 - \eta_n)}{n},$$

und dieser Werth kann kleiner als jede beliebige Zahl gemacht werden, wenn man nur n hinreichend gross annimmt. Bei unendlichem Anwachsen der Zahl n fallen also S und s, folglich nach der Ungleichung

$$S > F > s$$

um so mehr S und F zusammen. In gleicher Weise kann unter gleichen Umständen das Zusammenfallen von S' und F' bewiesen werden, und es folgt dann aus Nr. 3)

$$5) \qquad F : F' = b : a,$$

d. h. die über irgend einer Abscisse stehende Ellipsenfläche verhält sich zu der über derselben Abscisse befindlichen Fläche des umschriebenen Kreises wie die kleine Halbachse zur grossen.

Lässt man den Punkt M nach A rücken, so ergiebt sich, wenn wir die Fläche der ganzen Ellipse mit E bezeichnen,

$$\frac{1}{4} E = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{4} a^2 \pi = \frac{1}{4} a b \pi,$$

folglich

6) $$E = a b \pi.$$

Nach §. 22 Nr. 10) entsteht hieraus, wenn a_1, b_1 und ω zwei conjugirte Halbmesser nebst ihrem Conjugationswinkel bedeuten,

7) $$E = \pi a_1 b_1 \sin \omega.$$

Mittelst dieser Formel kann die Ellipsenfläche aus irgend zwei nach Lage und Grösse gegebenen conjugirten Durchmessern berechnet werden.

Siebentes Capitel.

Die Hyperbel.

---

§. 25.

Die Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

Die in der Ueberschrift enthaltene Gleichung

$$1)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

welche durch Multiplication mit $-a^2b^2$ in

$$2)\qquad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

umgeformt werden kann, gehört nach §. 14 Nr. 12) einer Hyperbel an, deren Hauptachse $2a$ mit der X-Achse und deren Nebenachse $2b$ mit der Y-Achse zusammenfällt. So wesentlich sich nun auch diese Curve in ihrer Gestalt von der im vorigen Capitel untersuchten Ellipse unterscheidet, so stehen doch beide Linien rücksichtlich der analytischen Entwickelung ihrer Eigenschaften in der innigsten Beziehung. Da nämlich die Gleichung 1) durch blose Vertauschung von b^2 mit $-b^2$ aus der Gleichung hervorgeht, welche wir der Untersuchung der Ellipse zu Grunde gelegt haben, so befinden wir uns in der günstigen Lage, den grössten Theil der für letztere Curve angestellten Rechnungen mit Anbringung eines einfachen Zeichenwechsels auf die Hyperbel übertragen zu können. Neu treten allein die auf die Asymptoten bezüglichen Betrachtungen auf.

Um den in §. 20 bei der Ellipse benutzten Gang der Untersuchung festzuhalten, wollen wir zunächst die x und y der Gleichung 2) in Polarcoordinaten transformiren, deren Achse mit der

Achse der positiven x identisch ist. Daraus entsteht die Polargleichung

$$r^2 = \frac{-a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi}$$

oder, wenn wir im Zähler und Nenner mit — 1 multipliciren,

$$3) \qquad r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Wird hierin mittelst der aus §. 14 Nr. 15) folgenden Relation

$$b^2 = c^2 - a^2$$

die lineare Excentricität c eingeführt, so ergiebt sich:

$$4) \qquad r^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2 \cos^2 \varphi - a^2}.$$

Die Gleichung 3) zeigt, dass reelle r von endlicher Grösse nur so lange möglich sind, als die Differenz

$$b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi$$

einen positiven Werth giebt. Setzen wir nun nach §. 14 Nr. 14)

$$\frac{b}{a} = \tan \gamma,$$

wobei γ den von einer Asymptote und der Hauptachse gebildeten spitzen Winkel bezeichnet, so folgt nach einfacher Umgestaltung, dass für alle Hyperbelpunkte die Ungleichung

$$\tan^2 \varphi < \tan^2 \gamma$$

gelten muss. Wir werden so zu der bereits bekannten Eigenschaft zurückgeführt, dass beide Zweige der Hyperbel von den Asymptoten umschlossen werden. Spitze Werthe von φ müssen demnach, um einen der vier unter sich congruenten Quadranten der Hyperbel in sich zu fassen, zwischen den Grenzen 0 und γ enthalten sein. Aus Nr. 4) ist dann ersichtlich, dass innerhalb dieser Grenzen r gleichzeitig mit φ wächst, dass also die beiden Achsenscheitel die dem Mittelpunkte am nächsten gelegenen Punkte der Hyperbel darstellen. Ein über der Hauptachse als Durchmesser beschriebener Kreis, den wir Hauptkreis nennen wollen, wird in den Scheiteln von der Hyperbel berührt; alle übrigen Hyperbelpunkte liegen ausserhalb des Hauptkreises.

Der Hauptkreis der Hyperbel tritt an die Stelle des umschriebenen Kreises der Ellipse, kann aber nicht wie dieser zur constructiven Darstellung der Curve benutzt werden. Die Beziehungen, welche zwischen den Ordinaten der Ellipse und ihres umschriebenen Kreises, oder zwischen ihren Abscissen und denen

des eingeschriebenen Kreises stattfanden, gelten hier für zwei gleichseitige Hyperbeln mit den Halbachsen a oder b, in welche die Curve durch Gleichsetzung ihrer Achsen übergeht. Diese beiden gleichseitigen Hyperbeln sind durch die Gleichungen

5) $$x^2 - y^2 = a^2, \qquad x^2 - y^2 = b^2$$

bestimmt; sie können aber nicht wie die beiden Kreise der Ellipse zu einer bequemen Construction von Hyperbelpunkten verwendet werden, weil sie selbst nicht eine wesentlich einfachere Darstellung als alle andern Hyperbeln zulassen.

An die Stelle der trigonometrischen Gleichung

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

deren Analogie mit der Ellipsengleichung zur Auffindung von Ellipsenpunkten gebraucht wurde, tritt hier die Gleichung

$$\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 1,$$

wenn wir $\frac{x}{a} = \sec \alpha$ und $\frac{y}{b} = \tan \alpha$ setzen. Durch Construction der Werthe $x = a \sec \alpha$ und $y = b \tan \alpha$ sind daher, wenn α einen beliebigen Winkel bedeutet, die zusammengehörigen Coordinaten eines Hyperbelpunktes bestimmt. Die Ausführung dieser Construction können wir um so mehr übergehen, als wir später einfachere Mittel zur Darstellung der Hyperbel kennen lernen werden.

Was ferner die in §. 20 Nr. 9) und 10) angewendete Zerlegung der Ellipsengleichung in zwei Factoren ersten Grades betrifft, so kann dieselbe mittelst eines einzigen Zeichenwechsels für die Hyperbel brauchbar gemacht werden. Die Gleichungen der beiden Geraden, durch deren Durchschnitt ein Hyperbelpunkt bestimmt wird, lauten nämlich

$$\frac{y}{b_1} = 1 + \frac{x}{a}, \qquad -\frac{y}{b_2} = 1 - \frac{x}{a},$$

wobei wieder die Relation

$$b_1 : b = b : b_2$$

gelten muss. Der Leser wird leicht die einfache Aenderung ausfindig machen, welche hiernach an der in Fig. 43 gegebenen Construction anzubringen ist, wenn sie zur Gewinnung von Hyperbelpunkten benutzt werden soll.

Geben wir der Gleichung 1) die Form

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 y^2,$$

so kann darauf eine Darstellung der Hyperbel mit Benutzung der

Asymptoten gegründet werden. Mit Einführung des halben Asymptotenwinkels γ entsteht nämlich

6) $$x^2 = a^2 + y^2 \cot^2 \gamma,$$

wonach das x eines Hyperbelpunktes als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Katheten a und $y \cot \gamma$ zu construiren ist. Auch hier wird die Ausführung der Construction durchaus keine Schwierigkeit gewähren.

Brennpunkte der Hyperbel. Zur Aufsuchung von Brennpunkten der Hyperbel können fast wörtlich dieselben Schlüsse wiederholt werden, welche bei der gleichen auf die Ellipse bezüglichen Untersuchung zum Ziele führten; nur ist in den Endresultaten b^2 mit $-b^2$ zu vertauschen. Aus der Gleichung

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2,$$

in welcher xy einen beliebigen Punkt einer Linie zweiten Grades und $\xi\eta$ einen Brennpunkt dieser Linie bedeutet, folgern wir zunächst wie bei der Ellipse, dass Brennpunkte nur in einer der Achsen gelegen sein können. Für Brennpunkte in der X-Achse gelten dann die Gleichungen

$$\beta = 0, \qquad \xi + \alpha\gamma = 0, \qquad \eta = 0,$$

woraus durch Zusammenstellung mit der Gleichung der Hyperbel die Resultate

$$\gamma = a, \qquad \xi^2 = a^2 + b^2 = c^2$$

hervorgehen. Dies giebt

7) $$\xi = \pm c,$$

d. i. die beiden bekannten Brennpunkte der Hyperbel. Für die Constante α folgt noch aus $\xi + \alpha\gamma = 0$

$$\alpha = -\frac{\xi}{a} = \mp \varepsilon,$$

wobei ε wie früher die numerische Excentricität bezeichnet. — Brennpunkte in der Ordinatenachse führen zu imaginären Werthen; die Hyperbel enthält also keine weiteren Brennpunkte, als die beiden auf der Verlängerung der Hauptachse gelegenen.

Stellt z_1 den Leitstrahl eines Hyperbelpunktes xy für den auf der Seite der positiven x gelegenen Brennpunkt und z_2 den andern Radiusvector desselben Hyperbelpunktes dar, so ergiebt sich aus den berechneten Werthen in Uebereinstimmung mit den für die Ellipse gefundenen Resultaten

$$z_1^2 = (a - \varepsilon x)^2, \qquad z_2^2 = (a + \varepsilon x)^2.$$

Beim Uebergange zu den Quadratwurzeln können hieraus sowohl positive, als negative Leitstrahlen hervorgehen; treffen wir aber die Bestimmung, die zu positiven x gehörigen z selbst als positive Grössen in Rechnung zu ziehen, so ist, da für jeden Hyperbelpunkt positive x grösser als a sind, um so mehr auch $\varepsilon x > a$; folglich hat man

8) $$z_1 = \varepsilon x - a, \qquad z_2 = \varepsilon x + a$$

zu setzen. Aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen entsteht die bekannte Relation:

9) $$z_2 - z_1 = 2a,$$

wonach die Hyperbel mittelst der unveränderlichen Differenz ihrer Leitstrahlen construirt werden kann.

§. 26.

Die Hyperbel und die Gerade.

Die auf die gegenseitigen Lagen einer Hyperbel und einer Geraden bezüglichen Untersuchungen, soweit sie nicht die neu auftretenden Eigenschaften der Asymptoten berühren, sind, wenn wir Wiederholung derselben Rechnungen vermeiden wollen, am einfachsten auf die entsprechenden Betrachtungen in §. 21 und §. 22 zurückzuführen. Bezeichnen wir daher wie dort die Gleichung der Geraden mit

1) $$y = Mx + n,$$

während

2) $$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$$

die Gleichung der Hyperbel darstellt, so gilt für die Abscissen der etwa vorhandenen gemeinschaftlichen Punkte beider Linien die Gleichung:

3) $$x^2 (a^2 M^2 - b^2) + 2a^2 M n x + a^2 (n^2 + b^2) = 0.$$

Dieselbe ist immer quadratisch, mit Ausnahme des einzigen Falles, wenn

$$a^2 M^2 = b^2$$

oder

$$M = \pm \frac{b}{a},$$

d. i. wenn die Gerade mit einer der beiden Asymptoten parallel läuft. Dann bleibt aus Nr. 3) ei[illegible]ng ersten Grad[illegible] es folgt hieraus der Satz: J[illegible]e zu ein[illegible] tote schneidet die Hy[illegible]

ɜymptoten selbst wird $n = 0$, und der Durchschnittspunkt mit ɪr Hyperbel rückt in die Unendlichkeit.

In jedem andern Falle, d. h. sobald die Gerade die Asymptoten schneidet, behält, wie schon bemerkt wurde, die Gleichung ihre quadratische Form; die Gerade und die Hyperbel besitzen so höchstens zwei gemeinschaftliche Punkte. Aus der für die llipse geführten Rechnung leiten wir her, dass hierbei die Gerade Secante oder Tangente darstellt, oder endlich keinen Punkt ıit der Hyperbel gemein hat, jenachdem

$$-a^2 b^2 (a^2 M^2 - b^2 - n^2) \gtreqless 0.$$

Die Beachtung des Umstandes, dass der ausserhalb der Parenhese befindliche Factor einen negativen Werth besitzt, zeigt, dass as Eintreten des ersten, zweiten oder dritten Falles davon abängig gemacht werden muss, ob die Differenz

$$b^2 + n^2 - a^2 M^2$$

ositiv, gleich Null oder negativ ist. Soll die Gerade die Hyperbel n einem Punkte berühren, so muss die Gleichung

$$4) \qquad a^2 M^2 = b^2 + n^2$$

Geltung finden. Führen wir hierin mittelst der Relationen

$$M = \tan \alpha, \qquad b^2 = c^2 - a^2$$

len zwischen der Geraden und der X-Achse enthaltenen Winkel α und die lineare Excentricität c ein, so kommen wir auf die Gleichung ɜ) des §. 21 zurück, die genau so wie dort geometrisch gedeutet werden kann. Es folgt das Resultat, dass der Fusspunkt eines vom Brennpunkte auf die Tangente gefällten Perpendikels auf der Peripherie des Hauptkreises gelegen ist. Werden endlich mit Anwendung derselben Hilfsmittel die beiden noch übrigen Fälle untersucht, so ergiebt sich als Seitenstück zu dem früher für die gegenseitigen Lagen einer Geraden und einer Ellipse gefundenen Kriterium der folgende Satz: Eine Gerade, die nicht parallel mit einer Asymptote läuft, kann die Hyperbel in zwei Punkten schneiden, in einem Punkte berühren oder keinen Punkt mit ihr gemein haben; der erste, [illegible] dritte dieser Fälle findet statt, je nach[illegible]es von einem Brennpunkte auf [illegible] Perpendikels ausserhalb, auf [illegible]ipherie des Hauptkreises liegt.

Tangenten der Hyperbel. Zur analytischen Lösung der auf Tangenten bezüglichen Aufgaben dient die obige Gleichung 4), welche zu diesem Zwecke in ganz gleicher Weise wie Nr. 4) in §. 21 zu benutzen ist. Für die Gleichung einer Tangente von gegebener Richtung folgt dann nach Analogie von §. 21 Nr. 6)

$$5) \qquad y = Mx \pm \sqrt{a^2M^2 - b^2}.$$

Die hierin unter dem Wurzelzeichen befindliche Differenz lässt erkennen, dass nicht wie bei der Ellipse nach jeder Richtung hin Tangenten möglich sind, sondern nur unter der Bedingung, dass die Relation

$$M^2 \geqq \frac{b^2}{a^2}$$

stattfindet. Es giebt dies die geometrische Deutung, dass der von einer Tangente und der Hauptachse gebildete spitze Winkel immer zwischen den Grenzen 90° und γ enthalten sein muss, wobei γ wie früher den halben Asymptotenwinkel bezeichnet. Berechnen wir die Coordinaten der Berührungspunkte, so zeigt sich, dass die Asymptoten selbst Tangenten für unendlich ferne Punkte der Hyperbel darstellen, d. h. dass sie als äusserste Grenzen der Tangenten auftreten. Die Form der Rechnung bleibt hierbei dieselbe wie bei der Ellipse, und es gelten auch im Uebrigen rücksichtlich der Lage der Berührungspunkte die dort gefundenen Resultate.

Soll die Aufgabe, eine Tangente an die Hyperbel durch einen Punkt $x_1 y_1$ zu legen, analytisch gelöst werden, so sind zu diesem Zwecke die zur Herleitung von §. 21 Nr. 9) bis 14) angewendeten Entwickelungen zu wiederholen, wobei nur an b^2 der mehrfach erwähnte Zeichenwechsel angebracht werden muss. Als Gleichung der Tangente im Peripheriepunkte $x_1 y_1$ findet sich dann

$$6) \qquad \frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1,$$

und hieraus für die Richtungsconstante der Tangente der Werth

$$7) \qquad M = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1},$$

während die auf den Achsen abgeschnittenen Strecken m und n die Grössen

$$8) \qquad m = \frac{a^2}{x_1}, \qquad n = -\frac{b^2}{y_1},$$

erhalten. Aus der Vergleichung des für m gefundenen Resultates

mit der Gleichung der Berührungssehne im Kreise (§. 10 Nr. 3) folgt u. A., dass die Tangente des Hyperbelpunktes $x_1 y_1$ und die demselben Punkte zugehörige Berührungssehne des Hauptkreises sich in der Hauptachse schneiden. Zu einer einfacheren Construction der Tangente, als diejenige sein würde, welche auf diese Bemerkung gegründet werden kann, führt die folgende Betrachtung.

Da die absolute Grösse von $m = \frac{a^2}{x_1}$ für alle Hyperbelpunkte höchstens gleich a sein kann, so muss jede Tangente die Hauptachse zwischen den Scheiteln, also umsomehr auch zwischen den Brennpunkten schneiden, in ähnlicher Weise, wie Letzteres bei der Ellipse mit den Normalen stattfand. Bezeichnen wir nun die Entfernungen dieses Durchschnittspunktes von den beiden Brennpunkten mit t_1 und t_2, wobei t_1 dem auf der Seite der positiven x gelegenen Brennpunkte zugehören soll, so folgt:

$$t_1 = c - \frac{a^2}{x_1} = \frac{a}{x_1}(\varepsilon x_1 - a)$$

$$t_2 = c + \frac{a^2}{x_1} = \frac{a}{x_1}(\varepsilon x_1 + a),$$

und hieraus mit Rücksicht auf die in §. 25 Nr. 8) gefundenen Werthe der Leitstrahlen z_1 und z_2:

$$t_1 = \frac{a z_1}{x_1}, \qquad t_2 = \frac{a z_2}{x_2}.$$

Diese beiden Resultate geben die Proportion

$$9) \qquad t_1 : t_2 = z_1 : z_2,$$

welche der in §. 21 Nr. 18) für die Normale einer Ellipse gefundenen vollständig entspricht. Es entsteht daher auch die entsprechende geometrische Deutung: Die Tangente an einer Hyperbel halbirt den von den Leitstrahlen des Berührungspunktes eingeschlossenen Winkel.

Für einen ausserhalb der Hyperbel gelegenen Punkt $x_1 y_1$ stellt Nr. 6) die Gleichung der Berührungssehne dar.

Normalen der Hyperbel. Die Normale im Hyperbelpunkte $x_1 y_1$ erhält mit Benutzung von Nr. 7) oder auch sofort nach §. 21 Nr. 15) die Gleichung:

$$10) \qquad y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Hiernach ergiebt sich für die Abscisse ihres Durchschnittspunktes mit der X-Achse in vollständiger Uebereinstimmung mit dem bei der Ellipse gefundenen Resultate

$$11)\qquad \xi = \varepsilon^2 x_1,$$

woraus leicht hergeleitet werden kann, dass hier dieser Punkt stets ausserhalb der von den beiden Brennpunkten begrenzten Strecke gelegen sein muss. Mit Ausnahme der hierdurch bedingten geringen Abänderungen gelten im Uebrigen fast wörtlich die auf die Normalen der Ellipse bezüglichen Schlüsse. Für die Länge der Normale findet sich:

$$12)\qquad N^2 = \frac{b^2}{a^2}(\varepsilon^2 x_1{}^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2} z_1 z_2,$$

und die Projection von N auf einen der Vectoren giebt wieder den halben Parameter.

§. 27.

Fortsetzung.

Durchmesser der Hyperbel. Wenn wir, um den geometrischen Ort der Sehnenmitten ausfindig zu machen, die Gleichung 3) des vorhergehenden Paragraphen durch Division mit $a^2 M^2 - b^2$ auf die Form

$$1)\qquad x^2 + 2x.\frac{a^2 Mn}{a^2 M^2 - b^2} + \frac{a^2(n^2 + b^2)}{a^2 M^2 - b^2} = 0$$

bringen, so ist dabei stillschweigend vorausgesetzt, dass nicht

$$a^2 M^2 = b^2$$

sein darf. Es ist leicht zu ersehen, dass sich dieser auszuschliessende Fall auf die Asymptoten und die damit parallelen Geraden bezieht, rücksichtlich deren wir bereits zu der Erkenntniss gelangt sind, dass sie die Hyperbel nur in einem Punkte schneiden, also auch keine Sehnen bilden können. In jedem anderen Falle findet sich wie bei der Ellipse zu einem Systeme paralleler Sehnen mit der Richtungsconstante M ein geradliniger, durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehender Durchmesser. Seine Gleichung lautet analog mit §. 22 Nr. 3)

$$2)\qquad a^2 y M - b^2 x = 0.$$

Wird seine Richtungsconstante mit M' bezeichnet, so entsteht die Relation

$$3)\qquad MM' = \frac{b^2}{a^2},$$

aus welcher in gleicher Weise wie aus Nr. 4) §. 22 hergeleitet wird, dass auch die Hyperbel die Eigenschaften conjugirter Durchmesser besitzt. Charakteristisch für die Hyperbel sind dabei die folgenden Eigenthümlichkeiten.

Sind α und β die Winkel zwischen der Hauptachse und zwei conjugirten Durchmessern, so folgt aus Nr. 3)

$$4) \qquad \tan\alpha \, . \, \tan\beta = \frac{b^2}{a^2}.$$

Dieses Product ist stets positiv, beide Winkeltangenten haben also gleiche Vorzeichen, wonach beide Durchmesser in denselben Quadranten gelegen sein müssen. Da ferner durch die Asymptoten der Fall

$$\tan\alpha = \tan\beta = \pm \frac{b}{a}$$

ausgeschlossen ist, so muss der absolute Werth einer dieser beiden Tangenten grösser, der andere kleiner als $\frac{b}{a}$ sein, d. h. der eine Durchmesser liegt zwischen Asymptote und Hauptachse, der andere zwischen Asymptote und Nebenachse. Nach der Polargleichung 3) im §. 25 wird daher nur einer der beiden Durchmesser die Hyperbel schneiden, so dass zwischen ihnen ein gleicher Gegensatz wie zwischen Haupt- und Nebenachse stattfindet, welche selbst einen speciellen Fall conjugirter Durchmesser bilden. Wir sind hierdurch berechtigt, die Benennungen der Achsen insofern zu verallgemeinern, dass wir in jedem Paare conjugirter Durchmesser einen Hauptdurchmesser und einen Nebendurchmesser unterscheiden, von denen nur der erstere die Hyperbel schneidet. — Noch ist zu bemerken, dass die beiden Achsen ebenso wie in der Ellipse das einzige Paar conjugirter Durchmesser bilden, welches einen rechten Winkel einschliesst, da das Product $\tan\alpha \, . \, \tan\beta$ nie gleich -1 sein kann. Nach dieser Bemerkung zeigt sich die zur Auffindung der Achsen einer gegebenen Ellipse dienende Construction auch für die Hyperbel brauchbar.

Wir gehen dazu über, die Gleichung der Hyperbel für ein schiefwinkeliges Coordinatensystem aufzustellen, dessen Achsen ein Paar conjugirter Durchmesser bilden; α sei der von dem Hauptdurchmesser und der Hauptachse eingeschlossene Winkel, β der Winkel zwischen Hauptachse und Nebendurchmesser. Dann ist,

wenn wir, um uns von den Vorzeichen unabhängig zu halten, die Quadrate von $tan\, \alpha$ und $tan\, \beta$ bilden,

$$tan^2 \alpha < \frac{b^2}{a^2}, \qquad tan^2 \beta > \frac{b^2}{a^2},$$

folglich sind die Differenzen

$$b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha, \qquad a^2 \sin^2 \beta - b^2 \cos^2 \beta$$

beide positiv. Als Gleichung der Hyperbel ergiebt sich durch dieselbe Rechnung, welche im §. 22 zu gleichem Zwecke benutzt wurde,

$$x^2 \left(\frac{b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha}{a^2 b^2}\right) - y^2 \left(\frac{a^2 \sin^2 \beta - b^2 \cos^2 \beta}{a^2 b^2}\right)$$
$$- 2xy \left(\frac{a^2 \sin \alpha \sin \beta - b^2 \cos \alpha \cos \beta}{a^2 b^2}\right) = 1.$$

Der zu $2xy$ in der Parenthese gehörige Factor ist nach Nr. 4) gleich Null. Mit Einführung der Abkürzungen

$$5) \quad \begin{cases} a_1^2 = \dfrac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha} \\ b_1^2 = \dfrac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \beta - b^2 \cos^2 \beta} \end{cases}$$

entsteht daher die Gleichung

$$6) \qquad \left(\frac{x}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 = 1.$$

In Folge der oben gemachten Bemerkung über das Vorzeichen der Differenzen, welche sich in den Nennern der Werthe von a_1^2 und b_1^2 befinden, sind hierbei a_1 und b_1 reelle Grössen. Aus Nr. 6), sowie auch aus der Polargleichung der Hyperbel zeigt sich, dass a_1 die Hälfte des Hauptdurchmessers darstellt, wenn wir uns denselben in seinen Durchschnitten mit der Hyperbel begrenzt denken; b_1 kann nach einer blos algebraischen Analogie als Hälfte des Nebendurchmessers aufgefasst und auf demselben in einer gleichen Weise aufgetragen werden, wie wir dies früher mit der Grösse b auf der Nebenachse gethan haben.

Die Uebereinstimmung der Form, welche sich in der auf zwei conjugirte Durchmesser bezogenen Gleichung 6) der Hyperbel und der für die Achsen geltenden Hauptgleichung darlegt, berechtigt wieder, wie dies früher schon bei Parabel und Ellipse geschehen, zu dem Schlusse, dass die der Gleichungsform entnommenen Resultate auch auf das neue System übertragen werden können, insoweit sie nämlich von der rechtwinkligen Lage der Coordinaten-

achsen unabhängig sind. Wir sehen davon ab, diejenigen Beziehungen zu wiederholen, die sich in gleicher Weise bei der Ellipse vorgefunden haben, und beschränken uns darauf, die Gleichungen der Asymptoten im neuen Systeme zu ermitteln.

Wenden wir dieselben Folgerungen an, welche im §. 14 unter III. zu dem Begriffe der Asymptoten und den Gleichungen 13) hinführten, so ergiebt sich aus Nr. 6), dass eine dadurch repräsentirte Curve zwei geradlinige Asymptoten besitzt, welche in der Gleichung

$$7) \qquad y = \pm \frac{b_1}{a_1} x$$

zusammengefasst werden können. Der möglicherweise entstehende Zweifel, ob hierin die bereits bekannten oder zwei neue Asymptoten ausgedrückt sind, kann am vollständigsten beseitigt werden, wenn wir die Gleichungen der früheren Asymptoten, welche beide in der Formel

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2$$

enthalten sind, für unser jetziges Coordinatensystem transformiren. Mittelst der bekannten Transformationsformeln entsteht dann

$$(x \sin \alpha + y \sin \beta)^2 = \frac{b^2}{a^2} (x \cos \alpha + y \cos \beta)^2$$

und hieraus nach gehöriger Reduction

$$y^2 (a^2 \sin^2 \beta - b^2 \cos^2 \beta) - x^2 (b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha)$$
$$+ 2xy (a^2 \sin \alpha \sin \beta - b^2 \cos \alpha \cos \beta) = 0.$$

Das letzte Glied linker Hand ist nach Nr. 4) gleich Null; es bleibt daher

$$y^2 = \left(\frac{b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha}{a^2 \sin^2 \beta - b^2 \cos^2 \beta}\right) x^2,$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln 5)

$$y^2 = \frac{b_1^2}{a_1^2} x^2,$$

wodurch wir nach Ausziehung der Quadratwurzel auf Nr. 7) zurückkommen. Die Gleichungsform der Asymptoten ist also wie die der Hyperbel selbst immer dieselbe, welches Paar conjugirter Durchmesser auch die Stelle der Coordinatenachsen vertreten mag. Hiernach kann die auf diese Form gegründete Construction der Asymptoten leicht verallgemeinert werden. Legt man nämlich zu

zwei conjugirten Durchmessern, deren vom Mittelpunkte aus gemessene Hälften die Längen a_1 und b_1 besitzen, durch ihre Endpunkte Parallelen, so sind die Asymptoten Diagonalen eines jeden auf diese Weise gebildeten Parallelogrammes. Es liegt hierin zugleich ein einfaches Mittel, aus zwei nach Lage und Grösse gegebenen conjugirten Durchmessern die Lage der Hyperbelachsen durch Construction herzuleiten, insofern durch die Haupt- und Nebenachse die von den Asymptoten gebildeten Winkel halbirt werden.

Die Beziehungen, welche nach §. 22 Nr. 10) und 12) zwischen den conjugirten Durchmessern und den beiden Achsen einer Ellipse stattfanden, wiederholen sich bei der Hyperbel in fast ungeänderter Weise. Nehmen wir dieselben Rechnungen, welche dort angewendet wurden, wieder auf, so erleidet die Gleichung 10) keine Aenderung; es gilt also auch hier, wenn ω wieder den Conjugationswinkel bezeichnet, die Relation

$$8) \qquad a_1 b_1 \sin \omega = a b;$$

die Formel 12) geht dagegen über in

$$9) \qquad a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass die Längen zweier conjugirter Durchmesser gleichzeitig wachsen, während dabei nach 8) die Grösse des Conjugationswinkels abnimmt. Aus der Polargleichung ist ersichtlich, dass bei diesem Anwachsen der Durchmesser beide den Asymptoten immer näher rücken, bis sie schliesslich in den Asymptoten zusammenfallen. Conjugirte Durchmesser von gleicher Länge sind nur in der gleichseitigen Hyperbel möglich, und zwar gilt dort diese Gleichheit für jedes zusammengehörige Paar. An die Stelle, welche in einer Ellipse mit denselben Achsen die gleichen conjugirten Durchmesser einnahmen, sind bei der Hyperbel die Asymptoten getreten.

Mittelst der Gleichungen 8) und 9) können die Längen der Achsen gefunden werden, wenn a_1, b_1 und ω gegeben sind; nur lässt sich dabei nicht dieselbe bequeme Rechnung anwenden, welche zu den Formeln 17) in §. 22 hinführte. Ein einfacheres Mittel, aus zwei conjugirten Durchmessern die Grösse der Haupt- und Nebenachse constructiv herzuleiten, werden uns im folgenden Paragraphen die Asymptoten liefern.

§. 28.

Die Asymptotengleichung der Hyperbel.

Eine besonders einfache Gleichungsform erlangt die Hyperbel, wenn man ihre beiden Asymptoten zu Coordinatenachsen nimmt. Nach dem, was wir früher über die Grösse des Asymptotenwinkels kennen gelernt haben, kann dieses Coordinatensystem nur für eine gleichseitige Hyperbel rechtwinklig sein.

Bezeichnen wir wie früher die Hälfte des Asymptotenwinkels mit γ, wobei die Relation

$$1)\qquad \tan\gamma = \frac{b}{a}$$

Geltung hat, so mag über die beiden Coordinatenachsen so verfügt werden, dass die positive Seite der Y-Achse unter dem Winkel γ und dieselbe Seite der X-Achse unter dem Winkel $360^\circ - \gamma$ gegen die Hauptachse geneigt ist, wobei wir voraussetzen, dass diese Winkel im Sinne der Anomalien gemessen werden. Soll nun die neue Gleichung der Hyperbel durch Transformation der Coordinaten aus der auf die Achsen bezogenen Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

hergeleitet werden, so ist durch die angegebenen Bestimmungen derjenige Transformationsfall getroffen, für welchen die Formeln 5) im §. 4 aufgestellt wurden. Beim Uebergange zum neuen Systeme ist also

$$(y + x)\cos\gamma \text{ für } x,\ (y - x)\sin\gamma \text{ für } y$$

zu setzen. Dann entsteht aus

$$\frac{(y+x)^2\cos^2\gamma}{a^2} - \frac{(y-x)^2\sin^2\gamma}{b^2} = 1$$

nach Entwickelung der Quadrate und besserer Anordnung und Vereinigung der Glieder

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{b^2\cos^2\gamma - a^2\sin^2\gamma}{a^2 b^2}\right) + 2xy\left(\frac{b^2\cos^2\gamma + a^2\sin^2\gamma}{a^2 b^2}\right) = 1.$$

Mittelst der aus 1) folgenden Relation

$$b^2\cos^2\gamma = a^2\sin^2\gamma$$

erlangt diese letzte Gleichung die einfache Form

$$\frac{4xy\cos^2\gamma}{a^2} = 1$$

oder auch

$$x y = \frac{a^2 (1 + tan^2 \gamma)}{4}$$

und mit Einsetzung des obigen Werthes von $tan\,\gamma$

$$2) \qquad x y = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Das constante Product der Coordinaten

$$\frac{a^2 + b^2}{4} = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

führt den Namen Potenz der Hyperbel; die Gleichung 2) selbst wollen wir die Asymptotengleichung der Hyperbel nennen. Dieselbe ist besonders geeignet, das wesentliche Merkmal der Asymptoten vor Augen zu legen, indem sie zeigt, dass, wenn eine Coordinate wächst, die andere abnehmen muss, und dass dabei die eine dieser Längen immer so gross genommen werden kann, dass die andere kleiner wird, als jede angebbare Grösse, d. h. dass die Hyperbel den Asymptoten beliebig nahe rücken kann, ohne sie doch je vollständig zu erreichen.

Mittelst der Gleichung 2) findet die Lösung der im vorigen Paragraphen besprochenen Aufgabe, aus Lage und Grösse zweier conjugirten Durchmesser die Lage und Grösse der Achsen abzuleiten, ihre Vollendung. Sobald nämlich die Asymptoten und die Achsen in der früher angegebenen Weise ihrer Lage nach bestimmt worden sind, hat man nur noch die auf die Asymptoten bezogenen Coordinaten eines Endpunktes des Hauptdurchmessers zu construiren, um dann mit Hilfe der aus 2) folgenden Gleichung

$$c = 2\sqrt{xy},$$

welche eine einfache geometrische Darstellung zulässt, die lineare Excentricität und somit auch die Lage der Brennpunkte zu ermitteln. Aus den Asymptoten und Brennpunkten kann aber nach früheren Sätzen leicht die Länge der Achsen hergeleitet werden.

Sind xy und $x_1 y_1$ zwei auf die Asymptoten bezogene Hyperbelpunkte, so gelten nach Nr. 2) die Gleichungen

$$x y = \frac{a^2 + b^2}{4}, \qquad x_1 y_1 = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

folglich ist auch

$$xy = x_1 y_1.$$

Hieraus folgt die Proportion

$$y_1 : y = x : x_1,$$

der man ohne Schwierigkeit die Mittel entnehmen wird, beliebig

viele Punkte einer Hyperbel constructiv darzustellen, sobald ein Peripheriepunkt nebst den Asymptoten gegeben ist. Zu einer noch einfacheren Lösung dieser Aufgabe führt die folgende Betrachtung.

Schreiben wir die Asymptotengleichung der Hyperbel in der Form

$$3)\qquad xy = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

und bezeichnen eine Gerade, welche beide Asymptoten ausserhalb des Mittelpunktes schneidet, mit

$$4)\qquad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1,$$

so findet sich durch Eliminirung von y für die Abscissen der etwa vorhandenen gemeinschaftlichen Punkte der Geraden und der Hyperbel nach einfacher Umformung die Gleichung

$$5)\qquad x^2 - mx + \frac{mc^2}{4n} = 0;$$

m und n stellen hierbei die von der Geraden auf den Asymptoten abgeschnittenen Strecken dar. Im Falle, dass die Gerade die Hyperbel schneidet, folgt hieraus für den Mittelpunkt xy der von ihr gebildeten Sehne:

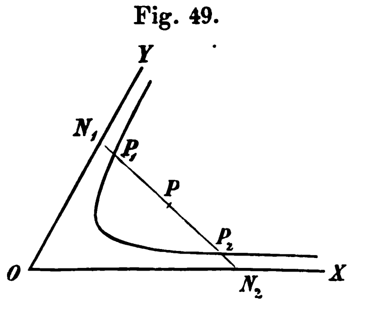
$$x = \frac{m}{2},$$

und wenn man diesen Werth in Nr. 4) einsetzt,

$$y = \frac{n}{2}.$$

Vergleicht man diese Resultate mit den bekannten Formeln für die Coordinaten des Mittelpunktes einer geradlinigen Strecke, so ergiebt sich sofort, dass der Halbirungspunkt der Sehne zugleich in der Mitte zwischen den Durchschnitten gelegen ist, welche sie selbst oder ihre Verlängerung mit den Asymptoten bildet. Schneidet also die Sehne P_1P_2 Fig. 49 in ihrer Verlängerung die Asymptoten OY und OX in den Punkten N_1 und N_2, so ist $N_1P = N_2P$, wenn $P_1P = P_2P$. Hieraus folgt durch Subtraction der gleichen Werthe:

Fig. 49.



$$N_1P_1 = N_2P_2.$$

In ganz gleicher Weise wird dasselbe Resultat für solche Sehnen hergeleitet, welche zwei Punkte beider Hyperbelzweige mit einander verbinden; es entsteht also der Satz: Jede Sehne einer Hyperbel wird von den Asymptoten so geschnitten, dass die zwischen den Asymptoten und der Curve liegenden Stücke der Sehne oder ihrer Verlängerungen einander gleich sind.

Die so eben gefundene Eigenschaft der Hyperbel gewährt nun ein besonders einfaches Mittel, einzelne Punkte dieser Curve zu construiren, sobald ein Peripheriepunkt P_1 nebst den Asymptoten gegeben ist. Legt man nämlich durch diesen Punkt die beliebige Gerade $N_1 N_2$, so stösst man stets auf einen zweiten Peripheriepunkt, wenn man die Strecken $N_2 P_2 = N_1 P_1$ nimmt. Jeder so gewonnene Hyperbelpunkt kann, wenn man das Anhäufen zu vieler in einem Punkte sich schneidenden Geraden vermeiden will, als neuer Ausgangspunkt der Construction benutzt werden. — In ganz ähnlicher Weise ist der Lehrsatz anzuwenden, wenn mittelst einer Asymptote und dreier Peripheriepunkte die andere Asymptote gefunden werden soll. Mit Hilfe der drei Sehnen, welche durch die drei Hyperbelpunkte gelegt werden können, erlangt man drei sich gegenseitig controlirende Punkte der zu construirenden Asymptote.

Sucht man die Bedingung, unter welcher die obige Gleichung 5) zwei gleiche reelle Wurzeln giebt, so erhält man als Kennzeichen für den Fall, in welchem die durch Nr. 4) repräsentirte Gerade zur Tangente wird, die Relation:

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{mc^2}{4n},$$

oder nach gehöriger Hebung:

$$6) \qquad mn = c^2.$$

Wird mittelst dieser Bedingungsgleichung die Strecke n aus Nr. 5) eliminirt, so entsteht für die Abscisse des Berührungspunktes, die wir mit x_1 bezeichnen wollen, das Resultat:

$$x_1^2 - mx_1 + \frac{m^2}{4} = 0,$$

und hieraus folgt:

$$7) \qquad x_1 = \frac{m}{2}.$$

Aus 4) ergiebt sich dann für die zugehörige Ordinate:

8) $$y_1 = \frac{n}{2}.$$

Die Werthe 7) und 8) lassen erkennen, dass der Berührungspunkt einer Hyperbeltangente in der Mitte zwischen den beiden Punkten gelegen ist, in welchen die Tangente von den Asymptoten geschnitten wird. Es ist dies wieder der oben für die Sehnen gefundene Lehrsatz, ausgedehnt auf den Fall, wo die beiden Durchschnitte der Geraden und der Hyperbel in einen übergehen und die Sehne zur Tangente wird.

Sind die auf die Asymptoten bezogenen Coordinaten x_1 und y_1 eines Hyperbelpunktes gegeben, so erhalten die von der Tangente dieses Punktes auf den Asymptoten abgeschnittenen Strecken nach 7) und 8) die Längen

$$m = 2x_1, \qquad n = 2y_1,$$

von denen jede einzelne ausreicht, um damit die Tangente zu construiren. Werden endlich diese Werthe in Nr. 4) eingesetzt, so erlangt die Asymptotengleichung der Hyperbeltangente im Punkte $x_1 y_1$ die Gestalt

9) $$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1,$$

oder auch, wenn man mit der für $x_1 y_1$ geltenden Asymptotengleichung

$$4x_1 y_1 = c^2$$

multiplicirt,

10) $$2(xy_1 + yx_1) = c^2.$$

Die letzte Gleichung gehört nicht allein in Beziehung auf x und y, sondern auch für x_1 und y_1 dem ersten Grade an und besitzt eine so symmetrische Form, dass darin unbeschadet der Richtigkeit die Punkte xy und $x_1 y_1$ ihre Rolle vertauschen können. Diese Bemerkungen reichen hin, um daraus mit Hilfe einer schon mehrfach angewendeten Schlussfolgerung das Resultat herzuleiten, dass für einen ausserhalb der Hyperbel gelegenen Punkt $x_1 y_1$ Nr. 10) die Asymptotengleichung der Berührungssehne darstellt.

§. 29.

Die Krümmungskreise der Hyperbel.

Um die Untersuchungen über die Krümmungskreise der Hyperbel in bequemer Weise an die entsprechenden bei der Theorie der Ellipse dagewesenen Betrachtungen anknüpfen zu können,

kehren wir zu dem rechtwinkligen Coordinatensysteme zurück, dessen Achsen mit den Hyperbelachsen zusammenfallen. Die Krümmungsmittelpunkte werden wie früher mittelst des Durchschnittes benachbarter Normalen bestimmt.

Die in §. 26 Nr. 10) aufgestellte Gleichung der Normale im Punkte $x_1 y_1$ erlangt, wenn man die Glieder, welche die veränderlichen Coordinaten enthalten, auf einer Seite vereinigt, die der Gleichung 1) in §. 23 entsprechende Form:

1) $$a^2 y_1 x + b^2 x_1 y = (a^2 + b^2) x_1 y_1.$$

Ebenso erhält man für eine zweite Normale im Punkte $x_2 y_2$:

2) $$a^2 y_2 x + b^2 x_2 y = (a^2 + b^2) x_2 y_2.$$

Durch Wegschaffung von y findet sich für die Abscisse des gemeinschaftlichen Punktes beider Normalen

$$x = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right) x_1 x_2 \left(\frac{y_1 - y_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2}\right),$$

oder, wenn wir die Abkürzung

$$m = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}$$

und die numerische Excentricität ε einführen,

$$x = \varepsilon^2 \left(\frac{x_1 x_2}{m}\right).$$

Die Constante m bedeutet hierbei wieder nach §. 5 Nr. 11) die Abscisse des Durchschnittspunktes der durch $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ gehenden Secante und der X-Achse. Beim Zusammenfallen beider Normalen wird die Secante zur Tangente, folglich nach §. 26 Nr. 8)

$$m = \frac{a^2}{x_1}.$$

Hiermit erlangt die Abscisse des in der Normale des Punktes $x_1 y_1$ gelegenen Krümmungsmittelpunktes den Werth

3) $$x = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2},$$

welcher vollständig mit dem in §. 23 Nr. 3) für die Ellipse gefundenen übereinstimmt. Zum Zwecke der geometrischen Darstellung kann dieser Ausdruck in der Form

$$x = \xi \, . \, sec^2 \alpha$$

geschrieben werden, wobei $\xi = \varepsilon^2 x_1$ nach §. 26 Nr. 11) die Abscisse des Durchschnittspunktes der Normale und der X-Achse bedeutet und der Winkel α mit Hilfe der Gleichung $sec\, \alpha = \frac{x_1}{a}$ zu construiren

st. Nach einer in §. 25 gemachten Bemerkung erhält man denelben Winkel auch mittelst der Relation: $tan\ \alpha = \frac{y_1}{b}$. Die Ausfühung der hieraus folgenden Constructionen des Krümmungsmittelunktes mag dem eigenen Nachdenken des Lesers überlassen leiben.

Für die Ordinate des Krümmungsmittelpunktes findet sich, venn der in 3) enthaltene Werth von x in die Gleichung 1) der Normale eingesetzt wird, nach einigen Reductionen wieder in vollständiger Uebereinstimmung mit dem entsprechenden für die Elipse geltenden Ausdrucke

$$4)\qquad y = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4}.$$

Die Aufsuchung des Krümmungshalbmessers mittelst der Gleichung

$$\varrho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

ührt ebenfalls zu Resultaten, die bereits in §. 23 in gleicher Weise ür die Ellipse Geltung gefunden haben. Es ergiebt sich zunächst

$$5)\qquad \varrho^2 = \frac{(\varepsilon^2 x_1^2 - a^2)^3}{a^2 b^2},$$

nd hieraus mit Benutzung des in §. 26 Nr. 12) für die Länge N er Normale aufgestellten Werthes:

$$6)\qquad \varrho = \frac{N^3}{p^2}.$$

ierbei bedeutet p wie früher den Halbparameter, von dem wir sehen haben, dass er durch Projection von N auf einen der Leitrahlen des Punktes $x_1 y_1$ dargestellt werden kann. Es folgt hiers wieder, wie in §. 23, dass die in Fig. 37 enthaltene Construcn des Krümmungshalbmessers ebenso wie für die Parabel und lipse auch für die Hyperbel angewendet werden kann. Diese nstruction gilt also für alle Kegelschnitte ohne Unterschied.

Die auf die Quadratur der Hyperbel bezüglichen Unrsuchungen greifen zu weit in das Gebiet der höheren Matheatik ein, um hier einen geeigneten Platz finden zu können; sie eiben daher ebenso wie die Betrachtungen über die Retification mmtlicher Kegelschnittslinien von diesem Buche ausgeschlossen.

Achtes Capitel.

Die Linien zweiten Grades.

§. 30.

Discussion der allgemeinen Gleichung der Linien zweiten Grades.

Nachdem wir in den vorhergehenden Capiteln einige Linien näher kennen gelernt haben, deren Gleichungen sämmtlich dem zweiten Grade angehörten, bleibt noch die Frage zu entscheiden, ob ausser ihnen andere Linien dieses Grades existiren oder ob mit den Kegelschnitten der zweite Grad völlig erschöpft ist. Wir haben zu diesem Zwecke die allgemeinste Gleichung zweiten Grades zwischen den Coordinaten x und y zu betrachten, wofür bereits früher (§. 9 Nr. 7) die Form

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

festgestellt wurde, und zu untersuchen, welche verschiedene Linien dadurch repräsentirt werden können. Um dieser Untersuchung die möglichste Allgemeinheit zu verleihen, setzen wir zunächst ein Parallelcoordinatensystem mit beliebigem Coordinatenwinkel voraus, suchen aber durch Discussion der Gleichung solche neue Lagen der Coordinatenachsen zu ermitteln, für welche die Gleichung einfachere Formen erhalten muss. Wird auf diese neuen Lagen transformirt, so werden wir dadurch zur Classification der in Rede stehenden Linien gelangen. Da unsere Coordinatenachsen geradlinig sind, so beginnen wir die Untersuchung mit den Beziehungen, welche zwischen den Linien zweiten Grades und einer beliebigen Geraden stattfinden.

Soll ein Punkt xy gleichzeitig auf einer Linie zweiten Grades und einer Geraden gelegen sein, so gilt für seine Coordinaten, weil er der ersten Linie angehört, eine Gleichung von der Form:

1) $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0;$

die Gleichung der Geraden mag wie in den beiden vorhergehenden Capiteln durch

2) $$y = Mx + n$$

repräsentirt werden. Durch Substitution des letzten Werthes von y in Nr. 1) erhält man für die x solcher Punkte, welche beiden Linien angehören:

3) $$\begin{cases} x^2(A + BM^2 + 2CM) + 2x(BMn + Cn + D + EM) \\ \qquad + Bn^2 + 2En + F = 0; \end{cases}$$

die zugehörigen y finden sich aus Nr. 2). Da die für x erhaltene Gleichung quadratisch ist, so besitzt sie höchstens zwei reelle Wurzeln und führt in diesem Falle zu zwei gemeinschaftlichen Punkten beider Linien. Hieraus folgt der Fundamentalsatz: jede Gerade kann mit einer Linie zweiten Grades nicht mehr als zwei Punkte gemein haben*).

Sobald zwei Durchschnittspunkte vorhanden sind oder sobald die Gerade eine Sehne bildet, kann die Gleichung 3) durch den Coefficienten von x^2 dividirt werden**). Dann entsteht:

4) $$x^2 + 2x \cdot \frac{(BM + C)n + D + EM}{A + BM^2 + 2CM} + P = 0,$$

wobei wir zur Abkürzung P für den Inhalt des Gliedes gesetzt haben, welches das Product der beiden Wurzeln enthält und dessen Grösse für die folgende Betrachtung unwesentlich ist. Bezeichnen wir nun mit x und y die Coordinaten der Sehnenmitte, so muss nach einem schon mehrfach angewendeten Satze x dem arithmetischen Mittel der beiden Wurzeln von Nr. 4) gleich sein. Man erhält also:

$$x = -\frac{(BM + C)n + D + EM}{A + BM^2 + 2CM},$$

während das zugehörige y wieder aus der Gleichung

*) Eine einzige Ausnahme von diesem Satze ist möglich, wenn

$$A + BM^2 + 2CM,$$
$$BMn + Cn + D + EM,$$
$$Bn^2 + 2En + F$$

gleichzeitig zu Null werden. Dann genügt jedes x der Gleichung 3) und die Gerade fällt mit der Linie zweiten Grades zusammen. Diese Bemerkung wird sich später insofern rechtfertigen, als in der Gleichung zweiten Grades auch geradlinige Gebilde enthalten sind.

**) Wird der Coefficient $A + BM^2 + 2CM$ zu Null, ohne dass die anderen beiden Coefficienten verschwinden, so geht Nr. 3) in eine Gleichung

$$y = Mx + n$$

gefunden wird. Wenn aus den beiden letzten Gleichungen die Constante n eliminirt wird, so bleiben die Coordinaten des Mittelpunktes der Sehne nur noch von der Richtung dieser Geraden abhängig; es ergiebt sich dann als Bedingung dafür, dass der Punkt xy auf der Mitte einer Sehne mit der Richtungsconstante M gelegen ist,

$$5) \qquad x(A + CM) + y(BM + C) + D + EM = 0.$$

Diese Gleichung gilt in ungeänderter Weise, so lange M denselben Werth behält, d. i. für ein System paralleler Sehnen; ihrer Form nach repräsentirt sie eine gerade Linie. Man kann hiernach den Satz aussprechen: die Mittelpunkte aller parallelen Sehnen einer Linie zweiten Grades liegen in einer Geraden; alle Linien zweiten Grades besitzen also geradlinige Durchmesser. Nr. 5) ist die Gleichung des Durchmessers für die Sehnen mit der Richtungsconstante M.

Bezeichnen wir mit α und β die beiden Winkel, welche eine Schaar paralleler Sehnen der Reihe nach mit der X- und Y-Achse einschliesst, so ist nach §. 5 Nr. 2)

$$M = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta};$$

man hat daher, wenn $\alpha = 0$, auch $M = 0$, dagegen, wenn $\beta = 0$, $M = \infty$ zu setzen. Die erste dieser beiden Substitutionen giebt aus Nr. 5)

$$6) \qquad Ax + Cy + D = 0$$

für den Durchmesser der mit der X-Achse parallelen Sehnen. Wird ferner die Gleichung 5) durch M dividirt und dann $M = \infty$ oder $\frac{1}{M} = 0$ gesetzt, so erhält man als Gleichung des Durchmessers aller zur Y-Achse parallelen Sehnen:

---

ersten Grades über, es ist also nur ein Durchschnittspunkt vorhanden. Dies kann höchstens für zwei specielle Richtungen der Geraden vorkommen, wofür die M aus der Gleichung

$$BM^2 + 2CM + A = 0$$

gefunden werden. Als solche specielle Richtungen haben wir bereits bei der Parabel die Richtung der Achse und bei der Hyperbel die Richtung der Asymptoten kennen gelernt.

Sollte für jedes M der Coefficient von x^2 zu Null werden, so müssten die Constanten A, B und C alle drei gleich Null sein. Dann gehört aber die allgemeine Gleichung nicht mehr einer Linie zweiten Grades an.

$$7) \qquad Cx + By + E = 0.$$

Die Gleichung jedes beliebigen Durchmessers kann, wenn man die mit dem Factor M behafteten Glieder von den übrigen trennt, in der Form

$$8) \qquad Ax + Cy + D + M(Cx + By + E) = 0$$

geschrieben werden. Da diese letzte Gleichung von einem x und y verificirt wird, welche den Gleichungen 6) und 7) Genüge leisten, so folgt, dass sich alle drei durch diese Gleichungen repräsentirten Geraden in einem Punkte schneiden, oder auch, wenn dieser Punkt in der Unendlichkeit gelegen ist, parallel laufen. Mit Rücksicht darauf, dass Nr. 8) jedem beliebigen Durchmesser angehört, folgt hieraus der Satz: Alle Durchmesser einer Linie zweiten Grades laufen entweder parallel oder schneiden sich in einem Punkte.

Um zu entscheiden, wann der eine oder der andere dieser beiden Fälle stattfindet, suchen wir die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Linien 6) und 7) auf, die wir mit u und v bezeichnen wollen. Man hat dann

$$9) \qquad \begin{cases} Au + Cv + D = 0 \\ Cu + Bv + E = 0, \end{cases}$$

und hieraus folgt:

$$10) \qquad u = \frac{CE - BD}{AB - C^2}, \qquad v = \frac{CD - AE}{AB - C^2}.$$

Ist nun der gemeinschaftliche Nenner dieser beiden Brüche, den wir mit

$$11) \qquad \Delta = AB - C^2$$

bezeichnen wollen, von Null verschieden, so besitzen u und v endliche Werthe, die Durchmesser schneiden sich also in endlicher Entfernung; sie laufen dagegen parallel, wenn $\Delta = 0$ und dabei die Zähler von Null verschieden sind. Sollten dagegen im letzten Falle auch die Zähler verschwinden, so erhalten u und v die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, wodurch, jenachdem dies für einen oder beide Zähler stattfindet, auf den Parallelismus der Durchmesser mit einer der beiden Coordinatenachsen oder auf das Zusammenfallen sämmtlicher Durchmesser hingedeutet wird.

Die Bedingung des Parallelismus, worin das Zusammenfallen mit eingeschlossen ist, kann noch dadurch bestätigt werden, dass wir aus der Gleichung 5) die Richtungsconstante des Durchmessers herleiten, welche M' heissen mag. Wir erhalten:

$$12) \qquad M' = -\frac{A + CM}{BM + C},$$

oder auch, wenn wir im Zähler C und im Nenner B als Factor ausheben,

$$M' = -\frac{C\left(M + \frac{A}{C}\right)}{B\left(M + \frac{C}{B}\right)}.$$

Die letzte Form zeigt, dass M' für jede Richtungsconstante M der Sehnen den unveränderlichen Werth $-\frac{C}{B}$ erhält, oder dass alle Durchmesser gleiche Richtung besitzen, wenn die Relation

$$\frac{A}{C} = \frac{C}{B} \text{ oder } C^2 = AB$$

Geltung hat. — In jedem anderen Falle, d. i. wenn $\Delta \gtrless 0$, bleibt M' von M abhängig, und zwar besteht dafür, wie man leicht aus 12) ableiten kann, die Bedingung

$$13) \qquad BMM' + C(M + M') + A = 0.$$

Diese letzte Gleichung besitzt eine so symmetrische Form, dass darin M und M' vertauscht werden können, d. h. dass die Richtung des Durchmessers in die der anfänglichen Sehnen übergeht, wenn die Sehnen die Richtung des anfänglichen Durchmessers annehmen. Dies ist aber die Eigenschaft der conjugirten Durchmesser, welche sich hiernach bei allen Linien zweiten Grades vorfindet, deren Durchmesser nicht parallel laufen. In gleicher Weise wie bei der Theorie der Ellipse und Hyperbel wird dann hergeleitet, dass alle Durchmesser im Punkte uv halbirt werden. Derselbe ist also Mittelpunkt.

Nach dem Vorhergehenden zerfallen alle Linien zweiten Grades in zwei Classen: in solche, welche einen Mittelpunkt besitzen, wobei $\Delta \gtrless 0$ sein muss, und in Linien ohne Mittelpunkt, für welche die Relation $\Delta = 0$ Geltung hat. Im Folgenden sollen beide Fälle einzeln untersucht werden.

§. 31.

Fortsetzung.

Erster Hauptfall: $\varDelta \gtrless 0$. Da hierbei ein Mittelpunkt vorhanden ist, so kann derselbe zum Anfangspunkte eines neuen Coordinatensystemes gewählt werden, dessen Achsen den ursprünglichen Coordinatenachsen parallel laufen. Nach den Transformationsformeln für parallele Achsenverschiebung erhält man die neue Gleichung der zu untersuchenden Linie zweiten Grades, wenn man x in $x + u$ und y in $y + v$ übergehen lässt. Aus der Gleichung 1) des vorhergehenden Paragraphen entsteht dann:

$$1) \quad \begin{cases} Ax^2 + By^2 + 2Cxy \\ + 2x(Au + Cv + D) + 2y(Cu + Bv + E) \\ + Au^2 + Bv^2 + 2Cuv + 2Du + 2Ev + F = 0. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf §. 30 Nr. 9) fallen hierin diejenigen Glieder aus, welche x und y in der ersten Potenz enthalten; es bleibt also:

$$2) \qquad Ax^2 + By^2 + 2Cxy + \Sigma = 0,$$

wobei zur Abkürzung

$$\Sigma = Au^2 + Bv^2 + 2Cuv + 2Du + 2Ev + F$$

gesetzt ist. Schreiben wir die letzte Gleichung in der Form

$$\Sigma = (Au + Cv + D)u + (Cu + Bv + E)v + Du + Ev + F,$$

so reducirt sich dieselbe mittelst der soeben benutzten Relationen auf

$$\Sigma = Du + Ev + F,$$

worein die Werthe von u und v aus Nr. 10) des vorigen Paragraphen substituirt werden können. Wir bedienen uns hierbei der Abkürzung

$$3) \qquad \Gamma = AE^2 + BD^2 - 2CDE - F\varDelta;$$

dann ergiebt sich

$$4) \qquad \Sigma = -\frac{\Gamma}{\varDelta},$$

und die auf das neue Coordinatensystem bezogene Gleichung 2) wird zu

$$5) \qquad Ax^2 + By^2 + 2Cxy = \frac{\Gamma}{\varDelta}.$$

Der Mittelpunkt ist hierbei Coordinatenanfang; beide Achsen sind also Durchmesser der Linie zweiten Grades.

Wir wollen nun mit Beibehaltung des Coordinatenanfanges und der X-Achse die Achse der y in eine solche Lage bringen, dass beide Linien ein Paar conjugirter Durchmesser darstellen.

Da dann die neue Y-Achse Durchmesser für die der X-Achse parallelen Sehnen sein muss, so hat sie nach §. 30 Nr. 6) im jetzigen Systeme die Gleichung

$$Ax + Cy = 0.$$

Für ihre Richtungsconstante folgt hieraus

$$6) \qquad -\frac{A}{C} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

und hieraus wieder

$$7) \qquad A\sin\beta + C\sin\alpha = 0.$$

Die Grössen α und β bedeuten dabei im Sinne der Formel 2) §. 5 die von der neuen Y-Achse und den jetzigen Coordinatenachsen eingeschlossenen Winkel, so dass α den neuen und $\omega = \alpha + \beta$ den jetzigen Coordinatenwinkel darstellt. Die Möglichkeit, die Y-Achse in eine derartige neue Lage überzuführen, ist an die Bedingung geheftet, dass A von Null verschieden ist, weil sonst nach 5) die neue Y-Achse im jetzigen Systeme die Gleichung

$$y = 0$$

besitzen, also mit der beibehaltenen X-Achse zusammenfallen würde*). Wir setzen daher vorläufig voraus, dass $A \gtrless 0$, und werden den Fall $A = 0$ später einer besonderen Betrachtung unterwerfen.

Wird zunächst über die Y-Achse so verfügt, dass mit Beibehaltung des Coordinatenanfanges und der X-Achse der neue Coordinatenwinkel die Grösse α noch ohne weitere Beschränkung erhält, so lässt sich aus den Formeln 6) §. 4 herleiten, dass beim Uebergange zum neuen Coordinatensysteme

$$x \text{ in } x + y\frac{\sin\beta}{\sin\omega}$$

$$y \quad " \quad y\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}$$

übergehen muss, wobei zur Abkürzung nach dem Vorigen $\beta = \omega - \alpha$ gesetzt worden ist. Man erhält dann aus der Gleichung 5) die auf das neue System bezogene Gleichung:

$$8) \left\{ \begin{aligned} & Ax^2 + \left(\frac{A\sin^2\beta + B\sin^2\alpha + 2C\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\omega}\right)y^2 \\ & \qquad + 2\left(\frac{A\sin\beta + C\sin\alpha}{\sin\omega}\right)xy = \frac{\Gamma}{\Delta}. \end{aligned} \right.$$

---

*) Für das Zusammenfallen zweier conjugirten Durchmesser ist uns bereits ein Beispiel in den Asymptoten der Hyperbel bekannt.

Sollen nun die Coordinatenachsen ein Paar conjugirter Durchmesser bilden, so kommt hierin mit Rücksicht auf die Relation 7) das Glied mit dem Factor xy in Wegfall, und der Zähler des Coefficienten von y^2 kann mit Benutzung von Nr. 6) auf die Form

$$\sin^2\beta\left(A + B\,.\,\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} + 2C\,.\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) = \frac{A\varDelta\sin^2\beta}{C^2}$$

gebracht werden. Aus 8) entsteht daher für die zu untersuchende Linie zweiten Grades die Gleichung:

$$9)\qquad Ax^2 + \frac{A\varDelta\sin^2\beta}{C^2\sin^2\omega}\,.\,y^2 = \frac{\Gamma}{\varDelta}.$$

Da wir von der Voraussetzung ausgingen, dass A von Null verschieden sein soll, so können wir diesen Werth noch, ohne der Allgemeinheit der Untersuchung Eintrag zu thun, als positive Grösse annehmen, indem entgegengesetzten Falls die Gleichung zuvor mit — 1 multiplicirt werden kann. In Beziehung auf die Grössen Γ und $\varDelta$ lassen sich dann folgende sechs Fälle unterscheiden:

1. Ist $\varDelta > 0$ und $\Gamma > 0$, so erlangt Nr. 9) die Form

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma,$$

wobei α, β und γ drei entschieden positive Grössen bedeuten sollen. Setzt man noch

$$\frac{\gamma}{\alpha} = a_1^2, \qquad \frac{\gamma}{\beta} = b_1^2,$$

so sind a_1 und b_1 reelle Werthe, und man erhält

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 = 1,$$

d. i. nach §. 22 Nr. 8) die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf zwei conjugirte Durchmesser*).

2. Wenn $\varDelta > 0$ und $\Gamma = 0$, so kann mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen die Gleichung 9) in der Gestalt

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 0$$

geschrieben werden. Für reelle x und y müssen dann beide Coordinaten gleich Null sein; die Linie schwindet also in einen Punkt — den Mittelpunkt — zusammen.

3. Sobald $\varDelta > 0$ und $\Gamma < 0$, ist es nicht mehr möglich, der dadurch entstehenden Gleichung

*) Der Kreis ist selbstverständlich hierin mit eingeschlossen, wenn $a_1 = b_1$ und der Coordinatenwinkel ein rechter ist.

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = -\gamma$$

in reellen x und y zu genügen; die Gleichung hat also gar keine geometrische Bedeutung.

4. Der Fall $\Delta < 0$ und $\Gamma < 0$ führt auf eine Gleichung von der Form

$$\alpha x^2 - \beta y^2 = \gamma$$

oder auch

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 = 1,$$

d. i. nach §. 27 Nr. 6) die Gleichung einer Hyperbel, wobei $2a_1$ einen Hauptdurchmesser und $2b_1$ den zugehörigen Nebendurchmesser darstellt.

5. Wenn $\Delta < 0$ und $\Gamma = 0$, so entsteht die Gleichung

$$\alpha x^2 - \beta y^2 = 0,$$

welche in

$$(x\sqrt{\alpha} - y\sqrt{\beta})(x\sqrt{\alpha} + y\sqrt{\beta}) = 0$$

zerlegt werden kann. Sie repräsentirt zwei sich schneidende gerade Linien.

6. Ist endlich $\Delta < 0$ und $\Gamma > 0$, so erhält man

$$\alpha x^2 - \beta y^2 = -\gamma$$

oder

$$-\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 = 1,$$

d. i. wieder die Gleichung einer Hyperbel, bezogen auf zwei conjugirte Durchmesser, von denen aber der Hauptdurchmesser mit der Y-Achse zusammenfällt.

In dem bis jetzt von der Untersuchung ausgeschlossen gebliebenen Falle, wo $A = 0$ ist, kommen in 2), 5) und 8) die mit x^2 behafteten Glieder in Wegfall, und die Transformation, welcher die Gleichung 9) ihre Entstehung verdankt, bleibt unzulässig. Man kann aber dann bei Drehung der Ordinatenachse über den oben benutzten Winkel α so verfügen, dass in Nr. 8) auch das Glied mit y^2 verschwindet. Hierzu ist

$$B \sin\alpha + 2C \sin\beta = 0 \tag{10}$$

zu setzen, woraus, wenn wir mittelst der Relation

$$\beta = \omega - \alpha$$

den Coordinatenwinkel ω einführen, die Gleichung

$$B \sin\alpha + 2C \sin(\omega - \alpha) = 0$$

entsteht. Nach einfacher Reduction folgt hieraus:

$$11) \qquad \tan u = \frac{2\,C \sin\omega}{2\,C\cos\omega - B},$$

was allemal eine mögliche Lage der Y-Achse giebt, wenn nicht auch $C = 0$ ist. Mit Ausschluss dieses Falles entsteht bei Anwendung des neuen Coordinatenwinkels α aus 8) die Gleichung:

$$12) \qquad 2\frac{C\sin\alpha}{\sin\omega}xy = \frac{\Gamma}{\Delta},$$

welche nach §. 28 Nr. 2) die Asymptotengleichung einer Hyperbel darstellt, wenn $\Gamma \gtrless 0$, für $\Gamma = 0$ aber in die Gleichungen der neuen Coordinatenachsen zerfällt, wodurch also zwei sich schneidende Gerade repräsentirt werden. Beachten wir, dass für $A = 0$ und $C \gtrless 0$ allemal $C^2 > AB$, also $\Delta < 0$ sein muss, so sehen wir, dass die in der Gleichung 12) enthaltenen Fälle mit dem vierten, fünften und sechsten Falle der Gleichung 9) in Uebereinstimmung gebracht werden können.

Ist endlich $A = 0$ und $C = 0$, so wird auch $\Delta = 0$; es gehört dies also nicht unter den jetzt untersuchten Hauptfall.

Aus den vorigen Erörterungen stellt sich, wenn wir ihre Resultate kurz zusammenfassen, Folgendes heraus: Die allgemeine Gleichung zweiten Grades in der Form der Gleichung 1) §. 30 bedeutet, vorausgesetzt, dass $A \geq 0$,

wenn $\Delta > 0$ oder $AB > C^2$,
- für $\Gamma > 0$ eine Ellipse,
- „ $\Gamma = 0$ einen einzelnen Punkt,
- „ $\Gamma < 0$ kein geometrisches Gebild,

wenn $\Delta < 0$ oder $AB < C^2$,
- für $\Gamma \gtrless 0$ eine Hyperbel,
- „ $\Gamma = 0$ zwei sich schneidende Gerade.

§. 32.
Schluss.

Zweiter Hauptfall: $\Delta = 0$. Wir müssen hier sofort unterscheiden, ob die Zähler der im vorigen Paragraphen angewendeten Mittelpunktscoordinaten u und v Werthe besitzen, die von Null verschieden sind, oder ob sie zugleich mit Δ verschwinden. Gebrauchen wir für diese Zähler die Abkürzungen

$$1) \qquad \begin{cases} A_1 = CE - BD \\ A_2 = CD - AE, \end{cases}$$

so folgt, wenn $\Delta = 0$, also $AB = C^2$ gesetzt wird,

$$2)\qquad \begin{cases} A A_1 + C A_2 = 0 \\ C A_1 + B A_2 = 0. \end{cases}$$

Wir ersehen hieraus, dass in dem jetzt in Rede stehenden Falle beide Zähler gleichzeitig verschwinden müssen, wenn nicht A und C oder B und C gleich Null sind.

Untersuchen wir zunächst den Fall, wo A_1 und A_2 zu Null werden, so können wir hierbei der Coordinatentransformation gänzlich entbehren. Wird nämlich die allgemeine Gleichung zweiten Grades in gewöhnlicher Weise auf y reducirt, so folgt bei Anwendung der eingeführten Abkürzungen:

$$y = \frac{-Cx - E \pm \sqrt{E^2 - BF + 2A_1 x - \varDelta x^2}}{B},$$

also hier, wo $\varDelta = 0$ und $A_1 = 0$,

$$3)\qquad y = -\frac{C}{B}x - \frac{E \mp \sqrt{E^2 - BF}}{B}.$$

Dieser Ausdruck hat keine geometrische Bedeutung, wenn $E^2 < BF$, repräsentirt eine Gerade, wenn $E^2 = BF$, und zwei parallele Gerade, sobald $E^2 > BF$. Dabei verschwindet auch A_2 allemal, wenn nicht B und C beide gleich Null sind. — Die vorhergehende Reduction bleibt unzulässig für den Fall, dass $B = 0$ ist, weil dann die Gleichung aufhört, in Beziehung auf y quadratisch zu sein. Lösen wir dafür nach x auf, so ergiebt sich

$$x = \frac{-Cy - D \pm \sqrt{D^2 - AF + 2A_2 x - \varDelta x^2}}{A},$$

also unter den festgestellten Bedingungen

$$4)\qquad x = -\frac{C}{A}y - \frac{D \mp \sqrt{D^2 - AF}}{A},$$

woraus wieder die vorhergehenden drei Fälle zum Vorschein kommen, jenachdem

$$AF \gtreqless D^2.$$

Diese Lösung bleibt auch noch anwendbar, wenn C mit B verschwindet, sobald nur A_1 und A_2 beide zu Null werden, wozu auch $E = 0$ sein muss; für ein gleichzeitiges Verschwinden von A und C ist von Nr. 3) Gebrauch zu machen*).

---

*) Der Fall, dass A und B gleich Null sind, kann hier deshalb nicht vorkommen, weil dann wegen $C^2 = AB$ auch C verschwinden müsste. Dann hört aber die Linie auf, dem zweiten Grade anzugehören.

Besitzen Δ_1 und Δ_2 Werthe, welche von Null verschieden sind, oder verschwindet nur eine dieser beiden Grössen, so kehren wir zu dem Hilfsmittel der Coordinatenverlegung zurück. Da ein Mittelpunkt jetzt nicht vorhanden ist, so wollen wir den Coordinatenanfang mit Beibehaltung der Achsenrichtung in einen vorläufig noch unbestimmten Punkt $u_1 v_1$ verschieben. Dann entsteht nach Analogie von Gleichung 1) des vorhergehenden Paragraphen:

$$5)\quad \begin{cases} Ax^2 + By^2 + 2Cxy \\ + 2x(Au_1 + Cv_1 + D) + 2y(Cu_1 + Bv_1 + E) \\ + Au_1^2 + Bv_1^2 + 2Cu_1 v_1 + 2Du_1 + 2Ev_1 + F = 0. \end{cases}$$

Es soll nun über u_1 und v_1 so verfügt werden, dass der Coefficient von y und der von x und y freie Ausdruck in Wegfall kommen. Hierzu sind folgende zwei Bedingungen nöthig, aus denen u_1 und v_1 bestimmt werden können:

$$6)\quad \begin{cases} Cu_1 + Bv_1 + E = 0 \\ Au_1^2 + Bv_1^2 + 2Cu_1 v_1 + 2Du_1 + 2Ev_1 + F = 0. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung vereinfacht sich noch, wenn wir ihr die Form

$$Au_1^2 + Cu_1 v_1 + 2Du_1 + Ev_1 + F + (Cu_1 + Bv_1 + E)v_1 = 0$$

geben, indem sie dann zufolge der ersten Gleichung auf

$$Au_1^2 + Cu_1 v_1 + 2Du_1 + Ev_1 + F = 0$$

zurückkommt. Setzen wir hierein den aus der ersten Bedingungsgleichung folgenden Werth

$$7)\quad v_1 = -\frac{Cu_1 + E}{B},$$

so findet sich nach gehöriger Reduction:

$$(AB - C^2)u_1^2 - 2(CE - BD)u_1 + (BF - E^2) = 0.$$

Der Coefficient von u_1^2 ist identisch mit Δ, also gleich Null; es bleibt also

$$8)\quad u_1 = \frac{BF - E^2}{2\Delta_1},$$

und hieraus entsteht mit Benutzung der Formel 7)

$$9)\quad v_1 = \frac{2BDE - BCF - CE^2}{2B\Delta_1}.$$

Die letzten beiden Resultate zeigen, dass die angewendete Verschiebung des Coordinatenanfanges nur so lange zulässig ist, als B und Δ_1 von Null verschieden sind. Δ_2 kann verschwinden; nur müssen dann A und C gleich Null sein, damit nicht Δ_1 auch in Wegfall komme.

Sobald die Gleichungen 8) und 9) statthaft sind, erlangt auch der Coefficient von $2x$ in Nr. 5) eine einfachere Form. Man erhält nämlich durch Multiplication und Division mit B:

$$Au_1 + Cv_1 + D = \frac{ABu_1 + BCv_1 + BD}{B},$$

und hieraus mit Benutzung der Relation $AB = C^2$ und der ersten Bedingungsgleichung 6)

$$Au_1 + Cv_1 + D = -\frac{A_1}{B}.$$

Die Gleichung 5) geht folglich für das neue Coordinatensystem über in

$$10) \qquad Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 2\frac{A_1}{B}x.$$

Eine weitere Vereinfachung kann hierin durch Drehung einer der beiden Coordinatenachsen um den neuen Anfangspunkt erzielt werden. Wir wollen die Y-Achse beibehalten, der X-Achse aber eine solche Lage geben, dass sie den Durchmesser für die der andern Achse parallelen Sehnen darstellt. Nach §. 30 Nr. 7) erhält unter dieser Voraussetzung die neue X-Achse im jetzigen Systeme die Gleichung

$$Cx + By = 0,$$

woraus für die Winkel, welche sie mit den jetzigen Coordinatenachsen einschliesst, die Relationen

$$11) \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = -\frac{C}{B}, \qquad B\sin\alpha + C\sin\beta = 0$$

folgen. Hierbei repräsentirt $\alpha + \beta = \omega$ den jetzigen, β den neuen Coordinatenwinkel. Mittelst der Formeln 6) des §. 4 ist herzuleiten, dass beim Uebergange zum neuen Coordinatensysteme

$$x \text{ in } x\frac{\sin\beta}{\sin\omega}$$

$$y \text{ „ } x\frac{\sin\alpha}{\sin\omega} + y$$

umgewandelt werden muss; aus der Gleichung 10) findet sich dann

$$12) \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{A\sin^2\beta + B\sin^2\alpha + 2C\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\omega}\right)x^2 + By^2 \\ &+ 2\left(\frac{B\sin\alpha + C\sin\beta}{\sin\omega}\right)xy = 2\frac{A_1\sin\beta}{B\sin\omega}x. \end{aligned} \right.$$

Mit Rücksicht auf die Formeln 11) verschwindet hierbei das mit dem Factor xy behaftete Glied; ferner wird der Zähler des Coef-

ficienten von x^2 zu Null, wie man leicht bemerken wird, wenn man ihn auf die Form

$$\sin^2\beta\left(A + B\,.\,\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} + 2C\,.\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) = \frac{\Delta\sin^2\beta}{B}$$

bringt. Es bleibt hiernach für die zu untersuchende Linie zweiten Grades die Gleichung

$$13)\qquad y^2 = 2\,\frac{A_1\sin\beta}{B^2\sin\omega}\,x,$$

d. i. nach §. 17 Nr. 8) die Gleichung einer Parabel, deren Achse parallel zur X-Achse liegt, und für welche die Y-Achse die Tangente des in der Peripherie gelegenen Coordinatenanfanges bildet.

Es bleibt noch der Fall zu untersuchen, wenn $B = 0$ ist, wobei weder die oben angegebene Verschiebung des Coordinatenanfanges noch die zuletzt benutzte Drehung der X-Achse stattfinden kann. Aus Nr. 11) folgt nämlich, wenn wir wieder $\beta = \omega - \alpha$ setzen, nach einfacher Reduction:

$$\tan\alpha = \frac{C\sin\omega}{C\cos\omega - B},$$

und hieraus ergeben sich stets mögliche Werthe von α; nur ist der Fall $B = 0$ deshalb auszuschliessen, weil dann

$$\tan\alpha = \tan\omega$$

sein, also die neue X-Achse mit der beibehaltenen Y-Achse zusammenfallen würde.

Da für $B = 0$ nicht auch A verschwinden kann, so lässt dieser Fall eine ganz ähnliche Behandlung wie der jetzt dagewesene zu, sobald man in Beziehung auf Nr. 5) die Verfügung trifft, neben dem von x und y freien Ausdrucke den Coefficienten von x in Wegfall zu bringen, und dann mit Beibehaltung der X-Achse die Achse der y in eine solche Lage bringt, dass sie wieder den Durchmesser für die zur andern Achse parallelen Sehnen abgiebt. Wir haben dazu nicht nöthig, die vorhergehenden Rechnungen vollständig zu wiederholen, da Alles nur darauf hinauskommt, in den dagewesenen Entwickelungen x und y, A und B, D und E gegenseitig zu vertauschen. Man erhält schliesslich an der Stelle von Nr. 13)

$$14)\qquad x^2 = 2\,\frac{A_2\sin\alpha}{A^2\sin\omega}\,y,$$

d. i. wieder die Gleichung einer Parabel.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades bedeutet also nach den vorhergehenden Erörterungen,

wenn $\Delta = 0$ oder $AB = C^2$,

eine Parabel, sobald nicht $\Delta_1 = 0$ und $\Delta_2 = 0$,

zwei parallele Gerade, wenn $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, und dabei
$B \gtrless 0$ und $E^2 > BF$, oder $B = 0$ und $D^2 > AF$,

eine Gerade, wenn wieder $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ und dabei
$B \gtrless 0$ und $E^2 = BF$, oder $B = 0$ und $D^2 = AF$,

kein geometrisches Gebild, wenn bei $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$
$B \gtrless 0$ und $E^2 < BF$ oder $B = 0$ und $D^2 < AF$.

Als Gesammtresultat der ganzen über die Linien zweiten Grades geführten Untersuchung stellt sich ferner heraus, dass ausser den Kegelschnitten keine anderen krummen Linien zweiten Grades existiren.

§. 33.

Aufgaben.

Wird eine Curve dadurch erzeugt, dass man einen Punkt sich nach einem bestimmten Gesetze bewegen lässt, dessen mathematischer Ausdruck in Parallelcoordinaten auf eine Gleichung zweiten Grades hinführt, so muss nach den in den vorhergehenden Paragraphen angestellten Betrachtungen der geometrische Ort des bewegten Punktes eine der Kegelschnittslinien sein. Die aufgefundenen Kriterien entscheiden darüber, welche besondere Linie in jedem einzelnen Falle in Frage kommt. Bei der speciellen Untersuchung der Kegelschnitte haben wir bereits mehrere solche Entstehungsweisen dieser Curven kennen gelernt; zum Zwecke der Einübung der bei Gelegenheit der allgemeinen Discussion erhaltenen Resultate mögen hierzu noch die folgenden Beispiele treten.

I. Man soll den Ort der Scheitel aller derjenigen Dreiecke suchen, welche auf einer gegebenen Grundlinie $2m$ stehen, und in welchen die an dieser Grundlinie gelegenen Dreieckswinkel eine constante Differenz δ besitzen.

Die Grundlinie $2m$ werde zur X-Achse und die Senkrechte in ihrem Halbirungspunkte zur Achse der y in einem rechtwinkligen Coordinatensysteme gewählt. Der auf der Seite der positiven x an der Basis gelegene Dreieckswinkel heisse α_1, der andere α_2, und es sei

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Bezeichnen nun x und y die Coordinaten des Scheitels für irgend eine Lage des Dreieckes, so sind die Gleichungen der beiden im Scheitel zusammentreffenden Dreiecksseiten (vergl. §. 5. Nr. 7)

$$y = -\tan\alpha_1 (x - m), \qquad y = \tan\alpha_2 (x + m),$$

und man erhält hieraus

$$\tan\alpha_1 = \frac{y}{m - x}, \qquad \tan\alpha_2 = \frac{y}{m + x}.$$

Mit Rücksicht auf die Relation $\tan\delta = \dfrac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2}$ folgt:

$$\tan\delta = \frac{2xy}{m^2 - x^2 + y^2},$$

und hieraus entsteht für den gesuchten Ort die Gleichung:

1) $$x^2 - y^2 + 2xy \cot\delta = m^2,$$

oder, wenn man für den speciellen Fall $\delta = 0$ das Unendlichwerden des mit dem Factor $\cot\delta$ behafteten Gliedes vermeiden will,

2) $$x^2 \sin\delta - y^2 \sin\delta + 2xy \cos\delta = m^2 \sin\delta.$$

Hierbei ist nach §. 30 Nr. 11) $\varDelta = -\sin^2\delta - \cos^2\delta = -1$, also immer negativ, und nach §. 31 Nr. 3) $\Gamma = -m^2 \sin\delta$; die Linie ist also eine Hyperbel, die für den besondern Fall $\delta = 0$ in zwei sich schneidende Gerade — die Coordinatenachsen — übergeht. Die Vergleichung von Nr. 1) und 2) mit §. 31 Nr. 5) zeigt zugleich, dass der gewählte Coordinatenanfang Mittelpunkt ist.

Um über Grösse und Lage der Achsen dieser Hyperbel zu entscheiden, gehen wir durch Drehung der Coordinatenachsen zu einem neuen rechtwinkligen Systeme über. Dabei ist nach §. 4 Nr. 4)

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha \text{ für } x$$
$$x\sin\alpha + y\cos\alpha \;\;\text{,, }\; y$$

zu setzen, wenn α den Winkel bedeutet, unter welchem die neue X-Achse gegen die ursprüngliche geneigt ist. Mit Einsetzung dieser Werthe entsteht aus 2) nach gehöriger Reduction:

$$(x^2 - y^2)\sin(2\alpha + \delta) + 2xy\cos(2\alpha + \delta) = m^2 \sin\delta.$$

Macht man hierin $2\alpha + \delta = 90^0$ oder $\alpha = 45^0 - \frac{1}{2}\delta$, so bleibt

3) $$x^2 - y^2 = m^2 \sin\delta,$$

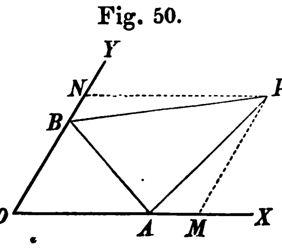
d. i. die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel. Der gesuchte Ort ist also im Allgemeinen eine gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt mit dem Halbirungspunkte der gegebenen Dreiecks-

grundlinie zusammenfällt und deren Hauptachse unter dem Winkel $45^0 - \frac{1}{2}\,\delta$ gegen diese Grundlinie geneigt ist. Die Länge der Haupthalbachse beträgt $m\sqrt{\sin\delta}$.

Die hier untersuchte Eigenschaft lässt zwischen der gleichseitigen Hyperbel und dem Kreise insofern eine gewisse Analogie erkennen, als letzterer nach einem bekannten Satze den geometrischen Ort für die Scheitel aller derjenigen Dreiecke bildet, in welchen bei gegebener Grundlinie die Summe der Winkel an der Basis constant ist.

II. Welche Linie beschreibt ein Eckpunkt eines gegebenen Dreieckes, während jeder der beiden andern Eckpunkte dieses Dreieckes sich auf einem Schenkel eines festen Winkels fortbewegt?

Fig. 50.



Wir wählen die Schenkel des festen Winkels zu Coordinatenachsen, und es sei PAB Fig. 50 das gegebene Dreieck in einer der Lagen, welche es in Folge der Aufgabe einnehmen kann. P stelle den Eckpunkt dar, welcher die gesuchte Linie beschreiben soll.

Setzen wir $PN = x$, $PM = y$, $PB = a$, $PA = b$, $\angle PBY = \varphi$, $\angle PAX = \psi$ und den Coordinatenwinkel $= \omega$, so ist nach einem bekannten Dreieckssatze

$$\sin\varphi = \frac{x \sin\omega}{a}, \quad \sin\psi = \frac{y \sin\omega}{b}.$$

Wird nun der Dreieckswinkel APB mit γ bezeichnet, so findet die Relation

$$\varphi + \psi = \omega + \gamma$$

statt, und man erhält hiermit aus

$$\sin^2\varphi \cos^2\psi + \cos^2\varphi \sin^2\psi + 2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi \cos\psi = \sin^2(\varphi + \psi),$$

wenn man linker Hand den sich selbst aufhebenden Ausdruck

$$\sin^2\varphi \sin^2\psi + \sin^2\varphi \sin^2\psi - 2 \sin^2\varphi \sin^2\psi$$

addirt,

$$\sin^2\varphi + \sin^2\psi + 2 \sin\varphi \sin\psi \cos(\omega + \gamma) = \sin^2(\omega + \gamma).$$

Hieraus entsteht, wenn die obigen Werthe von $\sin\varphi$ und $\sin\psi$ substituirt werden, für den gesuchten Ort die Gleichung:

$$4) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + 2\,\frac{xy}{ab} \cos(\omega + \gamma) = \left[\frac{\sin(\omega + \gamma)}{\sin\omega}\right]^2.$$

Dieselbe gehört dem zweiten Grade an und giebt, sobald nicht $\omega + \gamma = 180^0$, für Δ und Γ positive Werthe; die Linie ist also im Allgemeinen eine Ellipse, und zwar fällt, wie man aus der Form der Gleichung leicht erkennt, ihr Mittelpunkt mit dem Scheitel des gegebenen Winkels zusammen. In dem speciellen Falle, wenn $\omega + \gamma = 180^0$, bleibt aus Nr. 4)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\frac{xy}{ab} = 0,$$

und hieraus folgt

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

d. i. die Gleichung einer durch den Coordinatenanfang gehenden Geraden. Die Ellipse schwindet demnach in diesem besonderen Falle in eine gerade Linie zusammen.

Beachtet man, dass in Fig. 50 für jede Lage von AB der Punkt P zwei Lagen, zu beiden Seiten von AB, einnehmen kann, ohne dass an den Bedingungen der Aufgabe irgend etwas geändert wird, so lässt sich durch eine der vorhergehenden ganz ähnliche Entwickelung noch ein zweiter geometrischer Ort von P ermitteln. Man findet wieder eine Ellipse, deren Gleichung

$$5)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + 2\frac{xy}{ab}\cos(\omega - \gamma) = \left[\frac{\sin(\omega - \gamma)}{\sin\omega}\right]^2.$$

lautet.

Kommt an die Stelle des gegebenen Dreieckes eine Gerade, so dass der beschreibende Punkt P in die Seite AB selbst fällt, so geht in den Gleichungen 4) und 5) der Winkel γ in 180^0 über und die beiden gefundenen Ellipsen werden dabei zu einer einzigen, weil zu $\omega + 180^0$ und $\omega - 180^0$ gleiche trigonometrische Functionen gehören. Diese Ellipse hat die Gleichung:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\frac{xy}{ab}\cos\omega = 1.$$

Wird dann noch die Verfügung getroffen, dass der Coordinatenwinkel ein rechter sein soll, so entsteht:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

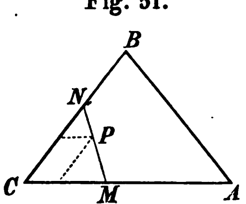
d. i. die Gleichung einer Ellipse, deren Achsen die Stelle der Coordinatenachsen einnehmen. Wir kommen hierdurch zu der in Fig. 42 enthaltenen Construction der Ellipse zurück, welche als specieller Fall der jetzt behandelten Aufgabe betrachtet werden kann.

III. Die Seiten AC und BC des gegebenen Dreieckes ABC (Fig. 51) werden von der beweglichen Geraden MN in den Punkten M und N geschnitten. Welche Linie beschreibt der auf MN gelegene Punkt P, wenn die Bewegung dieser Geraden so vor sich geht, dass immer die Proportion

$$PM : PN = AM : CM = CN : BN$$

Geltung findet?

Fig. 51.



Wir wählen CA als X-Achse und CB als Y-Achse eines Parallelcoordinatensystemes mit dem Anfangspunkte C, und gebrauchen die Bezeichnungen: $AC = a$, $BC = b$, $CM = m$, $CN = n$. Die Coordinaten des beweglichen Punktes P heissen x und y. — Aus der Figur ergiebt sich dann sogleich die fortlaufende Proportion

$$PM : PN = (m - x) : x = y : (n - y),$$

welche in Verbindung mit der gegebenen Bedingung zu den Resultaten

$$(m - x) : x = (a - m) : m$$
$$(n - y) : y = (b - n) : n$$

hinführt. Hieraus folgt:

$$x : m = m : a$$
$$y : n = n : b,$$

und man erhält demnach:

$$m = (ax)^{\frac{1}{2}}, \qquad n = (by)^{\frac{1}{2}}.$$

Wird hierzu die Gleichung

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

als Bedingung dafür gefügt, dass die Punkte P, M und N in einer geraden Linie liegen sollen, so entsteht für den gesuchten Ort die Gleichung

$$6) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Durch zweimalige Quadrirung können hierin die gebrochenen Exponenten entfernt werden. Das erste Mal ergiebt sich das Resultat

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 2\left(\frac{xy}{ab}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

und hieraus wieder

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)^2=4\,\frac{xy}{ab},$$

›r nach Auflösung der Parenthese und besserer Ordnung der ieder:

$$7)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2\,\frac{xy}{ab}-2\,\frac{x}{a}-2\,\frac{y}{b}+1=0.$$

e Form dieser Gleichung zeigt zunächst, dass der geometrische t des Punktes P eine Linie zweiten Grades ist, welche durch Punkte A und B geht, und in diesen Punkten von den Coordi- tenachsen oder den Dreiecksseiten AC und BC tangirt wird, so ss die dritte Seite AB die dem Punkte C zugehörige Berührungs- hne darstellt. Wird nämlich in 7) $y=0$ gesetzt, so bleibt für die bscissen der in der X-Achse gelegenen Punkte der untersuchten inie die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}-2\,\frac{x}{a}+1=0,$$

elche die beiden gleichen Wurzeln $x=a$ enthält. Hiernach ist C Tangente im Punkte A. In gleicher Weise führt die Substitu- on $x=0$ zu dem Resultate, dass BC die Tangente im Punkte B bgiebt.

Aus 7) folgt ferner (vgl. §. 30 Nr. 11 und §. 32 Nr. 1), dass in er fraglichen Linie die Grösse $\varDelta=0$ ist, während $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ on Null verschieden sind; die Linie ist also eine Parabel.

Wir wollen noch untersuchen, ob bei der angegebenen Ent- tehung dieser Parabel die erzeugende Gerade MN (Fig. 51) ausser lem beschreibenden Punkte P noch einen zweiten Punkt mit der Curve gemein haben kann. Verbinden wir zu diesem Zwecke die Gleichung von MN, nämlich

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1,$$

it der unserer Aufgabe zu Grunde liegenden Bedingung

$$(a-m):m=n:(b-n),$$

› lässt sie sich nach Elimination von n auf die Form

$$(a-m)\,x+m\,\frac{ay}{b}-m\,(a-m)=0$$

ringen. Für Punkte der Parabel ist aber nach Nr. 6)

$$\frac{ay}{b}=(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})^2;$$

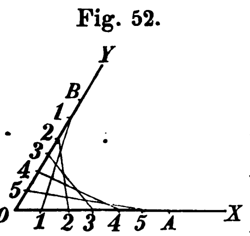
ıan erhält demnach für die x der gemeinschaftlichen Punkte bei-

der Linien, wenn aus den beiden letzten Gleichungen y eliminirt wird,

$$ax - 2a^{\frac{1}{2}} m x^{\frac{1}{2}} + m^2 = 0.$$

Da diese Gleichung linker Hand ein vollständiges Quadrat enthält, so besitzt sie zwei gleiche reelle Wurzeln; alle der Aufgabe genügenden Lagen der erzeugenden Geraden geben also Parabeltangenten. Hierauf gründet sich die folgende Construction.

Fig. 52.



Soll in den Winkelraum XOY Fig. 52 ein Parabelbogen gelegt werden, welcher die beiden Schenkel des Winkels in den Punkten A und B berührt, so theile man vorerst sowohl AO als BO in eine gleiche Anzahl gleich grosser Theile. Werden dann die auf der Strecke AO gelegenen Theilpunkte von O aus, dagegen die Theilpunkte auf BO von B aus der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4 u. s. f. bezeichnet, so stellen die Geraden, welche die gleichbezeichneten Punkte unter sich verbinden, Tangenten des zu construirenden Parabelbogens dar. Man erhält auf diese Weise eine Schaar gerader Linien, welche die Curve umhüllen und sich derselben um so inniger anschmiegen, je grösser ihre Anzahl ist. Diese den Parabelbogen einhüllenden Geraden können dazu benutzt werden, den Lauf der Curve selbst mit beliebiger Annäherung zu bestimmen. Man wird leicht finden, in welcher Weise das angegebene Verfahren fortzusetzen ist, wenn man zu dem Theile der Parabel gelangen will, welcher vom Scheitel des Winkels aus gerechnet sich jenseits der Berührungspunkte A und B befindet.

§. 34.

Bestimmung einer Linie zweiten Grades durch gegebene Peripheriepunkte.

Da die allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen den veränderlichen Grössen x und y den allgemeinsten Ausdruck für die Gleichung der Kegelschnitte und der darin mit eingeschlossenen geradlinigen Gebilde enthält, so müssen diejenigen geometrischen Eigenschaften, welche aus der Untersuchung dieser Gleichung hervorgehen, allen Linien dieser Art gemeinschaftlich angehören. Zur Vervollständigung der aus der speciellen Betrach-

tung der Kegelschnitte bereits bekannten Eigenschaften mögen noch die folgenden Erörterungen hinzutreten.

Die Gleichung zweiten Grades, welche in ihrer allgemeinsten Form

$$1)\qquad Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

die sechs beständigen Grössen A, B, $C \ldots F$ enthält, lässt sich, wenn man beiderseitig durch eine dieser sechs Grössen (die jedoch von Null verschieden sein muss) dividirt, immer so umgestalten, dass sie nur noch von fünf Constanten abhängig ist. Nehmen wir z. B. an, die Coordinatenachsen seien, was immer möglich ist, so gelegt, dass der Coordinatenanfang nicht mit einem Peripheriepunkte zusammenfällt, so dürfen in 1) nicht x und y gleichzeitig verschwinden; es muss also ein von x und y freies Glied F vorhanden sein. Wird durch dieses dividirt, und zur Abkürzung

$$\frac{A}{F} = a, \quad \frac{B}{F} = b, \quad \frac{C}{F} = c, \quad \frac{D}{F} = d, \quad \frac{E}{F} = e$$

gesetzt, so geht Nr. 1) in die Gleichung

$$2)\qquad ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + 1 = 0$$

über, welche nur noch die fünf beständigen Grössen a, b, c, d, e enthält. Soll nun diese Gleichung einer bestimmten Linie zweiten Grades angehören, so müssen die darin enthaltenen Constanten entweder unmittelbar ihrem Zahlwerthe nach bekannt sein, oder man muss sie aus gegebenen Bedingungen berechnen können. Nach den Gesetzen der Algebra sind hierzu fünf von einander unabhängige Bedingungsgleichungen nöthig. Wir wollen den Fall näher untersuchen, wenn die Linie durch fünf gegebene Peripheriepunkte hindurch gehen soll. Es kommt hierbei nur darauf an, die fünf Coefficienten a, b, c, d, e so zu bestimmen, dass die Gleichung 2) durch die Coordinaten eines jeden der fünf gegebenen Punkte befriedigt wird.

Ist $x_1 y_1$ einer dieser fünf Punkte, und denken wir uns, wodurch der Allgemeinheit der Untersuchung kein Abbruch geschieht, das Coordinatensystem so gelegt, dass für die aufzusuchende Linie eine Gleichung von der Form 2) Anwendung finden kann, so muss dieser Gleichung Genüge geschehen, wenn in ihr x mit x_1 und y mit y_1 vertauscht wird. Man hat also für die Unbekannten a, b, c, d und e die Relation:

$$ax_1^2 + by_1^2 + 2cx_1y_1 + 2dx_1 + 2ey_1 + 1 = 0.$$

Durch jeden andern gegebenen Punkt wird hierzu eine Gleichung derselben Form gefügt; fünf Punkte reichen also aus, die gesuchten Coefficienten zu bestimmen. Beachten wir nun, dass alle hierzu aufgestellten Gleichungen in Beziehung auf ihre Unbekannten vom ersten Grade sind, so folgt, dass jede dieser Grössen einen reellen und einfachen Werth erhalten muss, vorausgesetzt, dass die gegebenen Gleichungen vollkommen von einander unabhängig sind. Diese Voraussetzung wird allemal erfüllt, wenn wir die in der Gleichung zweiten Grades enthaltenen geradlinigen Gebilde ausschliessen, uns also auf solche Fälle beschränken, wo nicht drei der gegebenen Punkte in gerader Linie liegen*). Die Substitution der aus den vorhandenen Bedingungsgleichungen für die Coefficienten gewonnenen Werthe in Nr. 2) giebt dann eine einzige Gleichung zweiten Grades, welche der gesuchten Linie angehört. Hieraus folgt: zur Bestimmung einer Curve zweiten Grades sind im Allgemeinen fünf Peripheriepunkte nöthig und ausreichend; zwei Kegelschnitte können also, ohne zusammenzufallen, nicht mehr als vier Punkte gemein haben.

Verfährt man, um die Gleichung eines Kegelschnittes zu ermitteln, welcher durch fünf Punkte hindurchgehen soll, in der angegebenen Weise, so treten noch Rechnungsabkürzungen ein, wenn man von den gegebenen Punkten so viele als möglich in die Coordinatenachsen zu bringen sucht; dessenungeachtet bleibt die Operation nicht frei von Weitläufigkeiten. Ein anderes Verfahren zur Lösung der erwähnten Aufgabe, welches ohne grossen Rechnungsaufwand zum Ziele führt, liefert die folgende Betrachtung.

Werden die Gleichungen zweier Linien zweiten Grades durch Addition verbunden, nachdem vorher die eine dieser Gleichungen mit einem unbestimmten Factor multiplicirt wurde, so entsteht wieder eine Gleichung zweiten Grades, welche von denselben x

---

*) Dass bei Mitaufnahme der geradlinigen Gebilde Unbestimmtheiten eintreten können, zeigt folgendes Beispiel. Soll eine Gleichung zweiten Grades vier Punkten genügen, von denen drei in gerader Linie liegen, so wird sie von jedem Systeme zweier Geraden befriedigt, von denen die eine diese drei Punkte enthält, die andere aber nach beliebiger Richtung durch den vierten Punkt geht. Tritt nun hierzu ein fünfter Punkt, welcher in derselben Geraden liegt, in der sich bereits drei gegebene Punkte befinden, so bleibt die Aufgabe ebenso unbestimmt, als sie bereits war.

und y befriedigt wird, die den beiden ersten Gleichungen Genüge leisten. Die durch die neue Gleichung charakterisirte Linie muss daher durch alle diejenigen Punkte gehen, welche den beiden ersten Linien gemein waren. Um diese Bemerkung zur Lösung der Aufgabe nutzbar zu machen, die Gleichung eines Kegelschnittes zu finden, welcher durch fünf gegebene Punkte hindurchgeht, ist es nur nöthig, dass man zwei Gleichungen zweiten Grades aufstellen kann, die von vieren dieser Punkte verificirt werden. Die angegebene Operation liefert dann, so lange der eingeführte Factor unbestimmt bleibt, den allgemeinen Ausdruck für die Gleichungen aller Kegelschnitte, welche durch diese vier Punkte gelegt werden können. Schliesslich hat man über den unbestimmten Factor so zu verfügen, dass auch der fünfte Punkt von der Gleichung getroffen wird. Wir wollen diese Rechnung durchführen, indem wir dabei den Coordinatenachsen eine solche Lage geben, dass die Resultate möglichst vereinfacht werden.

Einer der gegebenen Punkte, den wir P_1 nennen wollen, sei Coordinatenanfang, ein zweiter, P_2, liege in der X-Achse mit den Coordinaten a und o. Durch den dritten Punkt P_3 werde die Y-Achse gelegt, seine Coordinaten sind o und b; der vierte Punkt P_4 hat die Coordinaten m und n. Die Gleichung der Geraden $P_2 P_4$ lautet dann:

$$y = \frac{n}{m-a}(x-a) \text{ oder } nx + (a-m)y - an = 0,$$

und die von $P_3 P_4$:

$$y - b = \frac{n-b}{m} x \text{ oder } (b-n)x + my - bm = 0.$$

Durch Verbindung dieser beiden Gleichungen mit den für die Coordinatenachsen geltenden

$$x = 0 \text{ und } y = 0$$

entsteht

$$3) \qquad x[nx + (a-m)y - an] = 0$$

als Gleichung zweiten Grades für das System der beiden Geraden $P_1 P_3$ und $P_2 P_4$, und

$$4) \qquad y[(b-n)x + my - bm] = 0$$

für das System der Geraden $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$. Beide Gleichungen 3) und 4) werden von allen vier Punkten befriedigt; die Gleichung

$$5) \quad x[nx + (a-m)y - an] + \lambda y[(b-n)x + my - bm] = 0,$$

in welcher λ einen beliebigen Factor bedeutet, drückt daher eine

Linie zweiten Grades aus, welche durch dieselben vier Punkte hindurchgeht. Soll nun diese Linie noch einen fünften Punkt pq enthalten, so muss auch

$$p\,[np + (a-m)\,q - an] + \lambda q\,[(b-n)\,p + mq - bm] = 0$$

sein, woraus in Verbindung mit 5) der unbestimmte Factor λ eliminirt werden kann. Setzen wir zur Abkürzung

$$P = p\,[np + (a-m)\,q - an]$$
$$Q = q\,[(b-n)\,p + mq - am],$$

so erhält der gesuchte Kegelschnitt die Gleichung

6) $Qx[nx + (a-m)y - an] - Py[(b-n)x + my - bm] = 0$ *).

Hierin kann nach Potenzen von x und y geordnet und durch Anwendung der für die einzelnen Linien zweiten Grades gefundenen Unterscheidungsmerkmale in jedem einzelnen Falle entschieden werden, welche besondere Art der Kegelschnitte in Frage kommt.

Wenn zu der Gleichung 5), welche den allgemeinen Ausdruck für die Gleichungen aller Linien zweiten Grades enthält, die durch die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 hindurchgehen, irgend eine Bedingungsgleichung tritt, mittelst deren der unbestimmte Factor λ einen bestimmten Werth erhält, so wird hierdurch der fünfte Peripheriepunkt ersetzt. Dieser Fall tritt ein, wenn die Linie eine Parabel sein soll, indem dann die Bedingung $\varDelta = 0$ oder $AB = C^2$ (vergl. §. 32) erfüllt werden muss. Wir erkennen hieraus, dass zur Bestimmung einer Parabel vier Punkte ausreichen müssen.

Wird Nr. 5) nach Potenzen von x und y geordnet, so entsteht die Gleichung

7) $nx^2 + \lambda my^2 + [a - m + \lambda\,(b-n)]\,xy - anx - bm\lambda y = 0,$

welche nur dann einer Parabel angehören kann, wenn der Bedingung

$$\lambda mn = \left[\frac{a - m + \lambda\,(b-n)}{2}\right]^2$$

oder

8) $\lambda^2\,(b-n)^2 + 2\lambda\,[(a-m)\,(b-n) - 2mn] + (a-m)^2 = 0$

Genüge geleistet wird. Da diese letzte Gleichung quadratisch ist,

---

*) Der Verfolg der hier angestellten Rechnung führt auch noch zu einem bestimmten Resultate, wenn drei der gegebenen Punkte in gerader Linie liegen; die Gleichung zweiten Grades gehört dann dem Systeme der beiden Geraden an, von denen die eine diese drei Punkte und die andere die beiden übrigen enthält. Nur bei vier oder fünf in einer Geraden gelegenen Punkten tritt Unbestimmtheit ein.

st sie zwei Werthe von λ zu und führt zu dem Satze: **Durch Punkte können im Allgemeinen zwei Parabeln ;t werden.** Damit jedoch diese Werthe reell sind, muss die ion

$$[(a-m)(b-n)-2mn]^2-(a-m)^2(b-n)^2>0$$

; werden. Nach einigen Umgestaltungen folgt hieraus:

$$4mn(bm+an-ab)>0.$$

nun stets möglich ist, das Coordinatensystem so zu legen, , b, m und n positive Grössen darstellen, so können wir un-raussetzung dieser Lage der Coordinatenachsen in der letz-ıgleichung durch $4abmn$ dividiren; dann ergiebt sich:

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}>1.$$

icksicht auf den Umstand, dass die Gleichung

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}=1$$

ıg findet, sobald der Punkt P_4 in der Geraden P_2P_3 gelegen ann hieraus leicht hergeleitet werden, dass die beiden Para-ıur dann möglich sind, wenn sich P_4 ausserhalb des Dreieckes et, welches die drei anderen gegebenen Punkte zu Eckpunk-ıt. — Der Fall, in welchem die Gleichung 8) zwei gleiche Wurzeln besitzt, führt auf die Bedingung

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}=1,$$

aber keine Parabel zu, weil dann drei der gegebenen Punkte ıer geraden Linie liegen. Durch vier Punkte sind also immer Parabeln bestimmt, sobald nur diese Punkte eine solche Lage ı, dass sie sich auf einer Parabelperipherie befinden können; ı muss jeder einzeln ausserhalb des zwischen den drei andern ten enthaltenen Dreieckes gelegen sein.

'eachten wir, dass in der für die Parabel geltenden Bedingungs-ıung $\Delta=0$ auch der Fall eines Systemes zweier parallelen den eingeschlossen ist, so ergiebt sich sofort, dass bei beson-Lage der vier gegebenen Punkte die Parabeln auch in pa-e Gerade übergehen können. Nur eine Parabel und ein Sy-paralleler Geraden ist möglich, wenn die vier Punkte die unkte eines Trapezes bilden; keine Parabel und zwei Systeme leler Geraden können construirt werden, wenn die Punkte en Eckpunkten eines Parallelogrammes zusammenfallen.

Als Endresultat der vorhergehenden Erörterungen haben wir die Steigerung zu bemerken, welche sich im Gebiete der Curven zweiten Grades rücksichtlich der Anzahl ihrer bestimmenden Peripheriepunkte zeigt. Während durch drei Punkte ein Kreis gelegt werden kann, bestimmen vier Punkte zwei Parabeln, fünf Punkte jeden Kegelschnitt überhaupt, also im Besonderen Ellipse und Hyperbel.

§. 35.

Pol und Polare.

Die im vorigen Paragraphen behandelte Aufgabe, einen Kegelschnitt zu ermitteln, welcher fünf gegebene Punkte enthält, kann constructiv gelöst werden, sobald man ein Verfahren ausfindig macht, mittelst der fünf Punkte einen sechsten derselben Curve angehörenden zu erhalten. Die fortgesetzte Anwendung eines solchen Verfahrens muss dann zu beliebig vielen Punkten hinführen. Aus der folgenden Untersuchung ergeben sich die Hilfsmittel zu einer Construction dieser Art.

In der Ebene einer Linie zweiten Grades, deren Gleichung für beliebige Parallelcoordinaten von der Form

$$1)\quad Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

sein muss, legen wir durch den Coordinatenanfang eine geradlinige Secante

$$2)\qquad y = Mx.$$

Die x der gemeinschaftlichen Punkte beider Linien finden sich dann aus der Gleichung

$$3)\quad x^2(A + BM^2 + 2CM) + 2x(D + EM) + F = 0,$$

und für die Wurzeln dieser Gleichung, welche x_1 und x_2 heissen mögen, gelten die Relationen

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{D + EM}{N}, \quad x_1 x_2 = \frac{F}{N},$$

wobei zur Abkürzung

$$N = A + BM^2 + 2CM$$

gesetzt ist. Wir stellen uns nun die Aufgabe, auf der Secante den zum Coordinatenanfange zugeordneten harmonischen Punkt zu finden, während die Durchschnittspunkte mit der durch die Gleichung 1) repräsentirten Linie die beiden andern harmonischen Punkte darstellen sollen. Da die zugehörenden y ein harmonisches Strahlenbüschel bilden, so muss das x des gesuchten Punktes das harmo-

nische Mittel der beiden Wurzeln von Nr. 3) bilden. Wird also dieser Punkt mit xy bezeichnet, so ergiebt sich aus der Formel

$$x = x_1 x_2 : \frac{x_1 + x_2}{2},$$

wenn wir die oben berechneten Werthe einsetzen,

$$x = -\frac{F}{D + EM}.$$

Die y-Coordinate ist, da der Punkt auf der Secante liegt, mittelst der Gleichung

$$y = Mx$$

zu berechnen. Sobald man aus den beiden letzten Gleichungen M eliminirt, findet sich für den geometrischen Ort der Punkte, in welchen alle durch den Coordinatenanfang gehenden Secanten harmonisch getheilt werden, die Gleichung

$$4) \qquad Dx + Ey + F = 0,$$

d. i. die Gleichung einer geraden Linie. Der Coordinatenanfang kann hierbei ein ganz beliebiger Punkt in der Ebene der Linie zweiten Grades sein; wir wollen ihn Pol nennen; die durch die Gleichung 4) repräsentirte Gerade heisst dann die dem Pole zugehörige Polare. Da eine Gerade durch zwei ihrer Punkte bestimmt ist, so erhält man für jeden Kegelschnitt die Polare eines gegebenen Punktes durch harmonische Theilung zweier durch den Pol gehenden Secanten.

Legt man durch vier auf der Peripherie eines Kegelschnittes befindliche Punkte zwei sich schneidende Gerade, so lässt sich, wenn man den Durchschnittspunkt dieser beiden Geraden als Pol betrachtet, die zugehörige Polare mittelst der in §. 8 unter II. gefundenen Resultate mit blosser Anwendung des Lineals construiren. Wird dann durch den Pol eine Gerade nach einem fünften Kegelschnittspunkte gezogen, so muss auch diese durch die Polare und den Kegelschnitt harmonisch getheilt werden, wonach es leicht ist, den zweiten Durchschnittspunkt dieser Geraden und des Kegelschnittes, also einen sechsten Punkt der Curve aus fünf gegebenen zu ermitteln. Hierdurch ist die im Eingange des Paragraphen erwähnte Aufgabe gelöst. Es bleibt noch die Frage übrig, ob ausser dieser constructiven Anwendung den neu gewonnenen Begriffen des Poles und der Polare nicht weitere Deutungen für die Kegelschnitte abgewonnen werden können.

Wird ein ausserhalb des Kegelschnittes gelegener Punkt als Pol angenommen, so gehen die Secanten bei fortgesetzter Drehung um den Pol in Tangenten über. Im Berührungspunkte fallen dann zwei der harmonischen Punkte zusammen, folglich enthält er auch noch den dritten, und die Polare stellt die dem Pole zugehörende Berührungssehne dar. Wir schliessen hieraus, dass die in Fig. 24 und 25 für den Kreis gegebenen Tangentenconstructionen für alle Linien zweiten Grades Anwendung finden. Diese Bemerkungen werden bestätigt, wenn wir die Gleichung der Polare eines beliebigen Punktes aufsuchen und dieselbe mit den für die Berührungssehnen der einzelnen Kegelschnitte gefundenen Gleichungen zusammenhalten.

Verlegen wir den Coordinatenanfang mit paralleler Verschiebung der Achsen in einen Punkt $x_1 y_1$, so ist, wenn die neuen veränderlichen Coordinaten mit ξ und η bezeichnet werden,

$$x = \xi + x_1, \qquad y = \eta + y_1$$

zu setzen, und wir erhalten aus Nr. 1)

$$\begin{aligned} &A\xi^2 + B\eta^2 + 2C\xi\eta \\ &+ 2(Ax_1 + Cy_1 + D)\,\xi + 2(By_1 + Cx_1 + E)\,\eta \\ &+ Ax_1^2 + By_1^2 + 2Cx_1y_1 + 2Dx_1 + 2Ey_1 + F = 0. \end{aligned}$$

Hieraus lässt sich die Gleichung der Polare des Punktes $x_1 y_1$, da er Coordinatenanfang ist, in der Form der Gleichung 4) aufstellen. Kehren wir dabei zugleich zum ursprünglichen Systeme zurück, indem wir wieder

$$\xi = x - x_1, \qquad \eta = y - y_1$$

setzen, so folgt, wenn wir noch das von ξ und η freie Glied in

$$(Ax_1 + Cy_1 + D)\,x_1 + (By_1 + Cx_1 + E)\,y_1 + Dx_1 + Ey_1 + F$$

zerlegen, nach gehöriger Hebung als Gleichung der Polare für den Pol $x_1 y_1$:

$$5) \quad \left\{ \begin{aligned} &(Ax_1 + Cy_1 + D)\,x + (By_1 + Cx_1 + E)\,y \\ &\qquad + Dx_1 + Ey_1 + F = 0. \end{aligned} \right.$$

Ist nun die Linie zweiten Grades eine Parabel, so geht, wenn durch geeignete Transformation der Coordinaten ihre Gleichung in

$$y^2 = 2px$$

umgestaltet wird, Nr. 5) in

$$6) \qquad yy_1 = p\,(x + x_1)$$

über; für den Fall einer Ellipse oder Hyperbel folgt aus

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

für die Polare:

7) $$\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Die Gleichungen 6) und 7) gehören bekanntlich der Tangente im Punkte $x_1 y_1$ oder seiner Berührungssehne an, jenachdem dieser Punkt auf der Peripherie oder ausserhalb der Fläche des Kegelschnittes gelegen ist; dieselben Bedeutungen hat daher auch 5) für die durch die allgemeine Gleichung 1) repräsentirte Linie zweiten Grades.

Es bleibt noch übrig, die Eigenschaften der Polare für den Fall ausfindig zu machen, wenn der Pol innerhalb der Kegelschnittsfläche gelegen ist. Hierzu dient folgende Voruntersuchung.

Wird ein Punkt der X-Achse als Pol angenommen, so ist $y_1 = 0$, die Gleichung 5) der Polare geht folglich über in

8) $$(Ax_1 + D)x + (Cx_1 + E)y + Dx_1 + F = 0.$$

Schreiben wir diese Gleichung in der Form

9) $$(Ax + Cy + D)x_1 + Dx + Ey + F = 0,$$

so sehen wir, dass sie Befriedigung erlangt, wenn gleichzeitig die Relationen

10) $$\begin{cases} Ax + Cy + D = 0 \\ Dx + Ey + F = 0 \end{cases}$$

Geltung finden, dass also alle Polaren, die in der Gleichung 8) enthalten sind, durch den Durchschnittspunkt der beiden durch die Gleichungen 10) ausgedrückten Geraden hindurchgehen*). Nehmen wir diesen Punkt, um welchen sich die Polare dreht, während der Pol auf der X-Achse fortrückt, selbst wieder als Pol an und bezeichnen ihn mit mit $x_1 y_1$, so folgt aus 10)

$$Ax_1 + Cy_1 + D = 0$$
$$Dx_1 + Ey_1 + F = 0,$$

und mit Einsetzung dieser Werthe in 5) als Gleichung der Polare

$$y = 0,$$

d. i. die Gleichung der X-Achse. In Berücksichtigung des Umstandes, dass jede beliebige Gerade zur X-Achse gewählt werden kann, folgt hieraus der Satz: **Sämmtliche Polaren der Punkte einer Geraden schneiden sich in ein und demselben Punkte, nämlich im Pole jener Geraden.** Durch

*) Was die Bedeutung dieser beiden Geraden betrifft, so haben wir von der zweiten, deren Gleichung mit 4) übereinstimmt, bereits gesehen, dass sie die Polare des Coordinatenanfanges darstellt. Die erste ist nach §. 30 Nr. 6) der Durchmesser für die der X-Achse parallelen Sehnen.

Umkehrung dieses Satzes ergiebt sich: Die Pole aller Geraden, welche durch ein und denselben Punkt hindurchgehen, liegen in einer geraden Linie, nämlich in der Polare ihres Durchschnittspunktes.

Wir haben oben gesehen, dass die Polare eines Punktes ausserhalb der Fläche eines Kegelschnittes die Berührungssehne dieses Punktes darstellt. Legt man daher durch einen Punkt im Innern der Curve Sehnen, so bildet der Durchschnittspunkt jedes durch die Enden einer solchen Sehne gehenden Tangentenpaares den Pol dieser Geraden. Durch Verbindung dieser Bemerkung mit dem vorhergehenden Lehrsatze erhalten wir für die Polare eines Punktes innerhalb einer Linie zweiten Grades die Eigenschaft, dass sie den geometrischen Ort der Durchschnittspunkte aller derjenigen Tangentenpaare abgiebt, deren Berührungssehnen sich im zugehörigen Pole schneiden. Wählt man als Beispiel eines solchen Punktes einen Brennpunkt, so lässt sich aus einer der Gleichungen 2) oder 4) des §. 13 leicht herleiten, dass die zugeordnete Directrix seine Polare darstellt. Werden daher von beliebigen Punkten der Directrix eines Kegelschnittes Tangenten an die Curve gelegt, so gehen die Berührungssehnen dieser Tangenten sämmtlich durch den zugehörigen Brennpunkt.

§. 36.

Die Polargleichung der Linien zweiten Grades.

Nachdem wir bei allen früheren über Linien zweiten Grades geführten Untersuchungen uns fast ausschliesslich der Parallelcoordinaten bedient haben, wollen wir zum Schlusse unserer Betrachtungen noch die Gleichung dieser Linien in Polarcoordinaten — die sogenannte Polargleichung — aufstellen. Wählen wir, um zu möglichst allgemeingiltigen Resultaten zu gelangen, einen ganz beliebigen Punkt in der Ebene einer Linie zweiten Grades zum Pol (der hier nicht mit dem im vorigen Paragraphen angewendeten Begriffe gleiches Namens verwechselt werden darf) und eine in beliebiger Richtung hindurch gelegte Gerade zur Polarachse, so können wir ein rechtwinkliges Parallelcoordinatensystem zu Hilfe nehmen, dessen Achse der positiven x bei gleichem Anfangspunkte mit der Achse der Polarcoordinaten zusammenfällt. Von einer für letzteres System giltigen Gleichung gelangen wir bekanntlich zur Polargleichung durch die Substitutionen

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Werden nun diese Werthe in die vielbesprochene allgemeine Gleichung der Linien zweiten Grades eingesetzt, so ergiebt sich als allgemeinste Form der Polargleichung dieser Linien:

$$1)\quad \begin{cases} r^2(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi + 2C\sin\varphi\cos\varphi) \\ \quad + 2r(D\cos\varphi + E\sin\varphi) + F = 0. \end{cases}$$

Einfachere Gleichungsformen sind durch geschickt gewählte Lage des Poles und der Achse zu erzielen.

Wird in 1) auf r reducirt, so entsteht:

$$2)\qquad r = -\frac{D\cos\varphi + E\sin\varphi \pm \Omega}{A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi + 2C\sin\varphi\cos\varphi},$$

wobei zur Abkürzung

$$3)\ \Omega = \sqrt{(D\cos\varphi + E\sin\varphi)^2 - (A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi + 2C\sin\varphi\cos\varphi)F}$$

oder

$$4)\ \Omega^2 = (D^2 - AF)\cos^2\varphi + (E^2 - BF)\sin^2\varphi + (DE - CF)\sin 2\varphi$$

gesetzt ist. Soll die Gleichung 1) eine geometrische Deutung haben, so muss Ω reell, also Ω^2 positiv sein. Um zu einer Vereinfachung der Gleichungsform zu gelangen, werfen wir die Frage auf, ob es möglich ist, Lagen des Coordinatensystemes zu ermitteln, bei denen die Wurzelgrösse Ω constant, also unabhängig von der veränderlichen Anomalie φ wird. Gehen wir zunächst von speciellen Werthen der Variabeln φ aus und setzen

$\varphi = 0$, so wird $\Omega^2 = D^2 - AF$,

$\varphi = 90^0$, „ „ $\Omega^2 = E^2 - BF$,

$\varphi = 45^0$, „ „ $\Omega^2 = \frac{1}{2}(D^2 - AF) + \frac{1}{2}(E^2 - BF) + (DE - CF)$.

Alle drei Ausdrücke werden einander gleich, wenn die Beziehungen

$$5)\quad \begin{cases} D^2 - AF = E^2 - BF \\ DE - CF = 0 \end{cases}$$

Anwendung finden, und man erhält dann aus 4) allgemein

$$6)\qquad \Omega^2 = D^2 - AF = E^2 - BF,$$

d. i., wie verlangt wurde, einen constanten Werth.

Zur Ermittelung der Lage, welche der Coordinatenanfang haben muss, damit die in 5) aufgestellten Bedingungen erfüllt werden, kehren wir zum rechtwinkligen Systeme zurück. Wird in der für dieses Coordinatensystem geltenden allgemeinen Gleichung der Linie zweiten Grades mit F multiplicirt, so lässt sich das hierdurch entstehende Resultat

$$AFx^2 + BFy^2 + 2CFxy + 2DFx + 2EFy + F^2 = 0,$$

wenn man noch den Ausdruck

$$D^2x^2 + E^2y^2$$

addirt und subtrahirt, auf die Form

$$D^2x^2 + E^2y^2 + 2CFxy + 2DFx + 2EFy + F^2$$
$$= (D^2 - AF)\,x^2 + (E^2 - BF)\,y^2,$$

bringen, und hieraus wird bei Geltung der Bedingungen 5)

$$D^2x^2 + E^2y^2 + 2DExy + 2DFx + 2EFy + F^2$$
$$= (D^2 - AF)\,(x^2 + y^2)$$

oder nach einfacher Umgestaltung

7) $$x^2 + y^2 = \frac{(Dx + Ey + F)^2}{\Omega^2}.$$

Diese Gleichungsform muss also der Linie zweiten Grades in rechtwinkligen Coordinaten angehören, wenn in der Polargleichung die erzielte Vereinfachung eintreten soll.

Wird in 7) eine neue Constante ε eingeführt, welche an Ω durch die Relation

$$\Omega^2 = \frac{D^2 + F^2}{\varepsilon^2}$$

gebunden ist, so geht diese Gleichung über in

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2\left[\frac{(Dx + Ey + F)^2}{D^2 + F^2}\right],$$

und hieraus entsteht, wenn wir

$$x^2 + y^2 = r^2,$$
$$\frac{(Dx + Ey + F)^2}{D^2 + F^2} = z^2$$

setzen,

$$r^2 = \varepsilon^2 z^2,$$

oder in der ersten Potenz bei Voraussetzung positiver r und z

8) $$r = \varepsilon z.$$

Aus §. 6 Nr. 7) wird leicht hergeleitet, dass hierin z die Entfernung des Curvenpunktes xy von einer Geraden ausdrückt, deren Gleichung

$$Dx + Ey + F = 0$$

lautet, d. i. mit Rücksicht auf Nr. 4) des vorhergehenden Paragraphen die Entfernung von der dem Coordinatenanfange zugehörigen Polare. Da nun r den Abstand desselben Punktes xy vom Coordinatenanfange darstellt, so folgt aus Vergleichung von 8) mit §. 13 Nr. 1), dass der Pol, für welchen die Polargleichung einer Linie zweiten Grades die gewünschte einfachere Form erlangt, ein Brennpunkt, seine Polare die zugeordnete Directrix sein muss.

Nehmen wir jetzt, um diese einfachere Form zur Anwendung zu bringen, einen Brennpunkt als Pol, so kann die zugehörige Polargleichung aus 1) oder 2) hergeleitet werden, indem man die in 5) aufgestellten Bedingungen darin einführt, was im Wesentlichen darauf hinauskommt, die Gleichung 7) in Polarcoordinaten umzusetzen. Da wir jedoch bereits wissen, dass hier keine anderen Linien als Kegelschnitte in Frage kommen, so gelangen wir einfacher zum Ziele, wenn wir zur Gleichung 6) des §. 13 zurückgehen, in welcher ein Brennpunkt den Coordinatenanfang und die hindurchgehende Achse des Kegelschnittes die X-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems darstellte. Mittelst einfacher Umgestaltung gewinnt diese Gleichung die Form

$$x^2 + y^2 = p^2 + 2p\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2,$$

wobei bekanntlich p den Halbparameter und ε die numerische Excentricität bedeutet. Man erhält hieraus:

$$r^2 = (p + \varepsilon x)^2,$$

und hieraus wieder, wenn man die Leitstrahlen solcher Punkte, welche von dem zunächst am Brennpunkte befindlichen Scheitel aus nach der Seite der positiven x hin gelegen sind, als positive Grössen in Rechnung zieht,

$$9) \qquad r = p + \varepsilon x^{*}).$$

Denken wir uns nun durch den Brennpunkt als Pol die Achse der Polarcoordinaten in beliebiger Richtung gelegt, so dass sie mit der jetzigen Achse der x einen Winkel α einschliesst, so ist

$$x = r \cos(\varphi + \alpha)$$

zu setzen, wodurch die aus Coordinaten beiderlei Art gemischte Gleichung 9) in

$$r = p + \varepsilon r \cos(\varphi + \alpha)$$

übergeht. Wird hierin auf r reducirt, so ergiebt sich

$$10) \qquad r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(\varphi + \alpha)}$$

als allgemeine Gleichung der Kegelschnitte für jedes Polarcoordinatensystem, dessen Pol mit einem Brennpunkte zusammenfällt. Soll die Polarachse mit der die Brennpunkte enthaltenden Kegelschnittsachse identisch sein, so hat man, wenn die Anomalien von

---

*) Dieselbe Gleichung kann, wenn wir sie mit Einführung des zwischen Brennpunkt und Directrix befindlichen Abstandes d in der Form

$$r = \varepsilon(d + x)$$

schreiben, auch unmittelbar aus §. 13 Nr. 1) hergeleitet werden.

dem Scheitel aus gezählt werden, welcher dem angenommenen Pole zunächst liegt, $\alpha = 180^0$ zu setzen; zählt man dagegen von der entgegengesetzten Richtung aus, so wird $\alpha = 0$. Im ersteren Falle erhält die Polargleichung die Gestalt

$$11)\qquad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi},$$

im zweiten geht sie über in

$$12)\qquad r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}.$$

Für den speciellen Fall der Parabel, wo $\varepsilon = 1$ ist, wird die erste Gleichung zu

$$13)\qquad r = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}},$$

die zweite erlangt die Form

$$14)\qquad r = \frac{p}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Beide letzte Gleichungen lassen einfache geometrische Darstellungen zu und können zur Construction von Parabelpunkten benutzt werden.

Sowie die analytische Untersuchung der für Parallelcoordinaten aufgestellten Gleichungen der Linien zweiten Grades zur Ermittelung geometrischer Eigenschaften dieser Linien angewendet wurde, so kann in ähnlicher Weise auch mit der Polargleichung operirt werden. Wir beschränken uns in dieser Hinsicht auf folgende zwei Erörterungen, die sich am einfachsten an die Form der Gleichung 10) anschliessen.

I. Sind r und φ, r' und φ' die Coordinaten der Endpunkte einer durch den als Pol gewählten Brennpunkt gehenden Sehne, so ist, da r und r' nach entgegengesetzten Richtungen liegen,

$$\varphi' = \varphi + 180^0.$$

Aus 10) folgt dann:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - \varepsilon \cos(\varphi + \alpha)}{p}$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1 + \varepsilon \cos(\varphi + \alpha)}{p},$$

und hieraus wieder:

$$\frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}}{2} = \frac{1}{p}.$$

Dies giebt den Satz: **Jede durch einen Brennpunkt eines Kegelschnittes gelegte Sehne wird in diesem Punkte so getheilt, dass das harmonische Mittel ihrer beiden Abschnitte beständig dem Halbparameter gleich ist.**

II. Beachten wir, dass die Gleichung 10) drei beständige Grössen α, ε und p enthält, so zeigt sich sofort, dass zur Bestimmung eines Kegelschnittes, sobald ein Brennpunkt bekannt ist, noch drei von einander unabhängige Bedingungen hinzutreten müssen. Angenommen nun, es seien drei Peripheriepunkte gegeben, so gilt für jeden dieser Punkte eine Gleichung, welche die Form von Nr. 10) besitzt, und, wie bereits oben angegeben wurde, in der Gestalt

$$r = p + \varepsilon r \cos(\varphi + \alpha)$$

geschrieben werden kann. Hieraus folgt, wenn man $\cos(\varphi + \alpha)$ entwickelt und die Abkürzungen

15) $$\varepsilon \cos \alpha = \beta, \qquad \varepsilon \sin \alpha = \gamma$$

anwendet,

$$r = p + \beta r \cos \varphi - \gamma r \sin \varphi.$$

Nimmt man hierauf noch in der bekannten Weise ein rechtwinkliges System zu Hilfe, für welches die Beziehungen

$$r \cos \varphi = x, \qquad r \sin \varphi = y$$

gelten, so entsteht die Gleichung:

16) $$r = p + \beta x - \gamma y.$$

Durch jeden der gegebenen Punkte sind drei zusammengehörige Werthe von r, x und y bestimmt; mittelst dreier Punkte können also drei Gleichungen von der Form 16) aufgestellt und daraus p, β, γ mit Benutzung der gewöhnlichen Eliminationsmethoden berechnet werden. Da jede dieser Gleichungen in Beziehung auf die Unbekannten dem ersten Grade angehört, so erhalten diese Grössen einfache reelle Werthe. Dies giebt den Satz: **Durch drei Punkte kann nur ein Kegelschnitt gelegt werden, wenn einer seiner Brennpunkte bekannt ist.**

Von den berechneten Constanten der Gleichung 16) gelangt man zu den in der Polargleichung 10) enthaltenen beständigen Grössen ε und α mittelst der aus 15) folgenden Relationen:

$$\varepsilon^2 = \beta^2 + \gamma^2, \qquad \tan \alpha = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Wird endlich in 16) auch r durch die rechtwinkligen Coordinaten

x und y ausgedrückt, so lässt sich diese Gleichung mit Anwendung der Beziehung $\varepsilon^2 = \beta^2 + \gamma^2$ in

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 \left[\frac{(p + \beta x - \gamma y)^2}{\beta^2 + \gamma^2} \right]$$

umgestalten. Hierin bedeutet wieder der Inhalt der rechter Hand befindlichen Parenthese das Quadrat der Entfernung des Punktes xy von einer Geraden, deren Gleichung

$$17)\qquad p + \beta x - \gamma y = 0$$

lautet, woraus wir in ähnlicher Weise wie oben bei Nr. 7) folgern, dass diese Gerade die dem Pole zugeordnete Directrix darstellt.

Die eben behandelte Aufgabe, die Gleichung eines Kegelschnittes zu ermitteln, für welchen ein Brennpunkt und drei Peripheriepunkte gegeben sind, ist besonders in der Astronomie für die Theorie der Planetenbewegung von Wichtigkeit.

Neuntes Capitel.

Linien höherer Grade.

§. 37.

Allgemeine Bemerkungen.

cher Weise, wie im vorigen Capitel durch Discussion der
inen Gleichung zweiten Grades zwischen zwei Veränder-
ie Formen der diesem Grade angehörigen Linien und ihre
eristischen Eigenschaften ermittelt wurden, kann die Auf-
stellt werden, auch solche Linien, in denen die Coordina-
einzelnen Punkte für ein beliebiges Coordinatensystem
ine Gleichung dritten, vierten Grades u. s. f. an einander
en sind, einer ähnlichen Betrachtung zu unterwerfen. Es
ch leicht zu übersehen, dass ein weiteres Fortschreiten auf
Wege zu völlig endlosen Untersuchungen hinführen muss *);
geringeren praktischen Wichtigkeit, welche ohnedies die
hl solcher Linien besitzt, werden wir uns daher darauf be-
en müssen, neben einigen allgemeinen Bemerkungen we-
rmen als Beispiele herauszugreifen. Zuvor haben wir ein
egriffsbestimmungen und Bezeichnungen vorauszuschicken,
ıen im Folgenden mehrfach Anwendung gemacht werden

ıd zwei veränderliche Grössen x und y durch irgend eine
ıng von einander abhängig gemacht, so dass zu jedem will-

Euler unterscheidet sechszehn Geschlechter von Linien dritten
welche eine Menge durch Form verschiedene Unterarten in sich
n, von denen Newton bereits zwei und siebenzig aufgezählt hatte.
ten Grade sind nach Euler hundert und sechs und vierzig Ge-
er mit einer beträchtlich grösseren Menge von Arten enthalten.

kürlich angenommenen Werthe des x ein aus der Gleichung hervorgehender Werth von y gehört, so nennt man, abgesehen von der besonderen Form der Gleichung, y eine **Function** von x. Zur Bezeichnung der Functionen bedient man sich der Buchstaben F, f, φ, ψ und ähnlicher; Gleichungen von der Form

$$y = F(x), \quad y = f(x), \quad y = \varphi(x), \quad y = \psi(x)$$

sagen daher nichts weiter aus, als dass jedem willkürlichen Werthe des x ein von einer Gleichung abhängiger Werth von y entspricht. $F(x)$, $f(x)$ u. s. f. bedeuten hierbei beliebige nicht näher bestimmte Rechnungsausdrücke, in welchen die veränderliche Grösse x vorkommt. Jede Gleichung, wie

$$y = f(x),$$

kann, so lange den x reelle Werthe von y zugehören, in einer Ebene mittelst Parallelcoordinaten durch den stetigen Verlauf einer Linie dargestellt werden.

In ganz ähnlicher Weise bezeichnet man mit $F(x, y)$, $f(x, y)$ u. s. w. solche nicht näher bestimmte Ausdrücke, welche zwei veränderliche Grössen x und y enthalten und die wieder Functionen dieser Grössen genannt werden. Gleichungen von der Form

$$F(x, y) = 0, \quad f(x, y) = 0$$

sind das allgemeine Symbol aller auf Null gebrachten unentwickelten Gleichungen zwischen den Variabeln x und y.

Enthalten die Functionen $f(x)$ oder $F(x, y)$ in Beziehung auf ihre veränderlichen Grössen keine anderen Operationen, als die des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens, Dividirens und Potenzirens mit constanten Exponenten, worin auch das Wurzelausziehen mit begriffen ist, so heissen sie **algebraische Functionen**. Die Gleichung

$$1) \qquad F(x, y) = 0$$

stellt dann eine **algebraische Gleichung** dar und eine dadurch repräsentirte krumme Linie wird durch Uebertragung des Namens eine **algebraische Curve** genannt. Durch bekannte Hilfsmittel der Algebra kann jede algebraische Gleichung zwischen

---

Neuere haben, von anderen Eintheilungsgründen ausgehend, andere Classificationen gefunden; immer aber ist man zu der Erkenntniss gelangt, dass in den höheren Graden die Zahl der möglichen Formen so beträchtlich wächst, dass man sich bald, abgesehen von der Unzulänglichkeit der mathematischen Hilfsmittel, genöthigt sieht, die Fortsetzung einer derartigen Untersuchung aufzugeben.

x und y so umgeformt werden, dass ihr auf Null gebrachter Ausdruck eine Summe von Gliedern von der Form

$$Cx^p y^q$$

enthält, wobei C einen beliebigen beständigen Coefficienten bedeutet, die constanten Exponenten p und q dagegen positive ganze Zahlen, Null mit eingeschlossen, ausdrücken. Ist diese Umgestaltung eingetreten, so heisst die linke Seite der Gleichung 1) eine ganze rationale Function von x und y; die Summe $p+q$ giebt die Dimension an, welcher das Glied $Cx^p y^q$ angehört, und die höchste in der Gleichung vorkommende Dimension bestimmt bekanntlich den Grad der Gleichung.

Was nun die Linien höherer Grade betrifft, so wurde bereits auf Seite 39 bemerkt, dass unter einer Linie n^{ten} Grades eine solche zu verstehen sei, deren für Parallelcoordinaten aufgestellte Gleichung diesem Grade angehört. Die allgemeine Form dieser Gleichung lässt eine doppelte Anordnung zu, jenachdem man diejenigen Glieder zusammenfasst, welche dieselbe Potenz einer Veränderlichen, z. B. der Abscisse x, enthalten, oder die Glieder gleicher Dimensionen combinirt. Im ersten Falle hat man

$$2)\quad \begin{cases} Ax^n + (A_1 y + B)x^{n-1} + (A_2 y^2 + B_1 y + C)x^{n-2} \\ \quad + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad + (A_{n-1} y^{n-1} + B_{n-2} y^{n-2} + \ldots + L_1 y + M)x \\ \quad + (A_n y^n + B_{n-1} y^{n-1} + \ldots + M_1 y + N) = 0, \end{cases}$$

im andern besitzt die Gleichung die Form:

$$3)\quad \begin{cases} Ax^n + A_1 x^{n-1} y + A_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + A_{n-1} x y^{n-1} + A_n y^n \\ \quad + Bx^{n-1} + B_1 x^{n-2} y + \ldots + B_{n-2} x y^{n-2} + B_{n-1} y^{n-1} \\ \quad + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad + (Lx^2 + L_1 xy + L_2 y^2) + (Mx + M_1 y) + N = 0. \end{cases}$$

Beliebig viele der Coefficienten A, B, C u. s. f. können hierin gleich Null sein, nur selbstverständlich nicht gleichzeitig alle diejenigen, welche der höchsten Dimension angehören.

Sollen unter diesen Linien nicht immer wieder alle die auftreten, welche niederern Graden angehören, wie wir z. B. unter den Linien zweiten Grades geradlinige Gebilde aufgefunden haben, so müssen wir bei der geometrischen Deutung algebraischer Gleichungen aus jedem Grade diejenigen ausscheiden, welche sich in rationale Factoren niederer Grade zerlegen lassen. Sobald nämlich

$$4)\qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0$$

die Gleichungen zweier Linien darstellen, so geschieht der durch Multiplication dieser beiden Ausdrücke entstehenden Gleichung

$$5)\qquad \varphi(x,y)\,.\,\psi(x,y)=0$$

durch die Coordinaten eines jeden Punktes Genüge, welcher auf einer von jenen beiden Linien gelegen ist, indem dann allemal ein Factor von 5) zu Null wird. Die letzte Gleichung stellt also beide in Nr. 4) enthaltenen Linien gleichzeitig dar. Sind nun $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ zwei algebraische Functionen des p^{ten} und q^{ten} Grades, so giebt Nr. 5) eine algebraische Gleichung des $(p+q)^{ten}$ Grades, in welcher jedoch nur das System zweier Linien niederer Grade enthalten ist. So drückt z. B. unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystems die dem dritten Grade angehörende Gleichung

$$x^3-y^3-x^2y+xy^2-r^2x+r^2y=0$$

einen Kreis und eine Gerade aus, weil sie in

$$(x^2+y^2-r^2)(x-y)=0$$

zerlegt werden kann; die Gleichung

$$x^3+xy^2-2ay^2=0$$

dagegen, bei welcher keine solche Zerlegung möglich ist, repräsentirt eine eigentliche Linie dritten Grades. — Bei Anwendung der erwähnten Ausschliessung fallen alle dem ersten Grade angehörenden geradlinigen Gebilde aus; es bleiben also nur krumme Linien für die höheren Grade übrig, wenn wir noch von allen solchen Gleichungen absehen, die entweder nur einzelne Punkte darstellen oder gar keine geometrische Bedeutung haben*).

Beschränken wir uns nach dem Vorhergehenden auf die Curven höherer Grade, so lässt sich rücksichtlich ihrer der allgemeine Satz aufstellen, dass **jede Linie n^{ten} Grades von einer Geraden in nicht mehr als n Punkten geschnitten werden kann.** Um diesen Satz zu beweisen, können wir uns zuvor das Coordinatensystem so verlegt denken, dass die zu untersuchende Gerade zur Abscissenachse wird. Der Allgemeinheit der Untersuchung geschieht hierdurch kein Eintrag, weil bei der Transformation der Coordinaten der Grad der Gleichung ungeändert

---

*) Der erste dieser beiden Fälle findet statt, sobald die Gleichung so beschaffen ist, dass sie nur für einige bestimmte Werthe von x reelle Werthe von y giebt; der andere, wenn kein reeller Werth von x reelle Werthe von y zulästt. Beispiele hierfür haben wir bereits beim zweiten Grade kennen gelernt.

bleibt*). Setzen wir nun für die gemeinschaftlichen Punkte mit Rücksicht auf die Gleichung der X-Achse in der allgemeinen Gleichung 2) $y = 0$, so bleibt:

6) $$A x^n + B x^{n-1} + C x^{n-2} + \ldots + M x + N = 0.$$

Dieser Bedingung kann auf doppelte Weise genügt werden, entweder durch jedes mögliche x, wenn alle Coefficienten A, B, $C \ldots N$ einzeln gleich Null sind, oder ausserdem nur durch solche x, welche sich als Wurzeln von Nr. 6) bewähren. Im ersten Falle besitzen alle von Null verschiedenen Glieder der allgemeinen Gleichung 2) den Factor y; die Gleichung selbst zerfällt also in zwei Factoren, von denen einer dem nächst niederen Grade angehört, der andere die Gleichung der Abscissenachse $y = 0$ darstellt. Es kann also in diesem Falle von einer eigentlichen Linie n^{ten} Grades nicht die Rede sein. Bleiben nun für eine solche Curve die x der gesuchten Durchschnittspunkte lediglich als Wurzeln der Gleichung 6) zu bestimmen, so sind nach der Form dieser Gleichung höchstens n von einander verschiedene reelle Werthe, also auch nicht eine grössere Zahl von Durchschnittspunkten möglich. Kleiner kann die Anzahl dieser Punkte sein, wenn einige Coefficienten der Anfangsglieder in 6) gleich Null sind oder wenn diese Gleichung gleiche oder imaginäre Wurzeln enthält.

Durch Anwendung der Theorie der algebraischen Gleichungen höherer Grade mit zwei Unbekannten wird der vorhergehende Satz dahin erweitert, dass eine Linie m^{ten} Grades und eine Linie n^{ten} Grades höchstens mn Punkte gemein haben.

Wir wenden uns nach diesen Vorbemerkungen zur Betrachtung einiger besonderer Linien höherer Grade.

§. 38.

Parabolische Curven.

In analytischer Beziehung sind unter den Linien eines jeden Grades diejenigen die einfachsten, deren entwickelte Gleichung eine der beiden veränderlichen Coordinaten nur in der ersten Po-

*) Es leuchtet sofort ein, dass durch Anwendung der dem ersten Grade angehörenden Transformationsformeln der Grad einer algebraischen Gleichung nicht erhöht werden kann; eine Erniedrigung des Grades in der Art, dass etwa alle Glieder der höchsten Dimension in Wegfall kämen, ist aber deshalb nicht möglich, weil sonst bei der Rückkehr zum ursprünglichen Systeme eine Erhöhung eintreten müsste.

tenz enthält, für welche also z. B. die Ordinate eine ganze rationale Function der Abscisse bildet. Die Gleichung muss dann die Form

1) $$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

besitzen, oder durch Transformation der Coordinaten auf diese Form gebracht werden können. Linien dieser Art werden parabolische Curven genannt; Nr. 1) ist die allgemeine Gleichung einer parabolischen Curve n^{ten} Grades, wobei natürlich vorausgesetzt wird, dass $A_n \gtrless 0$ ist. Was die Gestalt solcher Linien betrifft, so kann sie je nach dem Grade der Gleichung und der Grösse der Coefficienten mannichfach wechseln; immer aber bleibt das Merkmal gemeinschaftlich, dass die Linie aus einem zu beiden Seiten der Y-Achse sich ins Unendliche erstreckenden zusammenhängenden Zuge besteht, weil aus Nr. 1) zu jedem beliebigen x ein zugehöriges y berechnet werden kann. Da die Gleichung hierbei jedesmal einen einzigen Werth von y giebt, so folgt, dass jede Parallele zur Y-Achse die parabolische Curve nur in einem Punkte schneidet.

Besonders wichtig für die Theorie der parabolischen Curven ist die Aufgabe, eine Linie dieser Art durch gegebene Peripheriepunkte zu bestimmen. Was zunächst die Zahl der hierzu nöthigen Punkte betrifft, so lässt sich leicht übersehen, dass $(n + 1)$ Punkte gegeben sein müssen, sobald die Lage der Coordinatenachsen bestimmt ist und die Curve dem n^{ten} Grade angehört. Da nämlich die allgemeine Gleichung 1) von $(n + 1)$ Constanten $A_0, A_1, A_2, \dots A_n$ abhängt, so muss zur Ermittelung dieser beständigen Grössen eine gleiche Anzahl von Bedingungsgleichungen vorhanden sein. Aus den Coordinaten eines jeden gegebenen Punktes folgt aber eine Bedingungsgleichung von der Form 1). Durch Anwendung der gewöhnlichen Eliminationsmethoden findet sich dann für jede der Unbekannten ein einfacher reeller Werth, weil die obige Gleichung in Beziehung auf ihre Coefficienten dem ersten Grade angehört. Es ist hierbei nicht ausgeschlossen, dass die Coefficienten der höchsten Potenzen auch den Werth Null erhalten können. Dann ist die entstehende Gleichung von einem niederern Grade und es ist überhaupt nicht möglich, durch die gegebenen Punkte eine parabolische Curve n^{ten} Grades zu legen. So wird man z. B. stets auf eine Gleichung vom ersten Grade stossen, wenn die gegebenen Punkte sämmtlich einer Geraden angehören.

Soll nun bei vorausbestimmter Lage der Coordinatenachsen eine parabolische Curve durch n Punkte $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, ... $x_n y_n$ gelegt werden, so kann nach dem Vorhergehenden ihre Gleichung den Grad $n - 1$ nicht übersteigen. Es lässt sich daher im Voraus die allgemeine Form

$$2) \qquad y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1}$$

festsetzen, wofür dann mittelst der Coordinaten der gegebenen Punkte in der oben angeführten Weise die Coefficienten berechnet werden können. Da jedoch eine solche Rechnung nicht immer ganz frei von Weitläufigkeiten ist, so erscheint es zweckmässig, ein für allemal eine allgemein giltige Formel für dergleichen Fälle festzustellen. Man gelangt zu einer solchen durch die folgende Betrachtung.

Da aus den gegebenen Punkten nur eine Gleichung von der Form 2) folgen kann, so muss eine auf irgend einem Wege erhaltene Gleichung dieser Art das gewünschte Resultat liefern, wenn sie den Coordinaten aller n Punkte Genüge leistet. Setzen wir nun

$$3) \qquad y = X_1 y_1 + X_2 y_2 + X_3 y_3 + \ldots + X_n y_n,$$

worin X_1, X_2, X_3, ... X_n vorläufig noch unbestimmte Functionen von x bezeichnen, so kommt die rechte Seite dieser Gleichung in ihrer Form mit der rechten Seite von 2) in Uebereinstimmung, wenn jeder der Coefficienten X_1, X_2 u. s. f. eine ganze rationale Function von x vom Grade $n - 1$ darstellt, oder die Form

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$$

besitzt. Durch Addition derjenigen Glieder, welche gleiche Potenzen von x enthalten, entsteht nämlich in diesem Falle eine Gleichung, deren Gestalt vollständig mit Nr. 2) übereinstimmt. Soll nun diese Gleichung den Coordinaten eines beliebigen Punktes $x_r y_r$ entsprechen, so muss in 3) für $x = x_r$ auch $y = y_r$ werden, d. h. die Functionen X_1, X_2, ... X_{r-1}, X_{r+1}, ... X_n müssen in Null übergehen, während $X_r = 1$ wird. Man sieht hieraus, dass der beliebige Coefficient X_r die Eigenschaft besitzen muss, zu Null zu werden, sobald x einen der Werthe x_1, x_2, ... x_{r-1}, x_{r+1}, ... x_n erlangt, dass er dagegen für $x = x_r$ in Eins überzugehen hat.

Wird mit Einführung einer vorläug noch unbestimmt bleibenden beständigen Grösse k

$$X_r = k\,(x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_{r-1})\,(x - x_{r+1}) \ldots (x - x_n)$$

gesetzt, so sind hierdurch die beiden Bedingungen erfüllt, dass X_r eine ganze rationale Function von x vom Grade $n - 1$ darstellt

und sich in Null verwandelt, sobald man darin das x eines der gegebenen Punkte, mit Ausnahme von x_r, substituirt. Es erübrigt noch, den Factor k so zu bestimmen, dass $X_r = 1$ wird, wenn man $x = x_r$ werden lässt. Hieraus folgt:

$$1 = k\,(x_r - x_1)\,(x_r - x_2)\ldots(x_r - x_{r-1})\,(x_r - x_{r+1})\ldots(x_r - x_n),$$

und wenn man mit dieser Gleichung in die vorhergehende dividirt, so entsteht die Formel:

$$X_r = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{r-1})(x - x_{r+1})\ldots(x - x_n)}{(x_r - x_1)(x_r - x_2)\ldots(x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1})\ldots(x_r - x_n)},$$

wodurch der Werth eines der gesuchten Coefficienten bestimmt ist. Drückt man in gleicher Weise auch die übrigen Coefficienten aus, indem man der Reihe nach $r = 1, 2, 3, \ldots n$ setzt, so geht die Gleichung 3) über in:

$$4)\quad \left\{\begin{aligned} y = {} & \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\ldots(x_1 - x_n)}\cdot y_1 \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)\ldots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\ldots(x_2 - x_n)}\cdot y_2 \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)\ldots(x - x_n)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)\ldots(x_3 - x_n)}\cdot y_3 \\ & + \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)\ldots(x_n - x_{n-1})}\cdot y_n. \end{aligned}\right.$$

Durch Ausführung der Multiplicationen kann in jedem speciellen Falle diese Gleichung auf die Form von Nr. 2) zurückgeführt werden. Soll z. B. die Gleichung einer parabolischen Curve zweiten Grades*) gesucht werden, in welcher zu den Abscissen $x_1 = -1$, $x_2 = +1$, $x_3 = +2$ der Reihe nach die Ordinaten $y_1 = +6$, $y_2 = +2$, $y_3 = +3$ gehören, so folgt aus 4):

$$y = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}\cdot 6 + \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)}\cdot 2 + \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)}\cdot 3,$$

und hieraus findet sich nach gehöriger Reduction:

$$y = x^2 - 2x + 3.$$

---

*) Die parabolische Curve zweiten Grades ist eine Parabel, deren Achse parallel zur Y-Achse läuft und für welche die X-Achse mit der Tangente des in der Y-Achse gelegenen Peripheriepunktes gleiche Richtung hat. Man bemerkt dies, wenn man die Gleichung

$$y = A_0 + A_1\,x + A_2\,x^2$$

auf die Form

$$y - A_0 + \frac{A_1^2}{4A_2} = A_2\left(x + \frac{A_1}{2A_2}\right)^2$$

Die Formel 4) ist insofern von besonderer Wichtigkeit, als sie, abgesehen von ihrer Bedeutung für die Theorie der parabolischen Curven, die Lösung der algebraischen Aufgabe enthält, eine ganze rationale Function von x zu finden, deren Werthe für n bestimmte Grössen von x bekannt sind. Sie führt bei Anwendung zu diesem Zwecke den Namen der Interpolationsformel von Lagrange.

§. 39.

Die Parabelevolute.

Nachdem wir im vorhergehenden Paragraphen eine ganze Classe von Linien höherer Grade betrachtet haben, gehen wir jetzt dazu über, die Gleichungen einiger besonderen häufiger vorkommenden Curven aus gegebenen Entstehungsgesetzen zu entwickeln. Wir wählen hierzu solche Beispiele, welche sich in einfacher Weise an die Theorie der Linien zweiten Grades anschliessen.

Der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte einer gegebenen Curve wird die Evolute dieser Linie genannt; die ursprüngliche Curve selbst führt dabei in ihrer Beziehung zur Evolute den Namen Evolvente. Was im Allgemeinen den Weg betrifft, auf welchem die Gleichung einer Evolute gefunden werden kann, so müssen zuvor die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes xy als Functionen des zugehörigen Punktes $x_1 y_1$ der Evolvente gegeben sein. Man hat dann zwei Gleichungen von der Form

$$x = \varphi(x_1, y_1), \qquad y = \psi(x_1, y_1).$$

Wird hierzu die Bedingung gefügt, dass sich der Punkt $x_1 y_1$ auf der Peripherie der Evolvente befinden soll, deren Gleichung

$$F(x_1, y_1) = 0$$

sein mag, so liegen nun drei Gleichungen vor, aus denen die Coordinaten des besonderen Curvenpunktes $x_1 y_1$ eliminirt werden

---

bringt. Setzt man nachher mit Verschiebung des Coordinatenanfanges und Vertauschung der Achsen

$$x + \frac{A_1}{2A_2} = \eta, \qquad y - A_0 + \frac{A_1^2}{4A_2} = \xi,$$

so entsteht:

$$\eta^2 = \frac{\xi}{A_2},$$

d. i. eine Gleichung von der in §. 17 Nr. 8) besprochenen Form.

können. Es bleibt hiernach eine Gleichung zwischen x und y übrig, die sich, unabhängig von der Lage des Punktes $x_1 y_1$, auf alle Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Curve bezieht; dies ist also die Gleichung der gesuchten Evolute. — Zur Anwendung dieser Theorie stellen wir uns die Aufgabe, die Gleichung und aus dieser die Gestalt der Parabelevolute zu ermitteln.

Wird die Achse der Parabel zur Y-Achse und ihre Scheiteltangente zur Y-Achse genommen, so gelten nach §. 18 Nr. 9) und 10) für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes die Gleichungen

$$x = p + 3x_1, \qquad y = -\frac{y_1^3}{p^2},$$

wobei der Punkt $x_1 y_1$ als Parabelpunkt noch der Gleichung

$$y_1^2 = 2px_1$$

zu genügen hat. Berechnet man aus den beiden ersten Gleichungen x_1 und y_1, und substituirt diese Werthe in der letzten Gleichung, so entsteht:

$$(\sqrt[3]{-p^2 y})^2 = 2p\left(\frac{x-p}{3}\right),$$

und hieraus nach gehöriger Reduction:

$$1) \qquad y^2 = \frac{8}{27} \cdot \frac{(x-p)^3}{p}.$$

Die Parabelevolute ist also eine Linie dritten Grades. Was ihre Gestalt betrifft, so folgt aus dem Umstande, dass in der Gleichung 1) die Ordinate nur in der zweiten Potenz vorkommt, die Symmetrie der Curve in Beziehung auf die Parabelachse. Dabei wird y für $x < p$ imaginär, für $x = p$ ist $y = 0$, für $x > p$ dagegen besitzt y immer reelle Werthe und sein Zahlenwerth wächst mit x ins Unendliche. Einfacher noch als aus Nr. 1) lassen sich die Eigenschaften unserer Curve übersehen, wenn man durch parallele Verschiebung der Y-Achse den Coordinatenanfang in den der X-Achse angehörenden Peripheriepunkt verlegt, welcher $x = p$ und $y = 0$ zu Coordinaten hat*). Bezeichnet man die neuen Coordinaten mit x' und y', so ist

$$x = x' + p, \qquad y = y'$$

zu setzen, und wenn man sich ausserdem noch der Abkürzung

$$2) \qquad k = \frac{27}{8} p$$

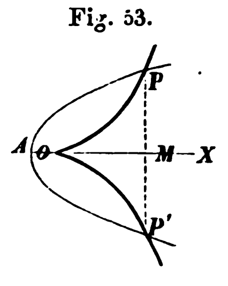
bedient, so wird die Gleichung der Evolute zu

*) Es ist dies der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel der Parabel.

3) $$k y'^2 = x'^3.$$

iese Form der Gleichung zeigt sofort, dass von $x' = 0$ an die ısoluten Werthe von y' gleichzeitig mit den x', aber in einem ärkeren Verhältnisse als diese wachsen. Die Evolute erhält hierırch die Gestalt der Curve POP' (Fig. 53), ır welche PAP' die zugehörige Parabel darellt. Da in letzterer, im Gegensatze zu ihrer volute, die Ordinaten nicht so stark als die bscissen wachsen, so schneiden sich die bei-ın Linien zu beiden Seiten der X-Achse in vei Punkten P und P'. Für diese Punkte gel-n die Gleichungen beider Curven, also, wenn ir zu A als Coordinatenanfang zurückkehren,

Fig. 53.



$$y^2 = 2px, \quad y^2 = \tfrac{8}{27}\frac{(x-p)^3}{p},$$

oraus für die x gemeinschaftlicher Punkte die Gleichung

$$(x-p)^3 = \tfrac{27}{4} p^2 x$$

ırvorgeht. Diese Gleichung hat zwar lauter reelle Wurzeln, ımlich

$$x_1 = 4p, \quad x_2 = x_3 = -\tfrac{1}{2}p;$$

e beiden letzten sind aber in unserem Falle deshalb unzulässig, eil zu ihnen in beiden Curven imaginäre y gehören. Es bleibt ıher nur $AM = 4p = 4AO$.

Soll die Parabelevolute unabhängig von ihrer Evolvente darıstellt werden, so eignet sich hierzu am besten die Einführung ın Polarcoordinaten. Nehmen wir nämlich O zum Pol und OX ır Polarachse, so folgt aus Nr. 3)

4) $$k r^2 \sin^2\varphi = r^3 \cos^3\varphi$$

ıd hieraus

5) $$r = k \tan^2\varphi \sec\varphi,$$

onach die Leitstrahlen der einzelnen Punkte leicht construirt erden können*).

Mit Rücksicht auf die Form der Gleichung 3) kann die Paıbelevolute einer Classe von Linien höherer Grade untergeordnet

*) Man darf nicht übersehen, dass beim Uebergange von der Gleiıung 4) zu 5) strenggenommen zwei Wurzeln weggeworfen wurden, welche der Gleichung $r^2 = 0$ enthalten sind. Es zeigt sich dies, wenn man Nr. 4) der Form

$$r^2 (r \cos^3\varphi - k \sin^2\varphi) = 0$$

werden, in welcher man alle diejenigen Curven zusammenfasst, deren Gleichung auf die Form $y^m = p x^n$ gebracht werden kann. Man nennt solche Linien Parabeln höherer Art, und die jetzt untersuchte Curve insbesondere Neilische*) oder semicubische Parabel.

Es bleibt dem Leser überlassen, die in der Anwendung wenig vorkommenden Gleichungen der Evoluten für Ellipse und Hyperbel aufzusuchen und dieselben mit der Gestalt der Curven, welche leicht auf constructivem Wege durch Darstellung von Krümmungsmittelpunkten gefunden werden kann, in Vergleichung zu bringen.

§. 40.

Fusspunktencurven.

Wenn man von einem festen Punkte aus auf die Tangenten einer gegebenen Curve Senkrechte errichtet, so bildet die Aufeinanderfolge der Fusspunkte dieser Perpendikel eine neue Linie, der wir den Namen Fusspunktencurve geben wollen. Der umschriebene Kreis der Ellipse und der Hauptkreis der Hyperbel, die für die Parabel in die geradlinige Scheiteltangente degeneriren, sind Beispiele solcher Fusspunktencurven für die in einer Linie zweiten Grades aus einem Brennpunkte gefällten Perpendikel. Wir wollen zu diesen bereits bekannten Beispielen noch ein Paar neue auf die Linien zweiten Grades bezügliche hinzufügen.

Was im Allgemeinen die Methode betrifft, mittelst welcher die Gleichung einer Fusspunktencurve analytisch gewonnen wird, so ist sie ganz ähnlich der bei Aufsuchung der Evolutengleichung angewendeten. Die Gleichungen der Tangente im Curvenpunkte $x_1 y_1$ und der vom festen Punkte darauf gefällten Senkrechten in Verbindung mit der für x_1 und y_1 geltenden Curvengleichung geben für den Fusspunkt xy drei Formeln, aus denen x_1 und y_1 eliminirt

---

schreibt, wovon die Gleichung 5) nur den zweiten Factor darstellt. Jede durch O gehende Gerade hat daher eigentlich drei Punkte mit der Curve gemein, von denen zwei in O zusammenfallen. Die Spitze, in welche die Curve in O ausläuft, ist nämlich als ein doppelter Punkt anzusehen, welcher den beiden darin zusammentreffenden Zweigen gleichzeitig angehört.

*) Nach einem englischen Mathematiker, Namens William Neil. — Die den Kegelschnitten angehörende Parabel zweiten Grades erhält, wo Verwechselung vermieden werden soll, die Namen: gemeine oder Apollonische Parabel.

werden können. Die hiernach bleibende Gleichung zwischen x und y gehört allen Fusspunkten an, ist also die Gleichung der gesuchten Fusspunktencurve.

I. Die gegebene Curve sei eine Parabel, aus deren Scheitel die Senkrechten gefällt werden.

Wählen wir wieder die Achse der Parabel und ihre Scheiteltangente zur X- und Y-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so lautet nach §. 16 Nr. 11) die Gleichung der Tangente im Parabelpunkte $x_1 y_1$:

$$yy_1 = p(x + x_1),$$

und für die aus dem Scheitel darauf gefällte Senkrechte ergiebt sich

$$y = -\frac{y_1}{p} x.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$y_1 = -\frac{py}{x}, \qquad x_1 = -\frac{x^2 + y^2}{x}.$$

Werden diese Werthe in die Parabelgleichung

$$y_1^2 = 2px_1$$

eingesetzt, so erhält man bei einfacher Umgestaltung die für alle Fusspunkte geltende Gleichung

$$1) \qquad py^2 = -2x(x^2 + y^2).$$

Die gesuchte Curve ist hiernach eine Linie dritten Grades, welche eine zur X-Achse symmetrische Form besitzt; dabei liegt sie vollständig auf der Seite der negativen x. Mit Rücksicht auf die letzte Eigenschaft wollen wir beide Seiten der X-Achse unter sich vertauschen, so dass die positiven x auf dieselbe Seite der Y-Achse zu liegen kommen, auf welcher sich die Curve befindet. Dabei geht x in $-x$ über. Wenn wir ausserdem noch die Constante

$$2) \qquad f = \frac{p}{2},$$

d. i. nach §. 14 Nr. 1) den Abstand des Parabelscheitels vom Brennpunkte oder von der Directrix einführen, so verwandelt sich die Gleichung 1) in

$$3) \qquad fy^2 = x(x^2 + y^2),$$

und hieraus ergiebt sich, wenn auf y reducirt wird,

$$4) \qquad y^2 = \frac{x^3}{f - x}.$$

Man sieht aus diesem Ausdrucke, dass y nur so lange reelle Werthe erhält, als x zwischen den Grenzen 0 und f enthalten ist; die Curve

liegt also gänzlich innerhalb des Raumes, welcher von der Scheiteltangente und der Directrix der Parabel begrenzt wird. Zwischen diesen Grenzen wächst der absolute Werth von y gleichzeitig mit x, und zwar, wie sich aus der Vergleichung der Formel 3) des vorhergehenden Paragraphen mit der letzten Gleichung schliessen lässt, in noch stärkerem Grade, als in der Neilischen Parabel.

Die Grösse $f - x$ in Nr. 4) stellt den Abstand eines Curvenpunktes von der Directrix dar. Wird auf diesen Ausdruck reducirt, so folgt

$$f - x = \frac{x^3}{y^2},$$

ein Werth, welcher der Null beliebig nahe gebracht werden kann, da x die Grenze f nicht überschreitet, während y ins Unendliche wächst. Die Directrix ist hiernach Asymptote der Curve.

Gehen wir mittelst der Substitutionen

$$y = r \sin \varphi, \qquad x = r \cos \varphi, \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

von Nr. 3) zu Polarcoordinaten über, so entsteht die Polargleichung

5) $$r = f \sin \varphi \tan \varphi \, ^*),$$

welche zu einer höchst einfachen Construction der in Rede stehenden Curve hinführt. Wird nämlich in Fig. 54, wo O den Parabelscheitel und DN die Directrix darstellt, über dem Durchmesser $OA = f$ ein Kreis gezogen, so ist, wenn $\angle POA = \varphi$ gesetzt wird,

Fig. 54.

$$AM = f \sin \varphi,$$

folglich, da $\angle MAN = \angle POA$,

$$MN = AM \tan \varphi = f \sin \varphi \tan \varphi,$$

und hiernach mit Rücksicht auf Nr. 5), wenn P einen Curvenpunkt darstellt, $MN = OP$, also auch $PN = OM$. Man wird leicht bemerken, wie mit Benutzung dieser Eigenschaft beliebig viele Punkte der Curve gewonnen werden können.

Die durch die Gleichungen 1), 3), 4) und 5) repräsentirte Linie führt den Namen Cissoide.

II. Soll die Fusspunktencurve der Ellipse für die aus dem Mittelpunkte gefällten Perpendikel gesucht wer-

*) Hierbei sind ebenso wie in der Polargleichung der Neilischen Parabel zwei aus der Gleichung $r^2 = 0$ hervorgehende Wurzeln abgeworfen worden. Der Pol ist wieder ein Doppelpunkt, in welchem zwei Zweige der Curve zusammenfliessen.

den, so gelten für den Fusspunkt xy und den zugehörigen Ellipsenpunkt $x_1 y_1$ (vgl. §. 21 Nr. 13) die drei Gleichungen:

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1, \quad y = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} x,$$

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$\frac{x_1}{a} = \frac{a x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{y_1}{b} = \frac{b y}{x^2 + y^2}.$$

Setzt man diese Werthe in die dritte Gleichung ein, so erhält man für die Fusspunktencurve:

$$6) \qquad \frac{a^2 x^2 + b^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 1,$$

oder nach Entfernung des Nenners:

$$7) \qquad (x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2.$$

Der Umstand, dass diese Gleichung nur gerade Potenzen von x und y enthält, wonach sich zu jedem Werthe der einen Coordinate gleiche und entgegengesetzte Werthe der andern ergeben, zeigt, dass die gesuchte Curve gegen beide Achsen symmetrisch ist, eine Eigenschaft, die auch sofort aus der Entstehung der Linie hervorgeht. Die Curve selbst ist eine Linie vierten Grades.

Um die Form der Linie bequemer ermitteln zu können, setzen wir die Gleichung 7) in Polarcoordinaten um. Dann entsteht die Polargleichung:

$$8) \qquad r^4 = a^2 r^2 \cos^2 \varphi + b^2 r^2 \sin^2 \varphi,$$

welche in die beiden Gleichungen

$$r^2 = 0, \quad r^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi$$

zerlegt werden kann. Die erste bezeichnet den Mittelpunkt der Ellipse als einzelnen ebenfalls durch die Gleichungen 7) und 8) repräsentirten Punkt; diese Lösung ist aber offenbar der gestellten geometrischen Aufgabe fremd, da keine Ellipsentangente durch den Mittelpunkt gehen kann; für unsere Zwecke bleibt also nur die Gleichung:

$$9) \qquad r^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi.$$

Wird hierin mit Benutzung der bekannten Relation $a^2 = b^2 + c^2$ die lineare Excentricität c eingeführt, so ergiebt sich die Gleichung

$$10) \qquad r^2 = a^2 - c^2 \sin^2 \varphi,$$

der man auch, wenn mittelst der Formel $c = a\varepsilon$ die numerische Excentricität ε substituirt wird, die Form

11) $$r^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)$$

geben kann. Auf Nr. 10) kann leicht eine Construction der Curve gegründet werden, indem man r als Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes auffasst, dessen Hypotenuse und andere Kathete der Reihe nach die Längen a und $c \sin \varphi$ haben.

Um nun zunächst die Fusspunktencurve mit der Ellipse selbst in Vergleich zu bringen, soll in 10) rechter Hand mit $a^2 - c^2 \cos^2 \varphi$ multiplicirt und dividirt werden. Nach einigen Reductionen entsteht hierbei das Resultat:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2 + c^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi}.$$

Halten wir diese Gleichung mit der für dieselbe Lage des Coordinatensystems geltenden Polargleichung der Ellipse zusammen, welche nach §. 20 Nr. 4)

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi}$$

lautet, so bestätigt sich ohne Schwierigkeit die aus der Lage der Ellipsentangenten ersichtliche Eigenschaft, dass beide Curven in den Achselscheiteln zusammenfallen, dass aber in allen anderen Punkten die Fusspunktencurve ausserhalb der Ellipse gelegen ist.

Zum Zwecke der weiteren Untersuchung der Gestalt reicht es aus, wenn wir uns auf spitze Werthe von φ beschränken, weil durch diese Werthe einer der vier unter sich congruenten Quadranten der Fusspunktencurve vollständig umfasst wird. Aus den Gleichungen 10) und 11) ist dann zu erkennen, dass r abnimmt, während φ wächst, dass also wie in der Ellipse die beiden Halbachsen den grössten und kleinsten Halbmesser darstellen. Dabei können aber zwei wesentlich verschiedene Formen eintreten, die sich aus den Grössen der Ordinaten ergeben. Wird nämlich mit Hilfe der Formel $r \sin \varphi = y$ die Gleichung 11) in

12) $$y^2 = \frac{a^2}{\varepsilon^2} [\varepsilon^2 \sin^2 \varphi (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)]$$

umgestaltet, so zeigt sich, dass unter der Voraussetzung positiver y, die für spitze Werthe von φ allein zulässig sind, y wächst oder abnimmt, je nachdem das Eine oder das Andere mit dem Producte

$$\varepsilon^2 \sin^2 \varphi (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)$$

stattfindet. Da die beiden Factoren dieses Productes eine unveränderliche Summe geben, so folgt aus einem bekannten arithmetischen Satze, dass sein Werth von $\varphi = 0$ an wächst, bis beide

Factoren gleich geworden sind, worauf wieder Abnahme eintritt. Der grösste Werth des Productes, also auch der Ordinate, tritt demnach ein, sobald die Relation

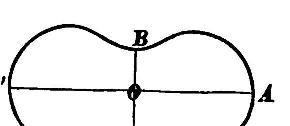
$$1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi = \varepsilon^2 \sin^2 \varphi$$

Geltung hat. Dies giebt, wenn wir die zugehörige Anomalie mit φ_m bezeichnen,

$$13) \qquad \sin \varphi_m = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2}}.$$

Aus dieser Formel folgt ein unmöglicher Werth von φ_m, so lange $\varepsilon < \sqrt{\frac{1}{2}}$; für $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist $\varphi = 90^\circ$. In beiden Fällen wächst also y fortwährend von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 90^\circ$, so dass die grösste mögliche Ordinate mit der kleinen Halbachse der Ellipse zusammenfällt. Die Curve hat hierbei eine Form, die mit der Ellipse selbst die grösste Aehnlichkeit besitzt. Ist dagegen $\varepsilon > \sqrt{\frac{1}{2}}$, so gehört die grösste Ordinate zu einer innerhalb der Grenzen 0 und 90° gelegenen Anomalie, so dass, wenn man vom Scheitel ausgeht, die Ordinaten anfänglich wachsen, um nachher wieder abzunehmen. Die Fusspunktencurve erhält hierbei die Gestalt von Fig. 55, worin AA' und BB' die Achsen der dazu gehörenden Ellipse darstellen; sie erscheint an den Scheiteln der kleinen Achse, bei B und B' eingedrückt, und zwar um so mehr, je grösser ε wird, oder jemehr sich die beiden Achsen der Ellipse an Grösse unterscheiden. Für die Länge der grössten Ordinate, die y_m heissen mag, erhält man aus 12) und 13)

Fig. 55.



$$y_m = \frac{a}{2\varepsilon}.$$

Das zugehörige x kann aus der Gleichung 7) berechnet werden; wir überlassen dies dem Leser.

C. Die Gleichung der Fusspunktencurve einer Hyperbel für die aus dem Mittelpunkte gefällten Senkrechten ergiebt sich mit Rücksicht auf die bekannte Beziehung, welche zwischen der Ellipsen- und Hyperbelgleichung stattfindet, wenn man in Nr. 7) b^2 mit $-b^2$ vertauscht. Die Gleichung lautet folglich:

$$14) \qquad (x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2,$$

wonach die Fusspunktencurve wieder dem vierten Grade angehört und gegen beide Achsen symmetrisch gelegen ist.

Beim Uebergange zu Polarcoordinaten erhält man aus 14) oder auch sogleich aus 9) die Polargleichung

15) $$r^2 = a^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi,$$

welche, wenn mittelst der Relationen $c^2 = a^2 + b^2$ und $c = a\varepsilon$ die lineare und numerische Excentricität eingeführt wird, zeigt, dass die Gleichungen 10) und 11) auch für die Fusspunktencurve der Hyperbel Geltung finden.

Was die Gestalt der Linie anlangt, so folgt aus 15), dass reelle r nur möglich sind, sobald die Bedingung

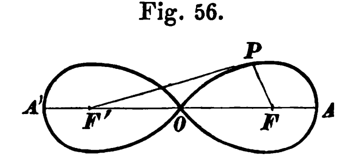
$$\tan^2 \varphi \leqq \frac{a^2}{b^2}$$

verificirt wird. Die Curve ist hiernach zu beiden Seiten der X-Achse zwischen zwei durch den Mittelpunkt gehenden Geraden eingeschlossen, welche eine gegen die Asymptoten der Hyperbel senkrechte Lage haben. Im Falle der gleichseitigen Hyperbel sind diese beiden Geraden mit den Asymptoten identisch. Ferner lässt die Gleichung 11) erkennen, dass unter Voraussetzung spitzer Werthe von φ der Leitstrahl r von a bis 0 abnimmt, während φ von 0 bis φ_0 wächst, wobei

$$\sin \varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \tan \varphi_0 = \frac{a}{b}$$

angenommen ist. Rücksichtlich der Ordinaten folgt aus der zur Formel 12) angestellten Betrachtung, dass sie vom Scheitel aus gerechnet anfänglich wachsen, bis φ den in Nr. 13) gegebenen Werth erlangt hat, um nachher wieder bis zu Null hin abzunehmen. Aus allen diesen Bemerkungen ergiebt sich für die Curve eine schleifenähnliche Gestalt, wie sie in Figur 56 für den speciellen Fall dargestellt ist, wenn die Fusspunkte ihre Entstehung einer gleichseitigen Hyperbel verdanken. Eine Curve dieser besondern Art führt den Namen **Lemniscate**.

Fig. 56.



Für die Gleichung der Lemniscate erhält man aus 14), wenn $a = b$ gesetzt wird,

16) $$(x^2 + y^2) = a^2 (x^2 - y^2);$$

auf gleichem Wege entsteht aus 15) die Polargleichung

17) $$r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

Die Lemniscate besitzt die merkwürdige Eigenschaft, dass, wenn man in der Achse AA' zu beiden Seiten des Mittelpunktes

zwei feste Punkte F und F' in dem Abstande $OF = OF' = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ annimmt, für jeden beliebigen Peripheriepunkt das Product $PF.PF'$ der beständigen Grösse $\frac{1}{2}a^2$ gleich ist. Aus den Formeln

$$\overline{PF}^2 = (x - a\sqrt{\tfrac{1}{2}})^2 + y^2$$
$$\overline{PF'}^2 = (x + a\sqrt{\tfrac{1}{2}})^2 + y^2$$

folgt nämlich durch Multiplication nach einigen Umgestaltungen

$$\overline{PF}^2 . \overline{PF'}^2 = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) + \tfrac{1}{4}a^4,$$

und hieraus mit Rücksicht auf Nr. 16)

$$\overline{PF}^2 . \overline{PF'}^2 = \tfrac{1}{4}a^4,$$

worin die angegebene Eigenschaft ausgedrückt ist. Die Lemniscate ordnet sich hierdurch einer allgemeineren Linie unter, in welcher das Product $PF.PF'$ eine beliebige constante Grösse q^2 besitzt. Um auch für diesen allgemeinen Fall die Gleichung zu entwickeln, behalten wir die vorher angewendeten Coordinatenachsen bei und setzen $OF = OF' = e$. Dann ist

$$\overline{PF}^2 = (x - e)^2 + y^2$$
$$\overline{PF'}^2 = (x + e)^2 + y^2,$$

woraus nach der vorgelegten Bedingung die Relation

$$[(x - e)^2 + y^2][(x + e)^2 + y^2] = q^4$$

hervorgeht. Nach einfacher Umformung folgt hieraus:

$$18) \qquad (x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = q^4 - e^4.$$

Die durch diese Gleichung repräsentirte Curve vierten Grades hat den Namen der Cassinischen Linie erhalten*). Sie zeichnet sich durch eine mit der gegenseitigen Grösse von e und q mannichfach wechselnde Formverschiedenheit aus. Bedienen wir uns der Abkürzung $\frac{e}{q} = \varepsilon$, so stellt die Cassinische Linie einen Kreis dar, wenn $\varepsilon = 0$ ist; sie erhält eine der Ellipse ähnliche Gestalt für den Fall $\sqrt{\frac{1}{2}} \geqq \varepsilon > 0$, erlangt eine eingedrückte Form nach Art von Figur 55, wenn ε zwischen den Grenzen $\sqrt{\frac{1}{2}}$ und 1 liegt, geht für $\varepsilon = 1$ in die Lemniscate über, trennt sich dann, wenn ε den Werth Eins überschreitet, in zwei die Punkte F und F' umgebende geschlossene Curven und schwindet endlich in diese Punkte selbst zusammen, wenn ε unendlich geworden ist.

---

*) Nach dem bekannten Astronomen Dominique Cassini, der diese Linie erfand, um von ihr eine, übrigens irrthümliche, Anwendung auf die Theorie der Mondbewegung zu machen.

§. 41.

Die Tangenten algebraischer Curven.

Eine der wichtigsten Fragen bei analytischer Untersuchung einer krummen Linie ist die Frage nach der Richtung ihrer Tangenten, indem hierdurch die Bewegungsrichtung des die Curve beschreibenden Punktes in seinen verschiedenen Lagen bestimmt wird. Das zu diesem Zwecke bei Betrachtung der Linien zweiten Grades benutzte Verfahren reducirt sich schliesslich auf die Ermittelung der gleichen Wurzeln einer quadratischen Gleichung; eine erweiterte Anwendung derselben Methode auf Untersuchung der Linien höherer Grade würde zu der Aufgabe führen, die gleichen Wurzeln einer höheren Gleichung ausfindig zu machen. Da die Lösung dieser Aufgabe bei Beschränkung auf die Hilfsmittel der Elementarmathematik mit nicht unbeträchtlichen Schwierigkeiten verknüpft ist, so soll hier ein anderer Weg eingeschlagen werden, auf dem wir zu allgemeineren Resultaten gelangen. Wir schicken dazu folgende, für alle Curven geltende Erörterungen voraus.

Es sei die Gleichung irgend einer krummen Linie in der Form

$$1)\qquad F(x,y)=0$$

gegeben und die Aufgabe gestellt, an diese Curve im Peripheriepunkte $x_1 y_1$ eine Tangente zu legen. Verbinden wir zunächst diesen Punkt mit einem zweiten Punkte $x_2 y_2$ der nämlichen Linie, so gilt nach §. 5 Nr. 9) für die Richtungsconstante M der die beiden Punkte enthaltenden Secante die Formel

$$2)\qquad M=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2},$$

welche durch Combination mit den aus 1) folgenden Gleichungen

$$3)\qquad F(x_1,y_1)=0,\qquad F(x_2,y_2)=0$$

so umgestaltet werden kann, dass sie nur noch zulässig bleibt, wenn beide Punkte auf der gegebenen Curve liegen. Denkt man sich hierauf den Punkt $x_2 y_2$ nach $x_1 y_1$ hin bewegt, so dreht sich die Secante um den letzteren Punkt und geht endlich in eine Tangente über, wenn $x_2=x_1$ und $y_2=y_1$ geworden ist. Zu diesen bestimmten Specialwerthen von x_2 und y_2 muss ein bestimmter Werth von M gehören, der zwar aus Nr. 2) allein in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint, weil ohne Hinzutreten der Gleichun-

en 3) die Aufgabe darauf hinauskommen würde, die Richtung iner beliebigen durch **einen** Punkt gelegten Geraden zu ermiteln, der aber bei zweckdienlicher Benutzung dieser Gleichungen rgend eine angebbare Grösse erlangt, die wir mit N bezeichnen rollen. N ist dann die Richtungsconstante der durch den Punkt $_1y_1$ gehenden Tangente, und die Gleichung dieser Geraden lautet ach §. 5 Nr. 7)

$$4) \qquad y - y_1 = N(x - x_1).$$

Es bleibt jetzt die einzige Schwierigkeit übrig, in jedem speiellen Falle die Gleichungen 3) so anzuwenden, dass dadurch ein estimmter Werth von N erreicht wird. Die allgemeine Lösung ieser Aufgabe gehört der höheren Mathematik an; für den speiellen Fall aber, dass $F(x, y)$ eine algebraische, ganze und raonale Function von x und y darstellt, führt die folgende Betrachng zum Ziele.

Jedes einzelne Glied der Formeln 2) und 3) in §. 37, welche en allgemeinen Ausdruck der Gleichungen algebraischer Curven ıthalten, besitzt, wie bereits früher bemerkt wurde, die Form

$$5) \qquad Cx^p y^q.$$

bezeichnet hierbei eine beliebige Constante, die Exponenten p ıd q dagegen sind ganze positive Zahlen oder auch gleich Null. ilden wir nun aus den Gleichungen 3) durch Subtraction die neue leichung

$$6) \qquad F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2) = 0,$$

entsteht aus dem Gliede 5) der Ausdruck

$$C(x_1^p y_1^q - x_2^p y_2^q),$$

elcher, wenn man in der Parenthese $x_2^p y_1^q$ subtrahirt und addirt, in

$$7) \qquad C[y_1^q(x_1^p - x_2^p) + x_2^p(y_1^q - y_2^q)]$$

ogestaltet werden kann. Bei Einführung der Abkürzungen

$$8) \quad \begin{cases} \Sigma_x = x_1^{p-1} + x_1^{p-2}x_2 + x_1^{p-3}x_2^2 + \ldots + x_1 x_2^{p-2} + x_2^{p-1} \\ \Sigma_y = y_1^{q-1} + y_1^{q-2}y_2 + y_1^{q-3}y_2^2 + \ldots + y_1 y_2^{q-2} + y_2^{q-1} \end{cases}$$

; nach einem bekannten arithmetischen Satze

$$9) \qquad \begin{cases} x_1^p - x_2^p = (x_1 - x_2)\,\Sigma_x \\ y_1^q - y_2^q = (y_1 - y_2)\,\Sigma_y. \end{cases}$$

iermit erlangt der Ausdruck 7) die Form

$$C[y_1^q(x_1 - x_2)\,\Sigma_x + x_2^p(y_1 - y_2)\,\Sigma_y]$$

ler, wenn man den Factor $(x_1 - x_2)$ aushebt und die Relation 2) ınutzt,

$$10) \qquad C(x_1 - x_2)(y_1^q\,\Sigma_x + Mx_2^p\,\Sigma_y).$$

Wird dann die ganze Gleichung durch $(x_1 - x_2)$ dividirt, so verwandelt sich 10) in

11) $$C(y_1^q \Sigma_x + M x_2^p \Sigma_y),$$

worin man nur $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, $M = N$ zu setzen hat, um zu einer Gleichung zu gelangen, aus welcher ein bestimmter Werth von N hervorgeht. Dabei wird nach 8)

$$\Sigma_x = p x_1^{p-1}, \qquad \Sigma_y = q y_1^{q-1},$$

der Ausdruck 11) verwandelt sich also in

12) $$C(p x_1^{p-1} y_1^q + q N x_1^p y_1^{q-1}).$$

Wenden wir zunächst diese Methode, um sie an einem bereits anderwärts behandelten Beispiele zu prüfen, auf die allgemeine Gleichung zweiten Grades an, so hat man für zwei Punkte einer diesem Grade angehörenden Linie die Gleichungen

$$A x_1^2 + B y_1^2 + 2 C x_1 y_1 + 2 D x_1 + 2 E y_1 + F = 0$$
$$A x_2^2 + B y_2^2 + 2 C x_2 y_2 + 2 D x_2 + 2 E y_2 + F = 0,$$

aus denen, wenn man subtrahirt und die in Nr. 7) und 9) angewendeten Zerlegungen benutzt, die Gleichung

$$A(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + B(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)$$
$$+ 2C[y_1(x_1 - x_2) + x_2(y_1 - y_2)]$$
$$+ 2D(x_1 - x_2) + 2E(y_1 - y_2) = 0$$

hervorgeht. Wird hierin durch $x_1 - x_2$ dividirt, so entsteht mit Hilfe der Formel 2):

$$A(x_1 + x_2) + BM(y_1 + y_2) + 2C(y_1 + M x_2) + 2D + 2EM = 0,$$

und hieraus, wenn $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, $M = N$ gesetzt wird, bei gleichzeitiger Entfernung des gemeinschaftlichen Factors 2:

$$A x_1 + B N y_1 + C(y_1 + N x_1) + D + E N = 0.$$

Dies giebt, wenn man auf N reducirt,

$$N = -\frac{A x_1 + C y_1 + D}{B y_1 + C x_1 + E},$$

was mit der aus der allgemeinen Tangentengleichung 5) §. 35 folgenden Richtungsconstante vollkommen übereinstimmt.

Das angewendete Verfahren lässt sich zu einem einfachen Mechanismus umgestalten, wenn man aus der Zusammenstellung der Ausdrücke 5) und 12) die Umwandlung entnimmt, welche jedes Glied der vorgelegten Curvengleichung beim Uebergange in die zur Ermittelung von N dienende Formel erleidet. Wählen wir z. B. die Gleichung

13) $$A x^m + B y^n + C x^p y^q + D = 0,$$

welche von jeder Art von Gliedern, wie sie in der allgemeinen

Gleichung der Linien höherer Grade vorkommen, eines enthält, so verwandelt sich bei dem fraglichen Uebergange das Glied

$$Ax^m \text{ in } mAx_1^{m-1},$$
$$By^n \text{ „ } nNBy_1^{n-1},$$
$$Cx^py^q \text{ „ } C(px_1^{p-1}y_1^q + qNx_1^py_1^{q-1}),$$

während das constante Glied D sogleich bei der anfänglichen Subtraction zu Null wird. Die zur Bestimmung der Richtungsconstante N nöthige Gleichung lautet folglich:

$$14) \quad mAx_1^{m-1} + nNBy_1^{n-1} + C(px_1^{p-1}y_1^q + qNx_1^py_1^{q-1}) = 0.$$

Man wird leicht das Bildungsgesetz übersehen, nach welchem Nr. 14) aus 13) entstanden ist. Zu bemerken haben wir noch, dass die Curvengleichung nicht nothwendig auf Null reducirt zu sein braucht, was sich sofort zeigt, wenn man z. B. die Gleichung 13) in der Form

$$Ax^m + By^n = -Cx^py^q - D$$

gegeben annimmt und Nr. 14) in

$$mAx_1^{m-1} + nNBy_1^{n-1} = -C(px_1^{p-1}y_1^q + qNx_1^py_1^{q-1})$$

umgestaltet.

Als Beispiel für die Theorie der Tangenten einer Linie höheren Grades möge die Untersuchung der Cissoidentangenten dienen.

Aus der Gleichung 3) in §. 40 folgt nach Ausführung der Multiplication und geänderter Ordnung der Glieder für die Coordinaten eines Cissoidenpunktes:

$$15) \qquad x^3 - fy^2 + xy^2 = 0.$$

Wird die oben angegebene Methode auf diese Gleichung angewendet, so entsteht in gleicher Weise wie beim Uebergange von Nr. 13) zu 14):

$$3x_1^2 - 2fy_1N + y_1^2 + 2Nx_1y_1 = 0,$$

woraus man für die Richtung der Cissoidentangente die Formel

$$16) \qquad N = \frac{3x_1^2 + y_1^2}{2y_1(f - x_1)}$$

erhält. Mit Hilfe der aus §. 40 Nr. 4) fliessenden Gleichung

$$f - x_1 = \frac{x_1^3}{y_1^2}$$

lässt sich hierin der Ausdruck $f - x_1$ eliminiren; wir erlangen dadurch die von der beständigen Grösse f unabhängige Formel:

$$17) \qquad N = \frac{y_1(3x_1^2 + y_1^2)}{2x_1^3}.$$

Um hieraus Folgerungen für die Gestalt der Cissoide ziehen zu können, wollen wir mittelst der Relationen

$$18)\qquad N = \tan\tau, \qquad \frac{y_1}{x_1} = \tan\varphi$$

den von der Tangente und der X-Achse eingeschlossenen Winkel τ und die Anomalie φ des Berührungspunktes einführen. Dann ergiebt sich:

$$19)\qquad \tan\tau = \tfrac{1}{2}\tan\varphi\,(3 + \tan^2\varphi).$$

Diese Formel zeigt, dass von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 90^0$ der Winkel τ gleichzeitig mit φ, aber in viel stärkerem Grade als die Anomalie wächst, woraus leicht hergeleitet wird, dass die Curve wie in Fig. 54 überall der X-Achse ihre convexe Seite zukehren muss.

Als Gleichung der Cissoidentangente im Punkte $x_1 y_1$ entsteht aus Nr. 4) bei Substitution des in Nr. 17) enthaltenen Werthes von N:

$$20)\qquad y - y_1 = \frac{y_1(3x_1^2 + y_1^2)}{2x_1^3}(x - x_1).$$

Wird hierin $y = 0$ und $x = m$ gesetzt, wobei m die Abscisse des in der X-Achse gelegenen Tangentenpunktes bezeichnet, so erhält man für die sogenannte Subtangente (vgl. die Anmerkung S. 95) den Werth:

$$x_1 - m = \frac{2x_1^3}{3x_1^2 + y_1^2},$$

und hieraus, wenn mittelst der Cissoidengleichung die Ordinate y_1 eliminirt wird,

$$x_1 - m = \frac{2(fx_1 - x_1^2)}{3f - x_1}.$$

Dieser Ausdruck erlangt eine für die geometrische Darstellung einfachere Form, wenn man darin den Radius a des in Fig. 54 zur Construction der Cissoide benutzten Kreises einführt, oder $f = 2a$ setzt. Dann entsteht:

$$21)\qquad x_1 - m = \frac{2ax_1 - x_1^2}{3a - x_1},$$

ein Werth, der sehr leicht construirt werden kann, wenn man beachtet, dass $2ax_1 - x_1^2$ das Quadrat der zu x_1 gehörigen Kreisordinate bezeichnet.

Zehntes Capitel.

Transcendente Linien.

§. 42.

Die transcendenten Linien im Allgemeinen.

Alle bis jetzt untersuchten Linien waren der Art, dass sie, auf Parallelcoordinaten bezogen, durch algebraische rationale Gleichungen zwischen x und y repräsentirt werden konnten. Wenn wir nun bedenken, dass jede Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen, abgesehen von der besonderen Form der darin enthaltenen Functionen, in geometrischer Auffassung den zusammenhängenden Lauf einer Linie ausdrückt, soweit zu reellen sich stetig ändernden Werthen der einen Variabeln eben solche Werthe der anderen gehören, so bleibt noch für die Untersuchung das unendliche Gebiet solcher, offenbar krummen, Linien übrig, deren Gleichung nicht auf die oben genannte Form gebracht werden kann. Alle Curven dieser Art werden im Allgemeinen transcendente genannt.

Bleiben wir zunächst, um mit den einfachsten Fällen zu beginnen, bei solchen Gleichungen stehen, die in der entwickelten Form

$$y = f(x)$$

gegeben sind, so gehört aus dem Gebiete der niederen Arithmetik hierher die Gleichung

$$y = a^x,$$

worin die Basis a constant ist und der Exponent x eine veränderliche Abscisse darstellt*). Auf x reducirt giebt sie die Formel

*) Auch Linien, deren Gleichung die Form

$$y = x^m$$

besitzt, wobei m constant sein soll, sind zu den transcendenten zu rechnen, sobald sie nicht unter einen bestimmten endlichen Grad gebracht werden

$$x = {}^{a}\!\log y,$$

so dass bei geometrischer Darstellung durch Parallelcoordinaten die Abscissen die den Ordinaten zugehörenden Logarithmen zur Basis a ausdrücken. — Gehen wir ferner in das Gebiet der Trigonometrie ein, so erhalten wir einfache Beispiele transcendenter Curven aus den Gleichungen

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x \text{ u. s. w.},$$

wobei die x, um als Längen aufgetragen werden zu können, in Theilen des Radius gemessene Bogenlängen bezeichnen sollen. Die Reduction auf x führt zu den cyclometrischen Functionen:

$$x = \mathrm{Arc} \sin y, \quad x = \mathrm{Arc} \cos y \text{ u. s. f.}$$

Alle genannten einfachen Functionen können wieder beliebig sowohl unter sich, als auch mit algebraischen verbunden werden, um neue Gleichungen transcendenter Curven zu liefern, wozu noch eine täglich wachsende Menge solcher Functionen tritt, welche in der höheren Mathematik ihre Entstehung haben. Ein Versuch, die Verschiedenartigkeit der hieraus fliessenden Gestalten auch nur angenähert vorzuführen, muss bei ihrer unendlichen Zahl ein vergeblicher sein; einer vollständigen Untersuchung, auch nur der einfachsten Formen, sind an vielen Stellen die Kräfte der Elementarmathematik nicht gewachsen. Wir beschränken uns deshalb darauf, im Folgenden die Gleichungen einiger wenigen häufiger genannten transcendenten Curven aufzustellen, wobei wir der Einfachheit der Betrachtung wegen, soweit Parallelcoordinaten benutzt werden, nur von rechtwinkligen Systemen Gebrauch machen wollen.

Eine Curve, deren Gleichung die Form

1) $$y = A b^{\frac{x}{c}}$$

besitzt, führt den Namen logarithmische Linie, weil darin bei geeigneter Wahl des Coordinatenanfanges und der Längeneinheit die Abscissen die Logarithmen ihrer Ordinaten für irgend eine gegebene Basis darstellen können. Bezeichnen wir nämlich mit e

---

können. Es findet dies statt, wenn m eine irrationale Zahl ist, also z. B., wenn $m = \sqrt{2}$. Setzt man für $\sqrt{2}$ die Näherungswerthe: $\pm 1{,}4..$, $\pm 1{,}41..$, so würde in diesem Falle die Linie, welcher jene Gleichung zukommt, angenähert durch zwei Curven vierzehnten Grades, oder durch zwei Curven vom hunderteinundvierzigsten Grade u. s. f. dargestellt werden können. In der That gehört sie aber einem unendlich hohen Grade an. Leibnitz nennt Linien dieser besonderen Art interscendente Curven.

diese Basis und mit *log* die zugehörigen Logarithmen, so lässt sich vorerst mit Einführung einer neuen beständigen Grösse m, für welche die Relation

$$e^{\frac{1}{m}} = b^{\frac{1}{c}}$$

oder, indem wir zu den Logarithmen übergehen,

$$2) \qquad m = \frac{c}{\log b}$$

Geltung hat, die Gleichung 1) in

$$3) \qquad y = A e^{\frac{x}{m}}$$

umformen. Wird dann der Coordinatenanfang auf der X-Achse um eine vorläufig noch unbestimmte Grösse a verschoben, so geht x in $x + a$ über; man hat also

$$y = A e^{\frac{x+a}{m}} = A e^{\frac{a}{m}} e^{\frac{x}{m}},$$

und hieraus entsteht, wenn man

$$A e^{\frac{a}{m}} = m,$$

also

$$4) \qquad a = m \log \frac{m}{A}$$

nimmt, die Gleichung:

$$5) \qquad y = m e^{\frac{x}{m}}.$$

Wählt man die durch die Gleichung 2) bestimmte Constante m als Längeneinheit, so bleibt:

$$6) \qquad y = e^x, \qquad x = \log y,$$

wodurch die oben ausgesprochene Behauptung gerechtfertigt wird. Dabei ist für die allgemeine Geltung der angewendeten Folgerungen nur nöthig, dass die Basen b und e positive Zahlen darstellen und nicht gleich Eins sind; negative Werthe der beständigen Grössen A, c oder m können durch geeignete Vertauschung der positiven und negativen Achsenseiten entfernt werden.

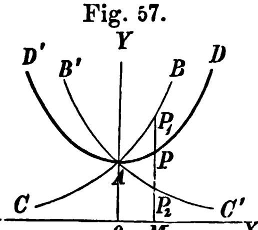
Ist die Gleichung der logarithmischen Linie auf die Form 6) gebracht, so kann man noch, ohne dass der Allgemeinheit der Betrachtung Eintrag geschieht, $e > 1$ annehmen. Im entgegengesetzten Falle hat man nämlich nur die durch die Y-Achse geschiedenen Seiten der X-Achse zu verwechseln, um x in $-x$ überzuführen; dann verwandelt sich die Gleichung der Curve in

$$y = \left(\frac{1}{e}\right)^x,$$

worin $\frac{1}{e}$ gewiss grösser als Eins ist. Gewöhnlich versteht man unter e die bekannte Irrationalzahl 2,7182818...; die Abscissen der durch die Gleichung 6) repräsentirten Curve stellen in diesem Falle die sogenannten natürlichen Logarithmen der zugehörigen Ordinaten dar.

Was die Gestalt der logarithmischen Linie betrifft, so ergiebt sich aus Nr. 5) oder 6) zu jedem x, welches eine ganze Zahl oder einen Bruch mit ungeradem Nenner darstellt, ein positiver reeller Werth von y, der, $e > 1$ vorausgesetzt, gleichzeitig mit x wächst; hingegen erhält man zwei reelle entgegengesetzte Werthe, deren absolute Grösse ebenfalls mit x zunimmt, sobald x einen Bruch mit geradem Nenner bildet. Auf der Seite der positiven Ordinaten entsteht demnach eine stetig zusammenhängende Linie, während auf der Seite der negativen y nur eine unbegrenzte Anzahl isolirter Punkte befindlich ist. Von letzteren wollen wir hier, wo eine Linie untersucht werden soll, gänzlich absehen. Für den Verlauf der dann übrig bleibenden, auf der Seite der positiven y gelegenen Curve folgt aus 5), dass $y = m$, wenn $x = 0$; für $x = +\infty$ wird $y = \infty$, für $x = -\infty$ ist $y = 0$. Die Curve erstreckt sich also auf der Seite der positiven x und y ins Unendliche, während sie sich der negativen Abscissenachse fortwährend nähert, ohne sie je zu erreichen. Die X-Achse ist demnach eine Asymptote der logarithmischen Linie. Aus der Theorie der Logarithmen kann ferner hergeleitet werden, dass die Ordinaten eine geometrische Reihe bilden, wenn die Abscissen in arithmetischer Progression fortschreiten; die y wachsen folglich, sobald $e > 1$, in stärkerem Verhältnisse als die zugehörigen x.

Fig. 57.



Zwei logarithmische Linien BAC und $B'AC'$ (Fig. 57), deren Gleichungen die Form

$$y = m e^{\frac{x}{m}}, \quad y = m e^{-\frac{x}{m}}$$

besitzen, wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen darstellen soll, sind unter sich congruent, da eine in die andere übergeht, wenn x und $-x$ vertauscht wird. Aus beiden kann eine in der Mechanik mehrfach vorkommende transcendente Curve DAD' gebildet werden, wenn man Parallelen, wie P_1M, zur Y-Achse

zieht und darin den geometrischen Ort für den Halbirungspunkt P der von den Curven BAC und $B'AC'$ begrenzten Strecke P_1P_2 aufsucht. Setzen wir $OM = x$, $PM = y$, $P_1M = y_1$, $P_2M = y_2$, so gelten die Gleichungen

$$y_1 = me^{\frac{x}{m}}, \quad y_2 = me^{-\frac{x}{m}}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Man erhält hieraus für den gesuchten Ort die Gleichung:

$$7) \qquad y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right),$$

oder, wenn m zur Längeneinheit gewählt wird,

$$8) \qquad y = \tfrac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right).$$

Die durch die Gleichungen 7) und 8) charakterisirte Curve führt den Namen der gemeinen Kettenlinie. Sie wird von einem in zwei Punkten frei aufgehangenen, vollkommen biegsamen und undehnbaren Faden gebildet, wenn derselbe in allen Punkten gleiche Belastungen trägt, wenn er also z. B. unter der Voraussetzung, dass gleiche Fadenlängen gleiches Gewicht besitzen, nur durch seine eigene Last gespannt wird.

§. 43.

Die Spirallinien.

Wird die auf rechtwinklige Parallelcoordinaten bezogene Gleichung einer algebraischen Curve mittelst der bekannten Formeln

$$1) \qquad x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

in Polarcoordinaten umgesetzt, so geht das allgemeine Glied der algebraischen Gleichung, für welches wir früher die Form

$$2) \qquad Cx^{p}y^{q}$$

festgestellt hatten, in der Polargleichung in

$$3) \qquad Cr^{p+q}\cos^{p}\varphi\sin^{q}\varphi$$

über. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass der Werth dieses Gliedes vollkommen ungeändert bleibt, wenn man φ um 360^0 wachsen oder abnehmen lässt, konnten wir alle der Polargleichung entsprechenden Punkte erlangen, wenn wir uns auf solche Werthe von φ einschränkten, die zwischen den Grenzen 0 und 360^0 enthalten sind. Nicht minder war es gestattet, negative Leitstrahlen auszuschliessen, weil für die Grösse des Gliedes 3) dieselbe Wirkung bleibt, mag man r mit $-r$ vertauschen oder der Anomalie einen um eine halbe Umdrehung grösseren oder kleineren Werth

geben. Diese Beschränkungen sind aber nicht mehr zulässig, wenn alle einer Gleichung von der Form

$$r = f(\varphi) \quad \text{oder} \quad F(r, \varphi) = 0$$

entsprechende Punkte dargestellt werden sollen und die Functionen f und F rücksichtlich der Längen der Leitstrahlen nicht die im Vorigen angegebene Periodicität besitzen, wobei jedoch die Curven nicht mehr algebraisch sein können, sondern dem Gebiete der transcendenten Linien angehören müssen. Namentlich gehören hierher alle solche Curven, aus deren Polargleichung für stetig wachsende Anomalien fortwährend zu- oder abnehmende Vectoren hervorgehen, so dass in jeder durch den Coordinatenanfang gezogenen Geraden unendlich viele Peripheriepunkte gelegen sind. Linien dieser Art ziehen sich in unendlich vielen schneckenförmigen Windungen um den festen Pol herum und führen im Allgemeinen den Namen Spiralen oder Spirallinien.

Zur Untersuchung der Spiralen eignen sich am besten ihre Polargleichungen, wobei wir aber nach dem Vorhergehenden die Werthe der Leitstrahlen sowohl als der Anomalien nicht mehr beschränken dürfen, sondern zwischen den weitesten reellen Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ gelegen annehmen müssen. Nach Analogie der für negative Parallelcoordinaten geführten Untersuchungen sind negative Werthe eines Radiusvectors auf seiner Rückwärtsverlängerung über den Pol hinaus gelegen; negative Anomalien entsprechen einer entgegengesetzten Drehrichtung des Leitstrahles. — Um hier, wo wir nicht mehr mit trigonometrischen Functionen der Anomalien zu thun haben, die Werthe von φ ebenso wie die r als abstracte Zahlen auffassen zu können, die bei Annahme einer bestimmten linearen Einheit als Längen darstellbar sind, werden wir jene Winkel durch die Bogenlängen ausdrücken, welche ihnen in einem mit der Längeneinheit als Halbmesser um den Pol construirten Kreise zugehören. Wir bedienen uns dabei der Abkürzung

$$4) \qquad u = Arc\,\varphi,$$

so dass für zwei einander entsprechende Werthe von u und φ die Proportion

$$5) \qquad u : \pi = \varphi^0 : 180^0$$

Geltung findet*). Die Gleichung einer jeden Spirallinie wird dann in der Form

*) Um eine Analogie mit dem Parallelcoordinatensysteme zu erhalten, können wir den mit einem Halbmesser $= 1$ um den Pol als Mittelpunkt ge-

$$r = f(u)$$

dargestellt. — Als Beispiele für die Spiralen wählen wir die folgenden.

I. Die **Archimedeische Spirale**, die einfachste von allen, besitzt die Gleichung

6) $$r = au.$$

Bezeichnen wir zwei ihrer Punkte mit ru und $r_1 u_1$, so folgt aus

$$r = au, \qquad r_1 = au_1$$

die Proportion:

$$r : r_1 = u : u_1.$$

Man kann sich hiernach, da die Vectoren in demselben Verhältnisse wie die Anomalien zunehmen, die genannte Spirale durch die stetige Bewegung eines Punktes erzeugt denken, der auf einer um den Pol gedrehten geraden Linie von diesem Drehmittelpunkte aus so fortrückt, dass die von ihm zurückgelegten Wege den von der Geraden beschriebenen Winkeln proportional sind.

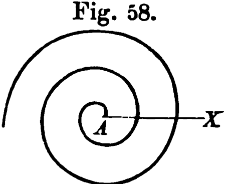
Setzt man $u_1 = 2\pi + u$, so fallen r_1 und r in dieselbe Gerade, gehören aber zu zwei um den Umfang einer Windung von einander entfernten Punkten. Für den Abstand beider Punkte folgt dann:

$$r_1 - r = a(u_1 - u) = 2a\pi,$$

d. h. in jeder durch den Pol gelegten Geraden besitzen die einzelnen Windungen die unveränderliche Entfernung $2a\pi$.

Figur 58 stellt ein Stück des den positiven Werthen von u entsprechenden Theiles einer Archimedeischen Spirale dar. Für negative u wechselt auch r sein Vorzeichen, ohne seine absolute Grösse zu ändern; der hierzu gehörende Theil der Curve ist daher dem in der Figur dargestellten völlig gleich, besitzt aber eine entgegengesetzte Lage. Man erhält ihn, wenn man sich die Zeichnung um eine durch den Pol A gelegte Senkrechte zur Polarachse AX so herumgedreht denkt, dass AX in seine eigene Verlängerung zu fallen kommt.

Fig. 58.



---

zogenen Kreis als eine krummlinige Abscissenachse ansehen, auf welcher der Durchschnitt mit der Polarachse den Nullpunkt bildet, von dem aus die positiven und negativen u nach beiden Seiten gezählt werden. Die auf diesem Kreise senkrecht stehenden Vectoren bilden die den Abscissen u zugehörigen Ordinaten; nur findet dabei der Unterschied statt, dass diese Ordinaten nicht von ihrem Einfallspunkte in die Abscissenlinie, sondern vom Kreismittelpunkte aus gemessen werden.

II. Bildet man nach Analogie der Scheitelgleichung einer Parabel die Polargleichung

7) $$r^2 = 2au,$$

so heisst die dadurch ausgedrückte Curve eine parabolische Spirale. Nach der Form ihrer Gleichung sind negative Werthe von u völlig ausgeschlossen, weil sie auf imaginäre Vectoren hinführen. Zu jedem positiven u gehören zwei an absoluter Grösse gleiche, der Richtung nach aber entgegengesetzte Leitstrahlen, so dass die Curve aus zwei im Pole zusammentreffenden Theilen besteht, für welche der Pol selbst den Mittelpunkt bildet*). Einer dieser Theile tritt an die Stelle des andern, wenn man die Spirale in ihrer Ebene eine halbe Umdrehung um den Pol machen lässt. Beschränken wir uns, um einen dieser beiden Theile vollständig kennen zu lernen, auf positive u, so ist für $u = 0$ auch $r = 0$, und es wächst von hier an r gleichzeitig mit u, so dass eine im Ganzen mit Fig. 58 ähnliche Gestalt entsteht. Nur findet der Unterschied statt, dass, wenn man in der Richtung eines Leitstrahles vom Pole aus fortgeht, die einzelnen Windungen immer näher an einander treten, weil nach der Form von Nr. 7) die r in einem schwächeren Verhältnisse als die zugehörigen u anwachsen. Bestätigt wird diese Bemerkung, wenn wir in ähnlicher Weise wie bei der Archimedeischen Spirale den Abstand zweier in einer durch den Pol gelegten Geraden befindlichen Peripheriepunkte bestimmen, welche zu zwei auf einander folgenden Windungen gehören. Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen folgt aus den Gleichungen

$$r^2 = 2au, \qquad r_1^2 = 2a(2\pi + u),$$

wenn man die Differenz $r_1^2 - r^2$ in $(r_1 - r)(r_1 + r)$ zerlegt, das Resultat:

$$r_1 - r = \frac{4a\pi}{r_1 + r}.$$

Da hierin der Zähler constant ist, so muss der besprochene Abstand sich vermindern, sobald der Nenner $r_1 + r$ zunimmt.

---

*) Der Pol ist allemal Mittelpunkt einer Curve, wenn ihre Polargleichung in Beziehung auf r algebraisch ist und nur gerade Potenzen von r enthält. Zu jedem u gehören nämlich dann zwei der Grösse nach gleiche, an Richtung aber entgegengesetzte Leitstrahlen, so dass die aus der Summe dieser beiden Vectoren bestehende Sehne im Pole halbirt wird. Da dies nach jeder Richtung hin stattfindet, so erlangt der Pol die Eigenschaft eines Mittelpunktes.

III. Die durch die Gleichung

$$8) \qquad ru = a$$

repräsentirte Spirale heisst mit Bezug auf die Aehnlichkeit, welche zwischen Nr. 8) und der Asymptotengleichung einer Hyperbel stattfindet, **hyperbolische Spirale**. Sie besteht aus zwei unter sich congruenten Theilen, von denen der eine den positiven und der andere den negativen Werthen von u entspricht und die gegen einander eine gleiche Lage haben, wie in der Archimedeischen Spirale, weil auch hier r und u gleichzeitig ihr Vorzeichen wechseln. Halten wir zur Untersuchung der Gestalt eines dieser beiden Theile positive Anomalien fest, so folgt aus der auf r reducirten Gleichung

$$9) \qquad r = \frac{a}{u},$$

dass r abnimmt, wenn u wächst, dabei aber nie vollständig in Null übergehen kann. Die einzelnen Windungen nähern sich also fort und fort dem Pole, ohne ihn je vollständig zu erreichen; derselbe bildet einen sogenannten **asymptotischen Punkt**. In ihrer Annäherung an diesen Punkt treten die Windungen immer enger an einander, wie sich sofort zeigt, wenn wir für zwei um den Umfang einer Windung von einander entfernte Punkte aus den Gleichungen

$$r = \frac{a}{u}, \quad r_1 = \frac{a}{2\pi + u}$$

die Differenz

$$r - r_1 = \frac{2a\pi}{u(2\pi + u)}$$

bilden. Der Zähler dieses Ausdrucks ist constant, während der Nenner wächst, wenn u zunimmt oder die Grösse von r sich vermindert.

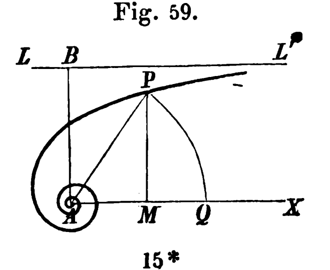
Nach der andern Seite hin rückt für abnehmende u oder zunehmende r die hyperbolische Spirale immer näher an eine Gerade LL' (Fig. 59), welche in einem Abstande $AB = a$ parallel zur Polarachse AX läuft. Setzen wir nämlich $MP = y$, so ist

$$y = r \sin u,$$

folglich bei Einsetzung des Werthes von r aus Nr. 9)

$$y = a \frac{\sin u}{u}.$$

Fig. 59.



Hieraus ergiebt sich sogleich die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung, wenn man beachtet, dass der Quotient $\frac{sin\, u}{u}$ kleiner als die Einheit ist, so lange sich u von Null unterscheidet, für $u = 0$ aber in Eins übergeht*). Da in dem letzteren Falle der Radiusvector unendlich werden muss, so stellt die Gerade LL' eine Asymptote dar.

Bemerkenswerth ist noch die folgende geometrische Deutung der Gleichung 8). Beschreibt man aus dem Mittelpunkte A mit dem Halbmesser AP den von der Spirale und der polaren Achse eingeschlossenen Kreisbogen PQ, so ist die Länge dieses Bogens gleich ru, wenn r und u die Polarcoordinaten des Punktes P bezeichnen. Mit Rücksicht auf die Gleichung der hyperbolischen Spirale folgt hieraus, dass ein solcher Kreisbogen, wie PQ, die unveränderliche Länge $a = AB$ besitzt, an welcher Stelle der Curve auch der Punkt P angenommen sein mag.

IV. Wird in der Gleichung der logarithmischen Linie (vergl. §. 42) y mit r und x mit u vertauscht, so entsteht die Gleichung der logarithmischen Spirale. Nach Analogie von §. 42 Nr. 3) kann sie immer auf die Form

$$10) \qquad r = A c^{\frac{u}{m}}$$

gebracht werden, woraus die Gleichung

$$11) \qquad r = m e^{\frac{u}{m}}$$

entsteht, wenn man die polare Achse mit Beibehaltung des Poles um einen in Theilen des Radius gemessenen Bogen a dreht, für welchen die Relation

$$a = m \log \frac{m}{A}$$

Geltung hat. Bei dieser Drehung geht nämlich u in $u + a$ über,

*) Aus der für jeden spitzen Bogen u geltenden Ungleichung

$$\tan u > u > \sin u$$

folgt, wenn man mit den darin enthaltenen Grössen in $\sin u$ dividirt,

$$\cos u < \frac{\sin u}{u} < 1.$$

Beide Grenzen, zwischen denen der Quotient $\frac{\sin u}{u}$ enthalten ist, rücken für abnehmende Werthe von u einander immer näher; schliesslich fallen beide zusammen und es geht auch der von ihnen eingeschlossene Quotient in die Einheit über, wenn $u = 0$ geworden ist.

und es sind nun dieselben Reductionen wie bei der logarithmischen Linie anwendbar. Wir können hierbei unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstehen und m als positive Zahl auffassen. Nach 11) ergiebt sich dann für jedes u ein positiver reeller Werth von r, der gleichzeitig mit u zunimmt. Für $u = 0$ ist $r = m$, für $u = +\infty$ wird auch $r = \infty$, für $u = -\infty$ ist $r = 0$. Die logarithmische Spirale erstreckt sich hiernach mit ihren Windungen auf der einen Seite ins Unendliche, während sie sich auf der andern dem Pole fortwährend nähert, ohne ihn je zu erreichen. Der Pol bildet in gleicher Weise wie in der vorher untersuchten Curve einen asymptotischen Punkt. Dabei müssen offenbar die einzelnen Windungen immer näher an einander rücken, je mehr sie sich diesem Punkte nähern. Wir finden diese Bemerkung bestätigt, wenn wir den allgemeinen Ausdruck für den geradlinigen Abstand zweier um den Umfang einer Windung von einander entfernten Punkte aufsuchen. Werden die Leitstrahlen der zu den Anomalien u und $2\pi + u$ gehörenden Punkte mit r und r' bezeichnet, so hat man

$$r = me^{\frac{u}{m}}, \quad r' = me^{\frac{2\pi + u}{m}} = me^{\frac{2\pi}{m}} e^{\frac{u}{m}},$$

folglich

$$r' - r = me^{\frac{u}{m}} \left(e^{\frac{2\pi}{m}} - 1\right).$$

Hierin bedeutet der auf der rechten Seite ausserhalb der Klammer befindliche Factor den Radiusvector r; der Inhalt der Parenthese dagegen ist eine beständige Grösse. Die Differenz $r' - r$ nimmt demnach in demselben Verhältnisse wie r ab oder zu.

Nach der Gleichung 11) sind auch noch negative Werthe von möglich, sobald $\frac{u}{m}$ einen Bruch mit geradem Nenner darstellt; man erhält hieraus zwar eine unbegrenzte Anzahl von Punkten, aber keine zusammenhängende Linie, weil diese Punkte nicht eine stetige Folge bilden.

§. 44.

Die Cycloiden.

Dieselbe gegenseitige Abhängigkeit, in welcher zwei durch eine Gleichung an einander gebundene veränderliche Grössen stehen, ist auch dann noch vorhanden, wenn die Werthe beider Variabeln durch zwei Gleichungen an eine dritte veränderliche

Grösse geknüpft sind. Hat man z. B. zwei Gleichungen von der Form

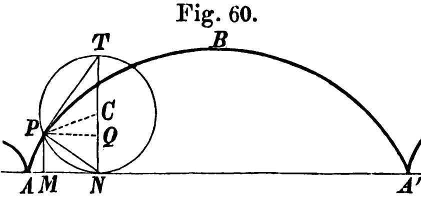
$$1) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

worin φ und ψ die allgemeinen Symbole beliebiger Functionen einer Variabeln t bezeichnen mögen, so erhält man daraus für jedes t zwei zusammengehörige Werthe von x und y, die, wenn man x und y als Parallelcoordinaten auffasst, die Lage eines Punktes bestimmen. Giebt nun die stetige Aenderung von t eine continuirliche Folge solcher Punkte, so wird durch das System der beiden Gleichungen 1) der zusammenhängende Lauf einer Linie bestimmt, ganz abgesehen davon, ob die Mittel der Mathematik ausreichen, die Hilfsvariabele t zwischen diesen Gleichungen zu eliminiren. Eine nutzbare Anwendung finden solche Gleichungssysteme namentlich bei einer Classe von Curven, die wir im Folgenden als letztes Beispiel transcendenter Linien vorführen wollen.

Wird an einer festen Linie eine andere so hinbewegt, dass sie mit ihr in fortwährender Berührung bleibt, sich dabei aber an der festen Linie abwickelt, so dass bei je zweien ihrer auf einander folgenden Lagen die zwischen den zusammengehörigen Berührungspunkten enthaltenen Bogenlängen in beiden Peripherien einander gleich sind, so beschreibt ein mit der bewegten Linie in fester Verbindung stehender Punkt eine neue Linie, die wir im Allgemeinen Cycloide oder Rollinie nennen wollen. Die einfachsten hierher gehörigen Fälle entstehen, wenn ein Kreis, ohne zu gleiten, auf einer Geraden oder auf der Peripherie eines anderen Kreises fortrollt, oder wenn eine Gerade sich, ohne verschoben zu werden, an der Peripherie eines Kreises bewegt.

I. Die gemeine Cycloide oder Cycloide im engeren Sinne ist der Weg, den ein Peripheriepunkt eines Kreises beschreibt, wenn letzterer, ohne zu gleiten, auf einer geraden Linie rollt. In Figur 60 sei AA' die feste Gerade und P der beschreibende Punkt, der in A mit dem Berührungspunkte der Geraden und des Kreises zusammengefallen sein mag. Wir nehmen AA' zur X-Achse und A zum Coordinatenanfange eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, setzen also $AM = x$, $PM = y$; der durch seine in Theilen des Halbmes-

Fig. 60.



sers ausgedrückte Bogenlänge gemessene Winkel PCN (der sogenannte Wälzungswinkel) heisse t und $CP = CT = CN = a$ sei der Radius des rollenden Kreises. Dann erhält man, wenn PQ parallel zur X-Achse gezogen wird, aus

$$x = AN - MN = Arc\, PN - PQ, \quad y = CN - CQ$$

die zusammengehörigen Gleichungen:

$$2) \qquad x = at - a \sin t, \quad y = a - a \cos t.$$

Reducirt man die letzte dieser beiden Gleichungen auf $\cos t$, so ergiebt sich:

$$\cos t = \frac{a-y}{a}, \quad \sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a},$$

$$t = Arc \cos \left(\frac{a-y}{a}\right),$$

und hiermit kann durch Einsetzung dieser Werthe in die erste Gleichung die Hilfsgrösse t eliminirt werden. Bequemer ist es aber in den meisten Fällen, von dem Systeme der Gleichungen 2) Gebrauch zu machen.

Aus der für y aufgestellten Gleichung folgt, dass die Ordinate immer zwischen den Grenzen 0 und $2a$ enthalten sein muss, und zwar ist $y = 0$, wenn $\cos t = 1$, oder wenn t einen der Werthe

$$\ldots -4\pi, \quad -2\pi, \quad 0, \quad +2\pi, \quad +4\pi, \ldots$$

besitzt; man erhält dann für x die Längen

$$\ldots -4a\pi, \quad -2a\pi, \quad 0, \quad +2a\pi, \quad +4a\pi, \ldots$$

Ferner erreicht y seinen grössten Werth $2a$, so oft $\cos t = -1$, oder so oft t einen der Werthe

$$\ldots -3\pi, \quad -\pi, \quad +\pi, \quad +3\pi, \ldots$$

erlangt; für x finden sich dann die zugehörigen Grössen

$$\ldots -3a\pi, \quad -a\pi, \quad +a\pi, \quad +3a\pi, \ldots$$

Werden hierzu noch Zwischenwerthe gefügt, so kommt man zu der Erkenntniss, dass die Curve aus unendlich vielen congruenten Zügen von der Form ABA' (Fig. 60) besteht.

Als ein weiteres Beispiel dafür, in welcher Weise das System der Gleichungen 2) zur Untersuchung der Curve zu benutzen ist, wählen wir die Ermittelung der Tangentenlage. Wir können hierzu im Allgemeinen den im §. 41 zur Auffindung der Tangenten algebraischer Curven benutzten Weg einschlagen, indem wir nämlich von der Richtung einer zwei Peripheriepunkte enthaltenden Secante durch Drehung dieser Geraden bis zum Zusammenfallen beider Peripheriepunkte zur Tangentenrichtung übergehen.

Sind $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ zwei Cycloidenpunkte, denen die Wälzungswinkel $t + \delta$ und $t - \delta$ zugehören, so ist

$$3)\quad \begin{cases} x_1 = a(t + \delta) - a \sin(t + \delta), & y_1 = a - a \cos(t + \delta), \\ x_2 = a(t - \delta) - a \sin(t - \delta), & y_2 = a - a \cos(t - \delta). \end{cases}$$

Unter Benutzung der Formeln

$$4)\quad \begin{cases} \sin(t + \delta) - \sin(t - \delta) = 2 \cos t \sin \delta \\ \cos(t - \delta) - \cos(t + \delta) = 2 \sin t \sin \delta \end{cases}$$

folgt hieraus für den Winkel σ, den eine die Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ enthaltende Secante mit der Abscissenachse einschliesst,

$$5)\qquad \tan \sigma = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\sin t \sin \delta}{\delta - \cos t \sin \delta}.$$

Wird hierin im Zähler und Nenner durch δ dividirt, so entsteht, wenn wir zur Abkürzung

$$6)\qquad \frac{\sin \delta}{\delta} = \varepsilon$$

setzen, die Gleichung:

$$7)\qquad \tan \sigma = \frac{\varepsilon \sin t}{1 - \varepsilon \cos t}.$$

Für $\delta = 0$ wird $\varepsilon = 1$ (vergl. die Anmerkung auf S. 228); dabei fallen beide Peripheriepunkte zusammen und die Secante wird zur Tangente. Bezeichnet also τ den Winkel, den diese Tangente mit der X-Achse bidet, so folgt aus 7)

$$8)\qquad \tan \tau = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \cot \tfrac{1}{2} t.$$

Man kann hieraus leicht herleiten, dass die Tangente im Punkte P (Fig. 60) durch den von der Geraden AA' am weitesten abstehenden Punkt T des Erzeugungskreises gehen muss. PT ist Tangente und PN Normale.

Beobachtet man den Weg, den, während der Erzeugungskreis auf der Basis AA' rollt, ein auf dem Radius CP oder seiner Verlängerung, im Abstande c vom Kreismittelpunkte gelegener Punkt beschreibt, so erhält man in gleicher Weise, wie die Gleichungen 2) entstanden, für den Ort dieses Punktes die zusammengehörigen Formeln

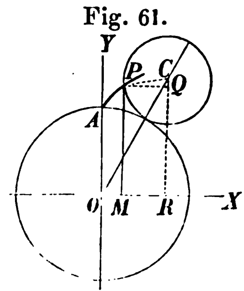
$$9)\qquad x = at - c \sin t, \quad y = a - c \cos t.$$

Die hierdurch ausgedrückte Curve führt den Namen geschweifte oder gedehnte Cycloide, wenn $c < a$, verkürzte oder verschlungene Cycloide, wenn $c > a$. Die Untersuchung

r Gestalt mit Benutzung der Gleichungen 9) kann in ähnlicher ise wie bei der gemeinen Cycloide geführt werden.

II. Rollt ein Kreis auf der Aussenseite der Peripherie eines n Kreises, so beschreibt ein Peripheriepunkt der rollenden e eine sogenannte Epicycloide. Zur ittelung der Gleichungen dieser Curve n wir in Figur 61 durch den Mittelpunkt festen Kreises ein rechtwinkliges Coortensystem, dessen Y-Achse den Anspunkt A der Bewegung enthält, in hem der beschreibende Punkt P mit Berührungspunkte beider Kreise zunenfiel. Setzen wir wieder den Wälswinkel $PCO = t$, so ist wegen der Gleichheit der an einander wickelten Bogenlängen $\angle AOC = \frac{at}{b}$ und $\angle PCQ = \frac{(b+a)t}{b}$,

Fig. 61.



a a den Radius des rollenden und b den Radius des festen Kreibezeichnet. Sämmtliche Winkel sollen hierbei wie vorher in len des Halbmessers ausgedrückt werden. Aus der Figur folgt zunächst, wenn $PQ \parallel OX$ und $CR \parallel OY$ gezogen ist,

$$OM = OR - PQ, \quad PM = CR - CQ,$$

hieraus ergiebt sich für die Coordinaten x und y des beschreilen Punktes P:

$$0) \quad \begin{cases} x = (b+a)\, sin\, \frac{at}{b} - a\, sin\, \frac{(b+a)\,t}{b} \\ y = (b+a)\, cos\, \frac{at}{b} - a\, cos\, \frac{(b+a)\,t}{b}. \end{cases}$$

den beide Gleichungen quadrirt und addirt, so erhält man für Quadrat der Entfernung des Punktes P vom Mittelpunkte O esten Kreises:

$$1) \quad x^2 + y^2 = (b+a)^2 + a^2 - 2a\,(b+a)\, cos\, t,$$

us sofort folgt, dass diese Entfernung immer zwischen den zen b und $b + 2a$ enthalten sein muss. An der ersten dieser n Grenzen ist $cos\, t = 1$, t besitzt also einen der Werthe

$$\ldots -4\pi, \quad -2\pi, \quad 0, \quad +2\pi, \quad +4\pi, \ldots,$$

r zweiten Grenze ist $cos\, t = -1$, woraus man für t die Werthe

$$\ldots -3\pi, \quad -\pi, \quad +\pi, \quad +3\pi, \ldots$$

t. Die zugehörigen x und y finden sich aus den Gleichun-0).

Sobald die beiden Radien a und b in einem commensurablen Verhältnisse stehen, sind die Epicycloiden nicht mehr transcendente Linien, sondern gehören in das Gebiet der algebraischen Curven. In diesem Falle sind nämlich offenbar auch die Winkel $\frac{at}{b}$ und $\frac{(b+a)t}{b}$ commensurabel. Bezeichnen wir nun ihr gemeinschaftliches Maas mit ϑ, so lässt sich

$$\frac{at}{b} = m\vartheta, \qquad \frac{(b+a)t}{b} = n\vartheta$$

setzen, wobei m und n zwei ganze Zahlen bezeichnen. Dann erlangen die Gleichungen 10) die Form:

$$x = (b+a)\sin m\vartheta - a\sin n\vartheta,$$
$$y = (b+a)\cos m\vartheta - a\cos n\vartheta,$$

worin man nur die trigonometrischen Functionen der Winkel $m\vartheta$ und $n\vartheta$ in bekannter Weise durch $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ auszudrücken hat, um mittelst der Gleichung $\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$ den Winkel ϑ eliminiren zu können. Es bleibt dann eine algebraische Gleichung zwischen x und y. — Als einfachstes hierher gehöriges Beispiel wählen wir den Fall, wenn beide Radien einander gleich sind. Die angegebene Rechnungsform lässt hierbei noch einige Vereinfachungen zu. Setzen wir nämlich in Nr. 10) $b = a$ und verlegen zugleich den Coordinatenanfang nach A (Fig. 61), so dass y in $y + a$ übergeht, so erhalten wir für den vorliegenden Fall:

$$x = 2a\sin t - a\sin 2t,$$
$$y = 2a\cos t - a(1+\cos 2t).$$

Mittelst der Formeln

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t, \qquad 1 + \cos 2t = 2\cos^2 t$$

folgt hieraus:

$$x = 2a\sin t\,(1-\cos t)$$
$$y = 2a\cos t\,(1-\cos t).$$

Beide letzte Gleichungen geben durch Division verbunden

$$\tan t = \frac{x}{y}, \text{ folglich } \cos t = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

und, wenn man sie quadrirt und addirt,

$$x^2 + y^2 = 4a^2(1-\cos t)^2.$$

Wird hierein der vorhergehende Werth von $\cos t$ gesetzt, so entsteht nach einfacher Umformung:

$$12) \qquad (x^2+y^2)^2 + 4ay(x^2+y^2) - 4a^2x^2 = 0.$$

Die durch diese Gleichung ausgedrückte Linie vierten Grades besitzt eine herzförmige Gestalt und führt den Namen Cardioide.

III. Lässt man den beweglichen Kreis auf der innern Seite der Peripherie eines festen Kreises rollen, so wird die von einem seiner Peripheriepunkte beschriebene Curve Hypocycloide genannt. Ihre Gleichungen werden unter Beibehaltung der vorher angewendeten Bezeichnungen und der früheren Lage des Coordinatensystems ohne Weiteres aus den für die Epicycloide geltenden Formeln hergeleitet, wenn man dem Halbmesser a und dem Wälzungswinkel t, welche beide in eine entgegengesetzte Lage übergehen, die entgegengesetzten Vorzeichen ertheilt. Man wird diese Bemerkung bestätigt finden, wenn man die Figur 61 in der dem jetzigen Falle entsprechenden Weise abändert. Nach Analogie von Nr. 10) ergeben sich dann für den Hypocycloidenpunkt xy mit dem Wälzungswinkel t die Gleichungen:

$$13)\quad \begin{cases} x = (b-a)\sin\frac{at}{b} - a\sin\frac{(b-a)t}{b} \\ y = (b-a)\cos\frac{at}{b} + a\cos\frac{(b-a)t}{b}, \end{cases}$$

woran ähnliche Betrachtungen wie bei der Epicycloide geknüpft werden können. So gelangt man u. A. in gleicher Weise wie dort zu dem Resultate, dass, wenn die Halbmesser der beiden Kreise commensurabel sind, die Hypocycloide in das Gebiet der algebraischen Curven übertritt. Untersuchen wir z. B. den Fall, wo der Durchmesser des rollenden Kreises gleich dem Radius der festen Basis oder $b = 2a$ ist, so entsteht aus Nr. 13)

$$x = 0, \quad y = 2a\cos\tfrac{1}{2}t.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, dass dann die Hypocycloide in die geradlinige Ordinatenachse degenerirt, die zweite, dass der beschreibende Punkt immer innerhalb derjenigen Strecke dieser Geraden bleiben muss, in welcher sie einen Durchmesser des festen Kreises bildet.

Fig. 62.

IV. Als letztes Beispiel einer Linie, welche nach der früher aufgestellten Begriffsbestimmung im weiteren Sinne ebenfalls zur Classe der Cycloiden gezählt werden kann, wählen wir die Kreisevolvente (Fig. 62). Sie wird von einem Punkte P einer Geraden PN beschrieben, die sich ohne Verschiebung

an der Peripherie eines festen Kreises so fortbewegt, dass sie immer mit ihm in Berührung bleibt. Es bildet also diese Curve gewissermassen den directen Gegensatz der gemeinen Cycloide, indem bei ihr der Kreis fest und die Gerade beweglich ist, während dort der umgekehrte Fall stattfand.

Um ihre Gleichungen für Parallelcoordinaten zu ermitteln, benutzen wir ein rechtwinkliges System, dessen Anfang mit dem Mittelpunkte O des gegebenen Kreises zusammenfällt. Die Y-Achse wird durch den in der Kreisperipherie befindlichen Curvenpunkt A gelegt. Stellen $OM = x$ und $PM = y$ die Coordinaten des beschreibenden Punktes P dar, für welchen die bewegte Gerade PN den Kreis in N tangirt, so ist, wenn man ON und NR parallel zu den Coordinatenachsen zieht,

$$x = OR - QN, \quad y = NR + PQ.$$

Wird nun der Radius $OA = ON = a$ gesetzt und der in Theilen des Halbmessers ausgedrückte Winkel AON mit t bezeichnet, so erhält man aus dem Entstehungsgesetze der Curve:

$$PN = Arc\, AN = at,$$

folglich in Verbindung mit den vorhergehenden Gleichungen:

$$14) \quad \begin{cases} x = a \sin t - a t \cos t \\ y = a \cos t + a t \sin t. \end{cases}$$

Soll die Kreisevolvente durch Polarcoordinaten r und u (in gleicher Weise wie bei den Spiralen, mit denen sie der Gestalt nach verwandt ist) ausgedrückt werden, so können auch diese beiden veränderlichen Grössen vom Winkel t abhängig gemacht werden. Behalten wir O als Coordinatenanfang bei und nehmen OY zur polaren Achse, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan u = \frac{x}{y}.$$

Mit Benutzung von Nr. 14) giebt die erste dieser beiden Formeln

$$15) \quad r^2 = a^2 + a^2 t^2,$$

woraus in Uebereinstimmung mit der Entstehungsweise der Evolvente folgt, dass kein Punkt dieser Curve innerhalb des festen Kreises gelegen sein kann. Von $r = a$ an wachsen die Werthe von r gleichzeitig mit t ins Unendliche. Die Gleichung $\tan u = \frac{x}{y}$ führt, wenn man aus 14) die Werthe von x und y einsetzt und im Zähler und Nenner durch $a \cos t$ dividirt, zu dem Resultate:

$$\tan u = \frac{\tan t - t}{1 + t \tan t}.$$

Vird hierin auf t reducirt, so entsteht die einfache Formel:

16) $$t = \tan (t - u),$$

us welcher die den verschiedenen t zugehörigen Werthe von u erechnet werden können. — Die Gleichungen 15) und 16) lassen ich übrigens auch auf sehr leichte Weise unmittelbar aus der 'igur 62 herleiten, wenn man darin den Leitstrahl OP zieht. Wir eben dies der Selbstübung des Lesers anheim.

Die Untersuchung über die Lage der Tangenten einer Kreisvolvente kann mit Hilfe der Gleichungen 14) auf demselben Wege ie bei der gemeinen Cycloide geführt werden. Sie liefert das esultat, dass alle Tangenten des festen Kreises, welcher die Evote darstellt, Normalen der Evolvente bilden. Es ist dies eine ligenschaft, welche jeder Evolute in Beziehung zu ihrer Evolvente ukommt.

Berichtigungen.

S. 29 Formel 8) fehlt vor $= x_1$ der Buchstabe a.
„ 44 Z. 2 v. u. statt hermonischer lies harmonischer.
„ 59 „ 14 v. o. statt $b - r^2$ lies $b^2 - r^2$.
„ 65 „ 5 v. u. statt Umgleichung lies Ungleichung.
„ 201 „ 2 v. o. statt $x_2 y_3$ lies $x_3 y_3$.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

LEHRBUCH

DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

BEARBEITET

VON

O. FORT UND **O. SCHLÖMILCH,**

PROFESSOREN AN DER POLYTECHNISCHEN SCHULE ZU DRESDEN.

ZWEITER THEIL.

ANALYTISCHE GEOMETRIE DES RAUMES

VON

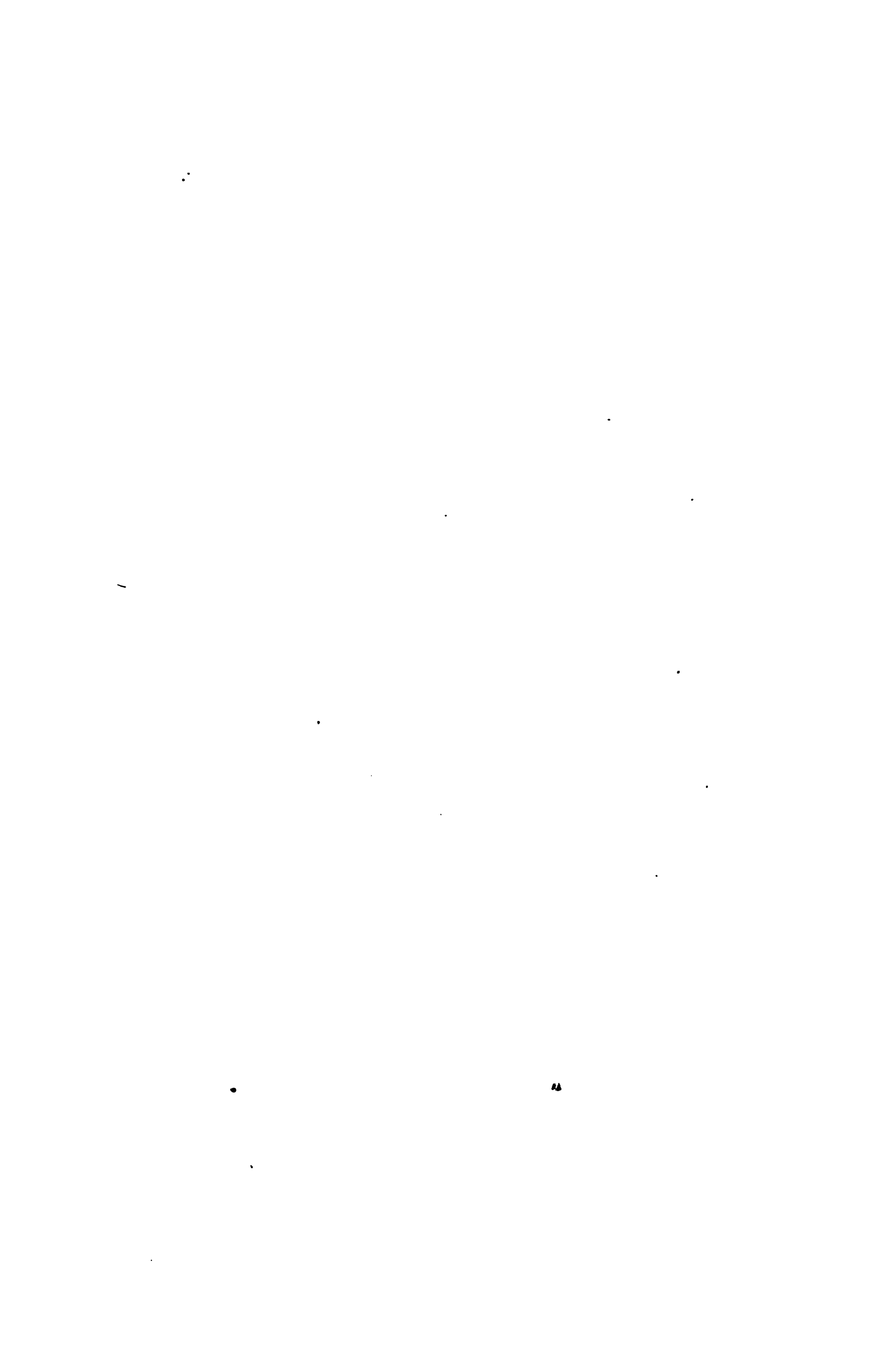
O. SCHLÖMILCH.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1855.



Vorrede zum zweiten Theile.

Ausarbeitung der analytischen Geometrie des Rau-
ɜ ich meine Aufmerksamkeit vorzüglich auf zwei
'erichtet, die gerade für ein Schulbuch — und mehr
vorliegende nicht sein — ihre Berechtigung haben

zunächst die dem Calcül der analytischen Geometrie
ɑlichen Abstractionen möglichst anschaulich zu ma-
die nahe Verwandtschaft der analytischen und der
'en Geometrie soviel als thunlich hervorgehoben wor
ı hätte ich die Analogie zwischen beiden noch weiter
.il verfolgt und an einer Reihe von Aufgaben den
mus des analytischen und descriptiven Verfahrens
esen, wenn nicht hierdurch eine Weitläufigkeit der
n und ein Figurenreichthum entstanden wäre, die
den engen Grenzen eines Lehrbuchs nicht vertra-
musste mich daher auf eine principielle Erörterung
ɛen und habe nachher nur an geeigneten Stellen jene
näher berührt. Im Zusammenhange damit ist die Ent-
ʒ der Fundamentalformeln durchaus nach einem und
ɑ Verfahren, nämlich durch Anwendung von Pro-
ausgeführt worden; man erhält hierdurch auch die
zur Coordinatenverwandlung auf die kürzeste Weise
ohne Rechnung.
ltens habe ich in Dem, was ich gebe, nach einer ge-
ɔllständigkeit gestrebt. So sind die lehrreichen, auf
inien und Ebenen bezüglichen Aufgaben, welche die
ʳe Geometrie sorgfältig zu behandeln pflegt, mit mög-
\usführlichkeit und allgemein in Beziehung auf ein
.kliges Coordinatensystem bearbeitet, wobei sich hie

und da auch einige wissenschaftliche Ausbeute fand, wie z. B. in §. 11 die Construction der Transversalen zu vier gegebenen Geraden. — Für die Flächen zweiten Grades habe ich zwei Discussionen gegeben, die Cauchy'sche und die Plücker'sche, und zwar scheint mir letztere die nothwendige wissenschaftliche Ergänzung der ersten zu sein. Wenn es nämlich nur darauf ankommt, aus der allgemeinen Gleichung die individuellen Flächen auszulesen, so kann man sich die Sache durch Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes erleichtern und dann führt Cauchy's Betrachtung jedenfalls auf die kürzeste und eleganteste Weise zum Ziele (§§. 34 — 36); hieran schliesst sich naturgemäss die Betrachtung der einzelnen Flächen, wie sie in den §§. 37 — 41 mitgetheilt ist. Wenn aber nachher die Gleichung irgend einer Fläche zweiten Grades auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem bezogen vorkommt und rasch entschieden werden soll, welche individuelle Fläche durch dieselbe charakterisirt wird, so wäre es eine zu grosse Umständlichkeit, die Gleichung auf rechtwinklige Coordinaten zu bringen und die ganze Cauchy'sche Betrachtung zu wiederholen; hier ist es die Plücker'sche Discussion, welche durch Entwickelung leicht anwendbarer Criterien eine augenblickliche Entscheidung herbeiführt (§. 42); bei dieser Stellung lässt sich übrigens die Plücker'sche Untersuchung vereinfachen, weil man die individuellen Flächen zweiten Grades als schon bekannt voraussetzen darf.

Das letzte Capitel — die analytische Projectionslehre — ist gewissermassen nur ein Anhang zur analytischen Geometrie, hoffentlich aber Denen nicht unwillkommen, welchen daran liegt, die Ergebnisse des Calcüls in möglichst einfacher Weise graphisch darstellen zu können.

Dresden, Michaelis 1855.

O. Schlömilch.

Inhalt des zweiten Theiles.

ANALYTISCHE GEOMETRIE
DES RAUMES.



Erstes Capitel.

Die Punkte im Raume.

---

§. 1.

Das Parallelcoordinatensystem.

o wie man in der analytischen Geometrie der Ebene die Lage ıes Punktes dadurch bestimmen kann, dass man ihn auf ein Sy- ım ebener Parallelcoordinaten bezieht, so benutzt man zur Fixi- ıg eines im Raume befindlichen Punktes ein analoges System ımlicher Parallelcoordinaten, welches auf folgende Weise zu ınde kommt.

Wir denken uns drei in einem Punkte O sich schneidende ıenen ihrer Lage nach als fest bestimmt; der Durchschnitt der ıten und zweiten Ebene heisse OX, der Durchschnitt der ersten d dritten OY, der Durchschnitt der zweiten und dritten OZ. Die ıte Ebene, welche die Geraden OX und OY enthält, nennen wir ı Coordinatenebene oder Projectionsebene xy, in ıicher Weise bezeichnen wir die beiden anderen Ebenen XOZ d YOZ als die Coordinaten- oder Projectionsebenen xz und yz. e Geraden OX, OY, OZ heissen die Coordinatenachsen und ar OX die Achse der x, OY die der y und OZ die der z; der ınkt O, in welchem die Coordinatenachsen zusammentreffen, wird r Anfangspunkt der Coordinaten genannt, die Winkel ƆY, XOZ, YOZ endlich, welche die Coordinatenachsen mit ein- der bilden, mögen den Namen der Coordinatenwinkel

führen und der Reihe nach mit $\angle(xy)$, $\angle(xz)$, $\angle(yz)$ bezeichnet werden.

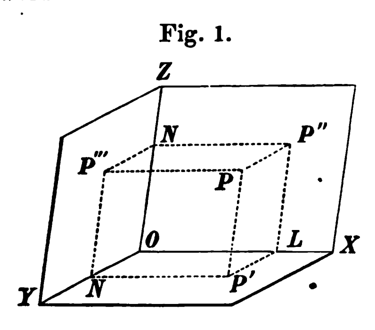


Fig. 1.

Betrachten wir nun einen Punkt P innerhalb des von den Coordinatenebenen eingeschlossenen Raumes, so können wir seine Lage dadurch bestimmen, dass wir durch P drei den Coordinatenebenen parallele Ebenen legen und die Abschnitte angeben, welche diese neuen Ebenen auf den Coordinatenachsen bilden. Die vorhandenen sechs Ebenen schliessen nämlich ein Parallelopiped ein, dessen Kanten den Coordinatenachsen parallel laufen; die Punkte O und P sind zwei gegenüberliegende Ecken desselben; von den übrigen sechs Ecken mögen L, M, N diejenigen sein, welche der Reihe nach in den Achsen der x, der y und der z liegen, endlich P', P'', P''' diejenigen, welche der Reihe nach in die Ebenen xy, xz und yz fallen. Das fragliche Parallelopiped ist nun bestimmt und damit zugleich die Lage des Punktes P gegeben, sobald man die drei Kanten des Körpers kennt; sie werden bezeichnet durch

$$OL = MP' = NP'' = PP''' = x,$$
$$OM = NP''' = LP' = PP'' = y,$$
$$ON = LP'' = MP''' = PP' = z,$$

und heissen die **schiefwinkligen Parallelcoordinaten** (oft auch schlechtweg die Coordinaten) des Punktes P. Die in den Coordinatenebenen liegenden Eckpunkte P', P'', P''' nennt man die **schiefwinkligen Projectionen** des Punktes P; ihre Lagen sind durch x, y, z gleichzeitig bestimmt, denn es lassen sich $OL = x$ und $OM = y$ als die ebenen Parallelcoordinaten der Projection P' auf die Ebene xy betrachten, in gleicher Weise x und z als Coordinaten der Projection P'' auf die Ebene xz, so wie y und z als Coordinaten der Projection P''' auf die Ebene yz.

Um allgemeiner die Lage eines beliebigen nicht gerade innerhalb des Körperwinkels $OXYZ$ befindlichen Punktes zu bestimmen, denken wir uns die bisherigen Coordinatenebenen allseitig ins Unendliche erweitert, so dass auch die bisher nur nach einer Seite hin ins Unendliche fortgehenden Coordinatenachsen jetzt

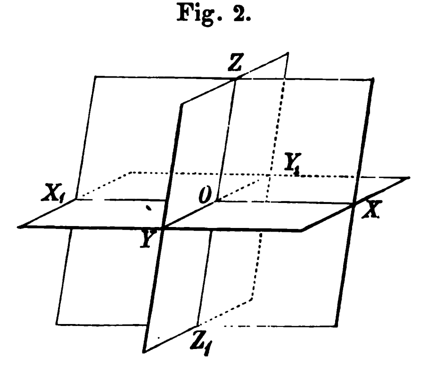


Fig. 2.

ch beiden Seiten hin undlich werden. Die eriterten Coordinatenebenen eilen den ganzen unendhen Raum in acht Theile, e sich als körperliche Win l bezeichnen lassen, wenn e Rückverlängerungen von Y, OY, OZ der Reihe nach Y_1, OY_1, OZ_1 genannt wern; man hat nämlich die ht Winkelräume

$$OXYZ,$$
$$OX_1YZ, \quad OXY_1Z, \quad OXYZ_1,$$
$$OXY_1Z_1, \quad OX_1YZ_1, \quad OX_1Y_1Z,$$
$$OX_1Y_1Z_1.$$

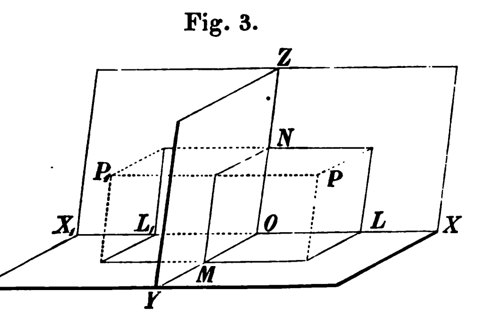


Fig. 3.

Befindet sich nun r Punkt P_1 in dem ume OX_1YZ, so sitzt das seine Lage stimmende Parallopiped die Kanten L_1, OM, ON, von nen die erste der iheren Kante OL tgegengesetzt liegt d deshalb mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen wern muss; vorausgesetzt, dass die von O nach X hin gezählten x s positive x betrachtet werden, ist im vorliegenden Falle x netiv zu nehmen. Auf gleiche Weise entscheidet sich bei jeder deren Lage die Wahl des Vorzeichens; wenn überhaupt die potiven x, y, z im Sinne von OX, OY, OZ genommen und die abluten Werthe der Coordinaten immer mit x_0, y_0, z_0 bezeichnet erden, so sind die Coordinaten eines Punktes

im Raume $OXYZ$: $x = + x_0$, $y = + y_0$, $z = + z_0$;
„ „ OX_1YZ : $x = - x_0$, $y = + y_0$, $z = + z_0$;
„ „ OXY_1Z : $x = + x_0$, $y = - y_0$, $z = + z_0$;
„ „ $OXYZ_1$: $x = + x_0$, $y = + y_0$, $z = - z_0$;
„ „ OXY_1Z_1 : $x = + x_0$, $y = - y_0$, $z = - z_0$;

im Raume OX_1YZ_1 : $x = -x_0$, $y = +y_0$, $z = -z_0$;
„ „ OX_1Y_1Z : $x = -x_0$, $y = -y_0$, $z = +z_0$;
„ „ $OX_1Y_1Z_1$: $x = -x_0$, $y = -y_0$, $z = -z_0$.

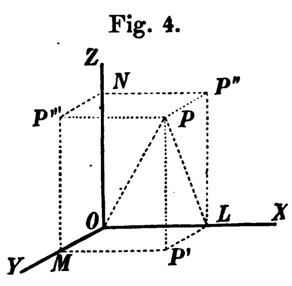
Liegt ein Punkt in einer der Coordinatenebenen, so ist eine seiner Coordinaten der Null gleich, gehört er zwei Coordinatenebenen zugleich an, d. h. liegt er auf einer der Coordinatenachsen, so verschwinden zwei seiner Coordinaten, für den Anfangspunkt der Coordinaten, der allen Coordinatenebenen zugleich angehört, gelten die Coordinaten $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$.

§. 2.

Das rechtwinklige Coordinatensystem und seine graphische Darstellung.

Wenn nicht besondere Umstände die Wahl eines schiefwinkligen Coordinatensystemes erfordern, nimmt man in der Regel die Coordinatenebenen senkrecht zu einander, wodurch auch die zwischen den Coordinatenachsen enthaltenen Winkel [$\angle(xy)$, $\angle(xz)$, $\angle(yz)$] zu rechten Winkeln werden; das so entstehende specielle System von Parallelcoordinaten heisst das **rechtwinklige** Coordinatensystem und bedarf wegen seines überaus häufigen Gebrauches einer genaueren Betrachtung.

Fig. 4.

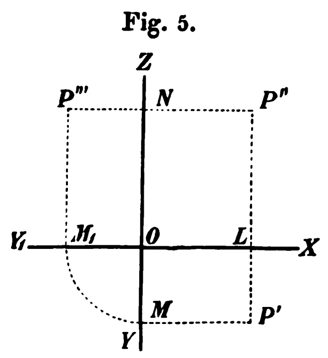


Was zunächst die Coordinaten $x = PP'''$, $y = PP''$ und $z = PP'$ anbetrifft, so stehen diese senkrecht auf den zugehörigen Coordinatenebenen, d. h. die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes sind seine **Entfernungen** von den Coordinatenebenen, und zwar ist x die Entfernung des Punktes von der Ebene yz, dem analog y seine Entfernung von der Ebene xz, endlich z seine Entfernung von der Ebene xy.

Die Projectionen P', P'', P''' des Punktes P werden jetzt zu dessen orthogonalen (oder normalen) Projectionen, denen wir in Uebereinstimmung mit der descriptiven Geometrie besondere Nennen beilegen wollen; es heisse nämlich P' die **Horizontalprojection**, P'' die **Vertikalprojection** und P''' die **seitliche** (vertikale) Projection des Punktes P. Diese Beziehungen sind leicht in einer Ebene darzustellen, wenn man die Ebene xy so

weit um die x-Achse und die Ebene yz so weit um die z-Achse gedreht denkt, bis beide Ebenen mit der Ebene xz zusammen fallen. Nehmen wir letztere zur Ebene der Zeichnung, so repräsentiren die drei neben einander liegenden Winkelräume XOY, XOZ und Y_1OZ die drei Coordinaten- oder Projectionsebenen, wobei die y-Achse in zwei verschiedenen Lagen OY und OY_1 erscheint.

Fig. 5.



Die früheren rechtwinklig zu einander und senkrecht auf der x-Achse stehenden Geraden LP' und LP'' vereinigen sich zu einer einzigen Geraden $P'P''$, welche die x-Achse senkrecht in L schneidet; zugleich hat man die drei rechtwinkligen Coordinaten des Punktes vor sich, nämlich $OL = x$, $LP' = y$ und $LP'' = z$. Die dritte Projection P''' lässt sich übrigens leicht aus P' und P'' ableiten, wenn man berücksichtigt, dass P''' die Ecke eines aus den Seiten $OM_1 = OM = LP' = y$ und $ON = LP'' = z$ construirten Rechtecks ist; eben desswegen pflegt man bei der graphischen Darstellung der Coordinaten und Projectionen eines Punktesystemes die dritte Projection wegzulassen. Zu bemerken ist endlich noch, dass man sich die beiden übrig bleibenden Ebenen xy und xz (die horizontale und vertikale Projectionsebene) vollständig, d. h. in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung zu denken hat, dass mithin die Ebene der Zeichnung als eine aus der Aufeinanderlagerung zweier Ebenen entstandene Doppelebene zu betrachten ist. Demgemäss bedeutet der unterhalb der x-Achse liegende Theil der Zeichnung eben so wohl die Vorderseite der Horizontalebene, als die untere Hälfte der Vertikalebene, und in ähnlicher Weise enthält der oberhalb der x-Achse liegende Theil der Zeichnung eben so wohl die hintere Seite der Horizontalebene, als die obere Hälfte der Vertikalebene; dennoch kann über die Bedeutung eines Punktes kein Zweifel entstehen, wenn die in der Horizontalebene liegenden Punkte jederzeit mit einem und die der Vertikalebene angehörigen Punkte immer mit zwei Accenten bezeichnet werden.

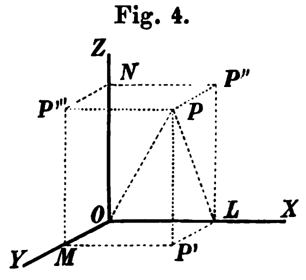
Man wird bemerken, dass diese graphische Darstellung der Coordinaten und Projectionen eines Punktes mit der in der de-

scriptiven Geometrie üblichen Auffassung zusammenstimmt. In der That sind auch beide Darstellungen nicht wesentlich verschieden, und wenn man in einer descriptiv-geometrischen Zeichnung die sogenannte Grundlinie (den Grundschnitt) als x-Achse nimmt, auf ihr einen festen Punkt O wählt und die in einer Vertikalen liegenden Projectionen P' und P'' eines Punktes durch eine Gerade verbindet, welche die x-Achse in L senkrecht schneidet, so sind $OL = x$, $LP' = y$ und $LP'' = z$ die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P im Raume.

§. 3.

Das polare Coordinatensystem.

Fig. 4.

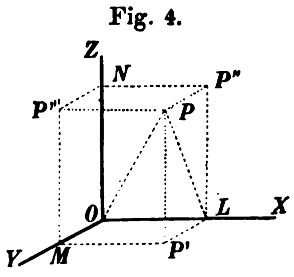


Der Punkt P, dessen Parallelcoordinaten wieder x, y und z heissen mögen, lässt sich als zur Ebene LOP gehörig betrachten und demgemäss kann seine Lage in dieser Ebene durch die ebenen Polarcoordinaten $OP = r$ und $\angle POX = \varphi$ bestimmt werden. Um ferner die Lage der veränderlichen Ebene LOP angeben zu können, muss man ihren Neigungswinkel gegen irgend eine feste Ebene in Betracht ziehen; zu letzterer wählen wir die xy-Ebene und bezeichnen den erwähnten Neigungswinkel mit ω. Die drei Grössen r, φ und ω, die sogenannten räumlichen Polarcoordinaten, bestimmen nun die Lage des Punktes P vollkommen unzweideutig, so bald man festgesetzt hat, in welcher Weise r, φ und ω gezählt werden sollen. Was zunächst ω anbelangt, so mag die positive Drehungsrichtung diejenige sein, bei welcher die positive Seite der xy-Ebene auf dem kürzesten Wege in die positive Seite der xz-Ebene überführt werden kann, für φ gehe die positive Drehungsrichtung von dem positiven Theile der x-Achse auf dem kürzesten Wege nach der positiven Seite der yz-Ebene hin; r endlich kann entweder im absoluten Sinne oder algebraisch (d. h. eben so wohl positiv als negativ) genommen werden. Gestattet man dem r keine verschiedenen Vorzeichen, so ist φ von 0^0 bis bis 180^0 und ω von 0^0 bis 360^0 zu zählen, wenn der Punkt P die Füglichkeit erhalten soll, jede beliebige Stelle des ganzen unendlichen Raumes betreten zu können, will man aber positive und

negative r zulassen (was unter Umständen nothwendig werden kann), so erhalten φ und ω den gemeinschaftlichen Spielraum von 0^0 bis 180^0.

Sehr einfach sind die Beziehungen zwischen den rechtwinkligen und polaren Coordinaten eines Punktes P; aus den Dreiecken OLP und $LP'P$, deren gleichnamige Winkel Rechte sind, ergeben sich die Formeln

Fig. 4.



$$1)\quad \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \cos \omega, \\ z = r \sin \varphi \sin \omega, \end{cases}$$

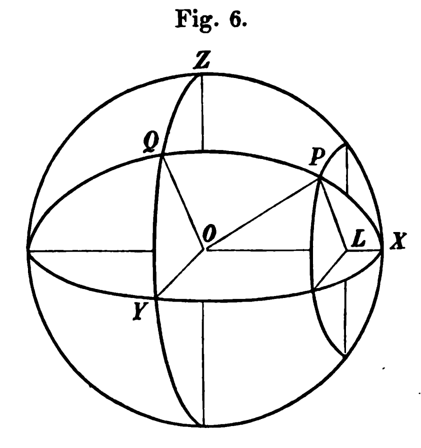
welche zum Uebergange von dem rechtwinkligen zu dem polaren Systeme dienen; umgekehrt ist

$$2)\quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \tan \omega = \frac{z}{y}. \end{cases}$$

Sobald man sich hier über das Vorzeichen von r entschieden hat, finden auch φ und ω ihre unzweideutige Bestimmung, es sind nämlich immer diejenigen Werthe zu nehmen, wodurch x, y, z, nach den Formeln 1) berechnet, die Vorzeichen erhalten, welche sie thatsächlich besitzen. Wären z. B. gegeben $x = +a$, $y = -b$, $z = -c$, wo a, b, c die absoluten Werthe der Coordinaten bedeuten und wird r positiv genommen, so ist $\cos \varphi$ positiv, mithin φ zwischen 0^0 und 90^0 enthalten; da jetzt $r \sin \varphi$ positiv ausfällt, y und z aber negativ sind, so muss ω so gewählt werden, dass $\cos \omega$ und $\sin \omega$ zugleich negativ sind; demgemäss hat man für ω denjenigen Winkel zwischen 180^0 und 270^0 zu nehmen, dessen Tangente $= \frac{c}{b}$ ist. Dasselbe Resultat findet sich leicht geometrisch, wenn man beachtet, in welchem Octanten des Raumes der durch $x = a$, $y = -b$ und $z = -c$ bestimmte Punkt liegt.

Noch wollen wir bemerken, dass das besprochene Coordinatensystem in nahem Zusammenhange mit der geographischen Ortsbestimmung steht. Denken wir uns zunächst nur r gegeben, so ist die Lage des Punktes P noch nicht vollkommen bestimmt, vielmehr kann er beliebig auf einer mit dem Halbmesser r um den Mittelpunkt O beschriebenen Kugel liegen; es bedarf daher noch einer näheren Angabe seiner Lage auf dieser Fläche. Stellen

Fig. 6.



wir uns letztere auf die Weise entstanden vor, dass sich ein in der xy-Ebene aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser r beschriebener Halbkreis um die x-Achse gedreht hat, so ist die Ebene der xy die erste Meridianebene der Kugel und die Ebene LOP irgend eine spätere Meridianebene, deren Lage gegen die erste durch den Neigungswinkel ω bestimmt wird; letzterer ist daher nichts Anderes als die geographische Länge des Punktes P. Bei jener Drehung beschreibt ferner die y-Achse den auf der Drehungsachse senkrechten grössten Kreis, d. h. den Aequator, mithin ist $\angle POQ$ die geographische Breite des Punktes P und folglich φ das Complement der Breite oder die Poldistanz.

§. 4.

Grösse und Lage des Radiusvector.

Die Entfernung eines Punktes P vom Anfangspunkte der Coordinaten, der Radiusvector des Punktes P, ist offenbar der Grösse und Richtung nach bestimmt, sobald die Coordinaten von P gegeben sind, man kann daher die Aufgabe stellen, aus den schiefwinkligen Coordinaten x, y, z die Länge r des Radiusvector OP und die Winkel (rx), (ry), (rz) zu berechnen, welche derselbe mit den Coordinatenachsen einschliesst. Behufs der Lösung dieser Aufgabe erinnern wir an ein Paar auf rechtwinklige Projectionen bezügliche Sätze. Erstens ist bekannt, dass die rechtwinklige Projection einer begrenzten Strecke s auf eine Gerade g durch $s \cos(sg)$ ausgedrückt wird, gleichgiltig, ob sich die Geraden s und g schneiden oder nicht; im letzteren Falle hat man unter $\angle(sg)$ den Winkel zu verstehen, den zwei durch irgend einen Punkt gehende Parallelen zu jenen Geraden mit einander

n würden *). Zweitens weiss man, dass die rechtwinklige
ıction einer gebrochenen Linie $ABCDEF$ auf eine Gerade
einerlei mit der Projection der Geraden AF ist, wobei die
ɩel (AB, GH), (BC, GH), (CD, GH) u. s. w. immer nach
und derselben aus der Bezeichnung von selbst ersichtlichen
ungsrichtung gezählt werden.

Projiciren wir die aus den
ken $OL = x$, $LP' = y$,
$= z$ bestehende gebrochene
$OLP'P$ rechtwinklig auf
l eine Gerade g im Raume,
zt sich die Projection aus
lrei Stücken $x \cos(xg)$,
(yg), $z \cos(zg)$ zusammen;
ämliche Projection muss
ıuch zum Vorschein kom-

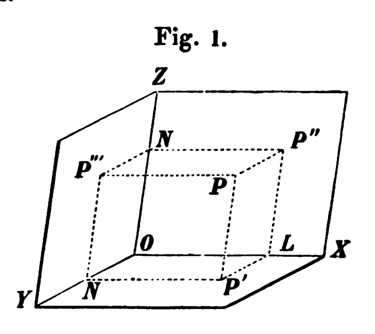


Fig. 1.

wenn die Strecke $OP = r$ auf dieselbe Gerade projicirt
es gilt daher die Fundamentalgleichung

$$r \cos(rg) = x \cos(xg) + y \cos(yg) + z \cos(zg).$$

'ür die willkürliche Gerade g nehmen wir der Reihe nach OR,
$)Y$, OZ und erhalten so die vier Beziehungen

$$) \quad r = x \cos(xr) + y \cos(yr) + z \cos(zr),$$

ı Wenn die beiden Geraden sich schneiden, ist der obige Satz in den
ıten der Trigonometrie unmittelbar enthalten, schneiden sie sich
o erkennt man seine Richtigkeit auf folgende Weise. Die gegebene
ı sei $AB = s$ und $GH = g$ die Ge-
ıuf welche sie projicirt werden soll;
›jection $A'B'$ kommt dadurch zu
, dass man durch A normal zu GH
ıene legt, welche GH in A' schnei-
d auf gleiche Weise durch B eine zu
rmale Ebene legt, welche GH in B'
et. Zieht man durch A parallel zu
ıe Gerade, welche der zweiten Nor-

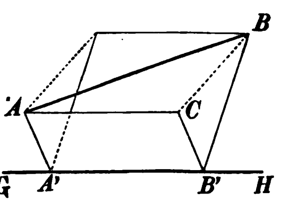


Fig. 7.

ıe in C begegnet, so ist $AC = A'B'$, weil beide Gerade als die Ent-
· der zwei auf GH senkrechten Ebenen gelten können, ferner ist
krecht zur Ebene $BB'C$, mithin $\angle ACB = 90^0$. Hieraus folgt

$$A'B' = AC = AB \,.\, \cos BAC = s \cos(sg)$$

n behauptet wurde.

$$2)\ \begin{cases} r\ cos\ (xr) = x + y\ cos\ (yx) + z\ cos\ (zx), \\ r\ cos\ (yr) = x\ cos\ (yx) + y + z\ cos\ (zy), \\ r\ cos\ (zr) = x\ cos\ (xz) + y\ cos\ (yz) + z \end{cases}$$

in denen ausser den bekannten Coordinatenwinkeln die vier Unbekannten r, $\angle\,(xr)$, $\angle\,(yr)$, $\angle\,(zr)$ vorkommen. Die erste derselben findet sich dadurch, dass man die obigen vier Gleichungen der Reihe nach mit r, x, y, z multiplicirt und die Produkte addirt; dabei heben sich die mit (xr), (yr), (zr) behafteten Glieder und es bleibt

$$3)\quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\ cos\,(xy) + 2xz\ cos\,(xz) + 2yz\ cos\,(yz);$$

daraus ergiebt sich r selbst durch Ausziehung der Quadratwurzel, die hier im absoluten Sinne zu nehmen ist. Die Gleichungen 2) liefern nun die gesuchten Winkel, nämlich

$$4)\ \begin{cases} cos\ (xr) = \dfrac{x + y\ cos\ (yx) + z\ cos\ (zx)}{r}, \\ cos\ (yr) = \dfrac{y + x\ cos\ (xy) + z\ cos\ (zy)}{r}, \\ cos\ (zr) = \dfrac{z + x\ cos\ (xz) + y\ cos\ (yz)}{r}; \end{cases}$$

da r im absoluten Sinne genommen wird, so hängt das Vorzeichen jedes dieser Quotienten nur von dem Vorzeichen des Zählers ab und hiernach bestimmt sich von selbst, ob der eine oder der andere von den Winkeln (xr), (yr), (zr) spitz oder stumpf ist. Dass keiner derselben grösser als 180^0 genommen zu werden braucht, ergiebt sich aus den obigen Formeln von selbst und damit übereinstimmend auch aus einer leichten geometrischen Betrachtung.

Noch ist zu bemerken, dass die Winkel (xr), (yr), (zr) nicht unabhängig von einander sind, dass vielmehr aus zweien unter ihnen der dritte gefunden werden kann. Wäre nämlich $\angle\,(xr)$ gegeben, so würde die Richtung des Radiusvector nicht hinreichend bestimmt sein, derselbe könnte beliebig auf einer geraden Kegelfläche gewählt werden, die den Coordinatenanfang zur Spitze, die x-Achse zur Achse und den gegebenen $\angle\,(xr)$ als Winkel zwischen Achse und Seite hat; in gleicher Weise kann bei gegebenen $\angle\,(yr)$ der Radiusvector willkürlich auf einer geraden Kegelfläche gezogen werden, welche den Coordinatenanfang zum Mittelpunkte, die y-Achse zur Achse und $\angle\,(yr)$ als Winkel zwischen Seite und Achse hat. Soll nun der Radiusvector mit der

x-Achse den Winkel (xr) und gleichzeitig mit der y-Achse den Winkel (yr) einschliessen, so muss er auf beiden Kegelflächen zugleich liegen; im Allgemeinen schneiden sich letztere in zwei durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Geraden, welche die beiden möglichen Lagen von r angeben und zugleich $\angle(zr)$ zweideutig bestimmen. Die entsprechende analytische Beziehung erhält man dadurch, dass man die Gleichungen 2) zunächst auf x, y, z reducirt und die gefundenen Werthe in die Gleichung 1) einsetzt; zur Abkürzung sei hierbei

$$5)\quad \begin{cases} \cos(xy) = \gamma, \quad \cos(xz) = \beta, \quad \cos(yz) = \alpha, \\ \cos(xr) = \xi, \quad \cos(yr) = \eta, \quad \cos(zr) = \zeta, \end{cases}$$

man erhält dann aus Nr. 2) die drei Ausdrücke *)

$$6)\quad \begin{cases} x = \dfrac{(1-\alpha^2)\xi - (\gamma - \alpha\beta)\eta - (\beta - \alpha\gamma)\zeta}{1 + 2\alpha\beta\gamma - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}\, r, \\ y = \dfrac{(1-\beta^2)\eta - (\alpha - \beta\gamma)\zeta - (\gamma - \alpha\beta)\xi}{1 + 2\alpha\beta\gamma - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}\, r, \\ z = \dfrac{(1-\gamma^2)\zeta - (\beta - \alpha\gamma)\xi - (\alpha - \beta\gamma)\eta}{1 + 2\alpha\beta\gamma - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}\, r, \end{cases}$$

endlich durch Substitution in Nr. 1) nach Hebung von r und Wegschaffung des Bruches

$$7)\quad \begin{cases} \quad (1-\alpha^2)\xi^2 + (1-\beta^2)\eta^2 + (1-\gamma^2)\zeta^2 \\ -2(\alpha - \beta\gamma)\eta\zeta - 2(\beta - \alpha\gamma)\xi\zeta - 2(\gamma - \alpha\beta)\xi\eta \\ = 1 + 2\alpha\beta\gamma - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2). \end{cases}$$

Weit einfacher gestalten sich alle diese Ergebnisse bei dem rechtwinkligen Coordinatensystem, für welches $\angle(xy) = \angle(xz) =$

---

*) Die in den obigen Formeln vorkommenden Grössen

$$\alpha - \beta\gamma, \quad \beta - \alpha\gamma, \quad \gamma - \alpha\beta,$$
$$1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2,$$

die wir der Reihe nach α', β', γ' und δ^2 nennen wollen, lassen sich mittelst einiger Formeln der sphärischen Trigonometrie anderweit umwandeln. Betrachten wir nämlich die Coordinatenwinkel (yz), (xz), (xy) als Seitenwinkel a, b, c der von den Coordinatenebenen gebildeten körperlichen Ecke, und bezeichnen wir die gegenüber an den Kanten OX, OY, OZ liegenden Neigungswinkel mit A, B, C, so ist $\alpha' = \cos a - \cos b \cos c$ und zufolge der Grundformel der sphärischen Trigonometrie

$$\alpha' = \cos A \sin b \sin c, \quad \beta' = \cos B \sin c \sin a, \quad \gamma' = \cos C \sin a \sin b.$$

Aus der bekannten Formel

$$\sin^2 A = \frac{1 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

folgt weiter durch Vergleich mit dem Obigen

$\angle (yz) = 90^0$ mithin $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist; an die Stelle der Gleichungen 2) treten jetzt die folgenden

8) $r \cos(xr) = x, \quad r \cos(yr) = y, \quad r \cos(zr) = z,$

und bedeuten geometrisch, dass die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes als die normalen Projectionen seines Vectors auf die Achsen betrachtet werden können; die Formeln 3) und 4) lauten

9) $$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

10) $$\begin{cases} \cos(xr) = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos(yr) = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos(zr) = \dfrac{z}{r} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \end{cases}$$

endlich ergiebt sich aus Nr. 7) die Beziehung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ oder

11) $$\cos^2(xr) + \cos^2(yr) + \cos^2(zr) = 1.$$

Man erhält aus letzterer, wenn die Winkel (xr), (yr), (zr) kurz mit φ, ψ und χ bezeichnet werden,

$$\cos\chi = \sqrt{1 - (\cos^2\varphi + \cos^2\psi)} = \sqrt{-\cos(\varphi - \psi)\cos(\varphi + \psi)};$$

hiernach ist $\cos\chi$ mithin auch χ unmöglich, wenn sowohl $\varphi - \psi$ als $\varphi + \psi$ weniger als 90^0 beträgt; für $\varphi + \psi = 90^0$ wird $\cos\chi = 0$ mithin χ eindeutig $= 90^0$; liegt endlich $\varphi - \psi$ im ersten und $\varphi + \psi$ im zweiten oder dritten Quadranten, so wird χ reell und zweideutig, weil die oben vorkommende Quadratwurzel eben so wohl positiv, als negativ genommen werden kann. Diese Bemerkungen sind geometrisch leicht zu verificiren, wenn man be-

---

$$\delta^2 = \sin^2 A \sin^2 b \sin^2 c$$

oder bei Ausziehung der Wurzel, welche wir im absoluten Sinne nehmen,

$$\delta = \sin A \sin b \sin c = \sin B \sin c \sin a = \sin C \sin a \sin b.$$

Zwischen den Grössen α', β', γ', δ besteht demnach die Proportion

$$\alpha' : \beta' : \gamma' : \delta = \cot A : \cot B : \cot C : 1.$$

Denken wir uns ferner von O aus auf den Achsen OX, OY, OZ drei Strecken abgeschnitten, von denen jede der Längeneinheit gleich ist, und construiren ein Parallelopiped, dessen Kanten jene Abschnitte sind, so besitzt die in der xy-Ebene liegende Basis desselben den Flächeninhalt $\sin c$, die Höhe des Paralleopiped ist $\sin b \sin A$, mithin sein Volumen $\sin c \sin b \sin A$. Man erkennt hieraus die geometrische Bedeutung des später oft wiederkehrenden Ausdrucks

$$\delta = \sqrt{1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}.$$

chtet, unter welchen Umständen die vorhin erwähnten Kegelächen keine Gerade gemein haben, sich längs einer Geraden beihren oder schneiden.

§. 5.

Zwei Punkte im Raume.

Wenn zwei Punkte P und P_1 durch ihre Coordinaten x, y, z nd x_1, y_1, z_1 gegeben sind, so kann man zunächst die Formeln es vorigen Paragraphen auf jeden einzelnen Punkt anwenden, isserdem tritt noch als neu hinzu die Frage nach der Grösse und ichtung der verbindenden Geraden $PP_1 = s$ und die Bestimmung es Winkels POP_1, den die Vectoren $OP = r$ und $OP_1 = r_1$ mit nander bilden.

Zur Beantwortung der ersten Frage denken wir uns durch drei Gerade parallel zu den Coordinatenachsen gelegt, nämlich $X' // OX$, $PY' // OY$, $PZ' // OZ$ und betrachten diese Parallelen s die Achsen eines neuen Coordinatensystemes mit dem Anfangsınkte P. Nennen wir x', y', z' die Coordinaten von P_1 in Beehung auf dieses secundäre System, so ist aus nahe liegenden ründen

$$x' = x_1 - x, \qquad y' = y_1 - y, \qquad z' = z_1 - z;$$

rner kann s als Radiusvector des Punktes P_1 rücksichtlich des uen Systemes angesehen werden, mithin gelten jetzt alle Foreln des vorigen Paragraphen wieder, wenn s für r, und x', y', z' r x, y, z gesetzt werden. Durch nachherige Substitution der erthe von x', y', z' gelangt man auf diese Weise zu den folgenn Formeln, in denen wieder α, β, γ zur Abkürzung für $\cos(yz)$, $s(xz)$ und $\cos(xy)$ gebraucht worden sind:

$$1) \quad s^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 + 2(x_1 - x)(y_1 - y)\gamma \\ + 2(x_1 - x)(z_1 - z)\beta + 2(y_1 - y)(z_1 - z)\alpha,$$

$$2) \begin{cases} \cos(xs) = \dfrac{x_1 - x + (y_1 - y)\gamma + (z_1 - z)\beta}{s}, \\ \cos(ys) = \dfrac{y_1 - y + (x_1 - x)\gamma + (z_1 - z)\alpha}{s}, \\ \cos(zs) = \dfrac{z_1 - z + (x_1 - x)\beta + (y_1 - y)\alpha}{s}. \end{cases}$$

Um zweitens $\angle POP_1 = \angle (rr_1)$ zu bestimmen, projiciren ir r rechtwinklig auf r_1 und bemerken, dass die nämliche Pro-

jection zum Vorschein kommt, wenn statt $r = OP$ die gebrochene Linie $OLP'P$ auf r_1 projicirt wird; dies giebt

$$r \cos(rr_1) = x \cos(xr_1) + y \cos(yr_1) + z \cos(zr_1),$$

hier sind noch die Werthe von $\cos(xr_1)$, $\cos(yr_1)$, $\cos(zr_1)$ einzusetzen, welche man aus den Formeln des vorigen Paragraphen unmittelbar erhält, indem man r_1 für r schreibt. Nach Division mit r findet sich auf diese Weise

$$3) \begin{cases} \cos(rr_1) = \\ \dfrac{xx_1 + yy_1 + zz_1 + (xy_1 + x_1 y)\gamma + (xz_1 + x_1 z)\beta + (yz_1 + y_1 z)\alpha}{rr_1} \end{cases}$$

worin man, wenn es nöthig ist, die Werthe

$$4) \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\gamma + 2xz\beta + 2yz\alpha} \\ r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2x_1 y_1 \gamma + 2x_1 z_1 \beta + 2y_1 z_1 \alpha} \end{cases}$$

substituiren kann. Will man $\cos(rr_1)$ nicht durch die Coordinaten von P und P_1, sondern durch die Winkel darstellen, welche einerseits r, andererseits r_1 mit den Coordinatenachsen einschliessen, so setze man wieder

$$\cos(xr) = \xi, \quad \cos(yr) = \eta, \quad \cos(zr) = \zeta,$$
$$\cos(xr_1) = \xi_1, \quad \cos(yr_1) = \eta_1, \quad \cos(zr_1) = \zeta_1,$$

und drücke x, y, z durch ξ, η, ζ aus, ebenso x_1, y_1, z_1 durch ξ_1, η_1, ζ_1, wie dies die Formeln 6) des vorigen Paragraphen lehren. Bezeichnet man für den Augenblick die Grössen

$$\alpha - \beta\gamma, \quad \beta - \alpha\gamma, \quad \gamma - \alpha\beta$$

der Reihe nach mit α', β', γ', ferner

$$1 - \alpha^2, \quad 1 - \beta^2, \quad 1 - \gamma^2$$

mit α'', β'', γ'', und den Ausdruck

$$1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$$

mit μ, so sind die Werthe von x, y, z, x_1, y_1, z_1:

$$x = \frac{\alpha''\xi - \gamma'\eta - \beta'\zeta}{\mu} r, \quad x_1 = \frac{\alpha''\xi_1 - \gamma'\eta_1 - \beta'\zeta_1}{\mu} r_1,$$
$$y = \frac{\beta''\eta - \alpha'\zeta - \gamma'\xi}{\mu} r, \quad y_1 = \frac{\beta''\eta_1 - \alpha'\zeta_1 - \gamma'\xi_1}{\mu} r_1,$$
$$z = \frac{\gamma''\zeta - \beta'\xi - \alpha'\eta}{\mu} r, \quad z_1 = \frac{\gamma''\zeta_1 - \beta'\xi_1 - \alpha'\eta_1}{\mu} r_1,$$

und diese wären in die Gleichung 3) einzusetzen. Auf gewöhnlichem Wege ausgeführt, würde diese Substitution einen äusserst weitläufigen gebrochenen Ausdruck liefern, dessen Zähler aus nicht weniger als 81 Glieder bestünde, und man würde einige

Mühe haben, die Formel in ihre einfachste Gestalt zu bringen; dagegen gelangt man durch folgende Bemerkung leicht zum Ziele. Wenn man sich die sämmtlichen in der Gleichung 3) vorkommenden Produkte xx_1, yy_1 u. s. w. nach Substitution der obigen Werthe entwickelt denkt, so erhält man nach Hebung von rr_1 einen Ausdruck von der Form

$$\cos(rr_1) = \frac{1}{\mu^2}[A\xi\xi_1 + B\eta\eta_1 + C\zeta\zeta_1 + C'\xi\eta_1 + C''\xi_1\eta + B'\xi\zeta_1 + B''\xi_1\zeta + A'\eta\zeta_1 + A''\eta_1\zeta]$$

worin die Coefficienten A, B, ... C'' nur von den Coordinatenwinkeln abhängig sind und sich bei wirklicher Ausrechnung von selbst finden würden. Die linke Seite dieser Gleichung bleibt dieselbe, wenn r und r_1 gegen einander vertauscht werden [$\angle(rr_1) = \angle(r_1 r)$], es muss folglich die rechte Seite die nämliche Eigenschaft besitzen, also ungeändert bleiben, wenn ξ mit ξ_1 und gleichzeitig η mit η_1, sowie ζ mit ζ_1 vertauscht wird; man erkennt hieraus, dass der Coefficient von $\xi\eta_1$ derselbe sein muss, wie der von $\xi_1\eta$, d. h. $C' = C''$, und dass ebenso $B' = B''$, $A' = A''$ ist; die Formel lautet hiernach

$$\cos(rr_1) = \frac{1}{\mu^2}[A\xi\xi_1 + B\eta\eta_1 + C\zeta\zeta_1 + A'(\eta\zeta_1 + \eta_1\zeta) + B'(\xi\zeta_1 + \xi_1\zeta) + C'(\xi\eta_1 + \xi_1\eta)].$$

Da die Coefficienten A, B... C' von der individuellen Lage der Vectoren r und r_1 unabhängig sind, so kann irgend eine specielle Richtung der letzteren zur Bestimmung von A, B... C' dienen; so muss z. B. in dem Falle, wo $\angle(rr_1) = 0$, also $\xi_1 = \xi$, $\eta_1 = \eta$, $\zeta_1 = \zeta$ wird, diejenige Gleichung zum Vorschein kommen, welche jederzeit zwischen den Grössen ξ, η, ζ besteht (Nr. 7 im vorigen Paragraphen). Nun giebt die obige Formel bei dieser Specialisirung

$$1 = \frac{1}{\mu^2}[A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2A'\eta\zeta + 2B'\xi\zeta + 2C'\xi\eta]$$

und wenn man diese mit der erwähnten Beziehung, nämlich

$$1 = \frac{1}{\mu}[\alpha''\xi^2 + \beta''\eta^2 + \gamma''\zeta^2 - 2\alpha'\eta\zeta - 2\beta'\xi\zeta - 2\gamma'\xi\eta]$$

zusammenhält, so ergeben sich die Werthe

$$A = \alpha''\mu, \qquad B = \beta''\mu, \qquad C = \gamma''\mu,$$
$$A' = -\alpha'\mu, \qquad B' = -\beta'\mu, \qquad C' = -\gamma'\mu;$$

die gesuchte Formel lautet demnach

$$\cos(rr_1) = \frac{1}{\mu}\,[\alpha''\xi\xi_1 + \beta''\eta\eta_1 + \gamma''\zeta\zeta_1 - \alpha'(\eta\zeta_1 + \eta_1\zeta)$$
$$- \beta'(\xi\zeta_1 + \xi_1\zeta) - \gamma'(\xi\eta_1 + \xi_1\eta)]$$

oder auch vermöge der Bedeutungen von α', β', γ', α'', β'', γ'' und μ,

$$5)\quad \begin{cases} (1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)\cos(rr_1) \\ = (1-\alpha^2)\xi\xi_1 + (1-\beta^2)\eta\eta_1 + (1-\gamma^2)\zeta\zeta_1 \\ - (\alpha - \beta\gamma)(\eta\zeta_1 + \eta_1\zeta) - (\beta - \alpha\gamma)(\xi\zeta_1 + \xi_1\zeta) \\ - (\gamma - \alpha\beta)(\xi\eta_1 + \xi_1\eta). \end{cases}$$

Für rechtwinklige Coordinaten hat man weit einfacher

$$6)\qquad s = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$$

$$7)\quad \begin{cases} \cos(xs) = \dfrac{x_1 - x}{s} = \dfrac{x_1 - x}{\sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2}}, \\ \cos(ys) = \dfrac{y_1 - y}{s} = \dfrac{y_1 - y}{\sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2}}, \\ \cos(zs) = \dfrac{z_1 - z}{s} = \dfrac{z_1 - z}{\sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2}}; \end{cases}$$

ferner aus Nr. 3)

$$8)\qquad \cos(rr_1) = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{rr_1}$$

endlich als speciellen Fall von Nr. 5)

$$\cos(rr_1) = \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1$$

oder ohne Gebrauch der Abkürzungen

$$9)\quad \begin{cases} \cos(rr_1) = \\ \cos(xr)\cos(xr_1) + \cos(yr)\cos(yr_1) + \cos(zr)\cos(zr_1). \end{cases}$$

Die Verbindung mehrerer Punkte im Raume, z. B. ein räumliches Polygon, kann immer als successive Verbindung von je zwei Punkten aufgefasst werden, es liegt daher keine Veranlassung vor, die obigen Betrachtungen auf mehr als zwei Punkte auszudehnen.

Zweites Capitel.

Die gerade Linie im Raume.

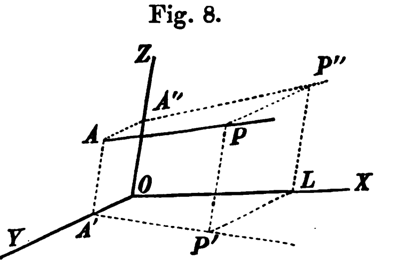
---

§. 6.

Die Gleichungen der Geraden.

Wenn ein Punkt P, dessen schiefwinklige Projectionen auf ie Coordinatenebenen durch die Coordinaten x und y, x und z, und z bestimmt sind, seine Lage im Raume ändert, so bewegen ch auch seine Projectionen, und wenn P die gerade oder krumme inie s durchläuft, so beschreiben die Projectionen P', P'', P''' ge- ıde oder krumme Linien, welche wir der Reihe nach mit s', s'', $''$ bezeichnen und die Projectionen der Linie s nennen. Erinnert ıan sich nun, dass bereits durch zwei Projectionen eines Punktes ie drei Coordinaten desselben gegeben sind und damit zugleich ie übrige dritte Projection bestimmt ist, so übersieht sich leicht, ass aus zweien der Projectionen s', s'', s''' die dritte abgeleitet rerden kann, dass mithin die äumliche Curve s durch ir- ;end zwei ihrer Projectionen be- timmt wird. Sind z. B. die Pro- ectionen s' und s'' gegeben, so ege man durch einen beliebi- ;en Punkt L der x-Achse eine Ebene parallel der yz-Ebene; lie genannte Hilfsebene schnei- let die Linie s' in einem Punkte P', ebenso s'' in einem Punkte P''; diese Punkte sind die Projectionen des Punktes P im Raume, welchen man dadurch erhält, dass man in der Hilfsebene das Pa- :allelogramm $LP'PP''$ aus den bekannten Seiten $LP' = y$ und

Fig. 8.



$LP'' = z$ construirt; giebt man nun der willkürlichen Entfernung $OL = x$ alle möglichen Werthe, so erhält man auf diese Weise alle möglichen Punkte der Linie s. Ganz ähnlich wäre das Verfahren, wenn zwei andere Projectionen von s als gegeben angesehen würden. Diese geometrische Betrachtung, die namentlich für den Fall eines rechtwinkligen Coordinatensystemes mit der descriptiv-geometrischen Auffassung völlig übereinstimmt, ist leicht analytisch auszudrücken, indem man beachtet, dass die ebene Linie s' durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten $OL = x$ und $LP' = y$ irgend eines ihrer Punkte P', ebenso die Linie s'' durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten $OL = x$ und $LP'' = z$ charakterisirt wird; eine Linie im Raume ist demnach bestimmt durch zwei Gleichungen zwischen je zwei Coordinaten eines beliebigen Punktes von ihr, und zwar bedeutet eine Gleichung zwischen x und y die Gleichung ihrer Projection auf die xy-Ebene, eine Gleichung zwischen x und z die Gleichung ihrer Projection auf die xz-Ebene, endlich eine Gleichung zwischen y und z die Gleichung ihrer Projection auf die yz-Ebene. Eliminirt man x aus den beiden ersten Gleichungen, so muss man die letzte erhalten, ebenso könnte man aus den Gleichungen zweier anderen Projectionen die Gleichung der noch übrigen Projection ableiten.

Um diese allgemeinen Erörterungen auf die Gerade im Raume anzuwenden, bedarf es nur der Bemerkung, dass in diesem Falle sämmtliche Projectionen gerade Linien sind; denkt man sich demnach die Gerade durch ihre Projectionen auf die xy und xz-Ebene bestimmt, wie es künftig in Uebereinstimmung der descriptiven Geometrie meistentheils geschehen wird, so sind die Gleichungen ihrer Projectionen oder, wie man kurz zu sagen pflegt, die Gleichungen der Geraden:

$$1) \qquad y = Bx + b, \qquad z = Cx + c.$$

Aus der analytischen Geometrie der Ebene kennt man die Bedeutung der vier Constanten B, b, C, c; es ist nämlich, wenn s' die Projection der Geraden auf die xy-Ebene und s'' ihre Projection auf die xz-Ebene bezeichnet:

$$2) \qquad \frac{B \sin(xy)}{1 + B \cos(xy)} = \tan(s'x), \qquad \frac{C \sin(xz)}{1 + C \cos(xz)} = \tan(s''x);$$

ferner sind b und c die Abschnitte OA' und OA'', welche die Projectionen s' und s'' auf den Achsen der y und der z bilden oder

auch die Coordinaten des Punktes A, in welchem die Gerade die yz-Ebene schneidet. Nennen wir in Uebereinstimmung mit der descriptiven Geometrie die Durchschnitte einer Geraden mit den Projectionsebenen die **Spuren** der Geraden, so können wir b und c kurz als die Coordinaten der yz-Spur unserer Geraden bezeichnen. Nicht überflüssig ist hierbei die Bemerkung, dass die Coefficienten B und C die Richtungen der Projectionen, mithin auch die Richtung der Geraden im Raume bestimmen, während b und c den Punkt der yz-Ebene angeben, durch welchen die Gerade geht; lässt man demnach B und C ungeändert, giebt aber b und c andere und andere Werthe, so erhält man die Gleichungen eines Systemes paralleler Geraden; nimmt man umgekehrt b und c constant, dagegen für B und C der Reihe nach verschiedene Werthe, so hat man die Gleichungen von Geraden, welche zusammen einen Strahlenbüschel ausmachen, dessen Mittelpunkt in der yz-Ebene liegt.

Ganz ähnlich gestaltet sich die Sache, wenn die Gerade durch zwei andere Projectionen bestimmt wird; wählt man hierzu die Projectionen auf die yx und yz-Ebenen, so sind die Gleichungen

3) $$x = A_1 y + a_1, \qquad z = C_1 y + c_1,$$

wo a_1 und c_1 die Coordinaten der xz-Spur bedeuten; endlich hat man zur Bestimmung der Geraden durch ihre Projectionen auf die Ebenen xz und yz

4) $$x = A_2 z + a_2, \qquad y = B_2 z + b_2,$$

wo a_2 und b_2 die Coordinaten der xy-Spur sind.

Wie sich nach dem Eingangs Gesagten von selbst versteht, können aus einem der Gleichungensysteme 1), 3) und 4) die beiden anderen hergeleitet werden; gehen wir von den Gleichungen 1) aus, weil sie der descriptiv-geometrischen Anschauungsweise am nächsten liegen, so können wir zunächst x durch y ausdrücken und den gefundenen Werth in die für z geltende Gleichung substituiren; wir haben so

$$x = \frac{1}{B} y - \frac{b}{B}, \qquad z = \frac{C}{B} y + c - \frac{bC}{B};$$

aus der Vergleichung mit Nr. 3) erhalten wir für die Coefficienten A_1, C_1 die Werthe

$$A_1 = \frac{1}{B}, \qquad C_1 = \frac{C}{B},$$

und für die Coordinaten der xz-Spur:

5) $a_1 = -\frac{b}{B}, \qquad c_1 = c - \frac{bC}{B} = \frac{cB - bC}{B}.$

Auf analoge Weise bilden wir aus den Gleichungen 1) die folgenden

$$x = \frac{1}{C} z - \frac{c}{C}, \qquad y = \frac{B}{C} z + b - \frac{cB}{C}$$

und erhalten durch Vergleichung mit Nr. 4)

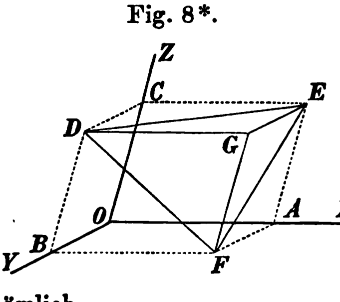
$$A_2 = \frac{1}{C}, \qquad B_2 = \frac{B}{C}$$

sowie für die Coordinaten der xy-Spur:

6) $a_2 = -\frac{c}{C}, \qquad b_2 = b - \frac{cB}{C} = \frac{bC - cB}{C}.$

Die vorigen allgemeinen Formeln erleiden in dem Falle eine Modification, wo die Gerade einer oder zweien der Coordinatenebenen parallel liegt. Ist sie parallel zur xy-Ebene, wie z. B. die Gerade DE, so sind ihre Projectionen auf die Ebenen xz und yz parallel zu den Achsen der x, resp. y, und es gelten dann die Beziehungen

Fig. 8*.



$$y = Bx + b, \qquad z = c,$$

wo $OB = CD = b$ und $OC = EA = c$. Symetrischer gestaltet sich die erste Gleichung, wenn man den Abschnitt $CE = OA$ in Rechnung bringt; für $OA = a$ hat man nämlich

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad z = c$$

als Gleichungen jener Geraden. Der Punkt ac ist die xz-Spur und der Punkt bc die yz-Spur der Geraden, die xy-Spur fällt ins Unendliche; eben deswegen würden sich in diesem Falle die Gleichungen der Geraden nicht unter der Form von Nr. 4) darstellen lassen. Für eine der xz-Ebene parallele Gerade, wie z.B. DF, hat man in entsprechender Weise die Gleichungen

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1, \qquad y = b,$$

wo ab die xy-Spur und cb die yz-Spur ist; eine der yz-Ebene parallele Gerade, wie z. B. EF, wird dargestellt durch die Gleichungen

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad x = a,$$

ihre xy und ihre xz-Spuren sind die Punkte ab und ac.

Ist die Gerade zweien der Coordinatenebenen zugleich, d. h. einer der Coordinatenachsen parrallel, so vereinfachen sich die obigen Gleichungen noch weiter. So hat man für die Gerade $DG \parallel OX$

$$y = b, \qquad z = c, \quad (x \text{ beliebig})$$

und der Punkt bc ist die einzige in diesem Falle vorhandene Spur; eine Parallele zur y-Achse (z. B. EG) wird in gleicher Weise durch

$$x = a, \qquad z = c$$

charakterisirt, eine Parallele zur z-Achse (FG) durch

$$x = a, \qquad y = b.$$

Daran schliesst sich die Bemerkung, dass von den drei Gleichungspaaren

$$y = 0 \text{ und } z = 0,$$
$$x = 0 \quad „ \quad z = 0,$$
$$x = 0 \quad „ \quad y = 0,$$

das erste die x-Achse, das zweite die y-Achse und das dritte die z-Achse bezeichnet.

Bei einem rechtwinkligen Coordinatensystem vereinfachen sich nur die Formeln, in denen die Coordinatenwinkel vorkommen; aus Nr. 2) z. B. wird

$$B = \tan(s'x), \qquad C = \tan(s''x)$$

und ähnlich lauten die Werthe von A_1 und C_1 in Nr. 3), sowie die von A_2 und B_2 in Nr. 4).

Die bisher entwickelten Formeln geben die Winkel, welche die Projectionen der Geraden mit den Achsen einschliessen, nicht aber die Winkel, welche die Gerade selbst mit den Achsen blidet. Um letztere zn finden, denken wir uns durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine Parallele zu der gegebenen Geraden gelegt und auf dieser vom Anfangspunkte der Coordinaten aus eine beliebige Strecke r abgeschnitten, deren Endpunkt die Coordinaten x, y, z besitzen möge. Die Winkel (sx), (sy), (sz), welche die ursprüngliche Gerade mit den Achsen bildet, sind nun einerlei mit den Winkeln (rx), (ry), (rz) und diese lassen sich nach §. 4 bestimmen; man hat unmittelbar

$$\cos(sx) = \cos(rx) = \frac{x + y\cos(yx) + z\cos(zx)}{r},$$

$$\cos(sy) = \cos(ry) = \frac{y + x\cos(xy) + z\cos(zy)}{r},$$

$$\cos(sz) = \cos(rz) = \frac{z + x\cos(xz) + y\cos(yz)}{r},$$

wo

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(xy) + 2xz\cos(xz) + 2yz\cos(yz).$$

Hier ist nur noch die Bedingung hinzuzufügen, dass die Strecke r parallel der Geraden s durch den Coordinatenanfang geht; nun sind überhaupt die Gleichungen einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Geraden

$$y = B_1 x, \qquad z = C_1 x,$$

und wenn diese der ursprünglichen Geraden parallel liegen soll, so müssen, wie schon erwähnt, die Projectionen parallel sein, also die Bedingungen

$$B_1 = B \text{ und } C_1 = C$$

statt finden, so dass die gesuchten Gleichungen lauten

$$y = Bx \text{ und } z = Cx.$$

Nach Substitution dieser Werthe gehen die vorhin aufgestellten Formeln in die folgenden über

$$7) \begin{cases} \cos(sx) = \dfrac{1 + B\cos(yx) + C\cos(zx)}{D}, \\ \cos(sy) = \dfrac{B + \cos(xy) + C\cos(zy)}{D}, \\ \cos(sz) = \dfrac{C + \cos(xz) + B\cos(yz)}{D}, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$8) \quad D = \sqrt{1 + B^2 + C^2 + 2B\,cs(xy) + 2C\,cs(xz) + 2BC\,cs(yz)}.$$

Für rechtwinklige Coordinaten hat man einfacher

$$9) \begin{cases} \cos(sx) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + B^2 + C^2}}, \\ \cos(sy) = \dfrac{B}{\sqrt{1 + B^2 + C^2}}, \\ \cos(sz) = \dfrac{C}{\sqrt{1 + B^2 + C^2}}, \end{cases}$$

woraus u. A.

$$B = \frac{\cos(sy)}{\cos(sx)}, \qquad C = \frac{\cos(sz)}{\cos(sx)}.$$

Man kann diese Werthe in die Gleichungen der Geraden ein-
etzen, wenn man unmittelbar die Winkel zwischen ihr und den
chsen in Rechnung bringen will; für $\angle(sx) = \alpha$, $\angle(sy) = \beta$,
$(sz) = \gamma$ erhält man so

$$10) \quad y = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} x + b, \qquad z = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} x + c$$

ls Gleichung einer Geraden, welche in der durch die Winkel α,
, γ bestimmten Richtung durch den Punkt bc der yz-Ebene geht.
ollte die Gerade, statt durch den Punkt bc, allgemeiner durch
gend einen gegebenen Punkt fgh des Raumes gehen, so müssen
und c so gewählt werden, dass

$$g = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} f + b, \qquad h = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} f + c;$$

an findet hieraus die Werthe von b und c, sowie nachher als
leichungen der Geraden

$$11) \quad y - g = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x - f), \qquad z - h = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x - f).$$

ies ist eine namentlich in der analytischen Mechanik häufig ge-
rauchte Form der Gleichungen einer Geraden.

§. 7.

Verschiedene Bestimmungsweisen einer Geraden.

I. Parallele zu einer gegebenen Geraden. Wenn
ırch einen gegebenen Punkt fgh eine Parallele zu einer gege-
enen mittelst der Gleichungen

$$1) \qquad y = Bx + b, \qquad z = Cx + c$$

estimmten Geraden gelegt werden soll, so bezeichne man die
leichungen der gesuchten Geraden vorläufig durch

$$y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1$$

ıd bestimme die vier Unbekannten B_1, b_1, C_1, c_1 aus den gefor-
rten Bedingungen. Einerseits hat man, weil die Gerade durch
n gegebenen Punkt gehen soll

$$g = B_1 f + b_1, \qquad h = C_1 f + c_1,$$

ıdererseits wegen der parallelen Lage beider Geraden

$$B_1 = B \text{ und } C_1 = C.$$

Entwickelt man aus diesen vier Gleichungen die Werthe der
er Unbekannten, so folgt durch deren Substitution in Nr. 1)

2) $y = Bx + g - Bf, \qquad z = Cx + h - Cf.$

oder in symmetrischerer Form:

3) $y - g = B(x - f), \qquad z - h = C(x - f).$

Dies gilt für jedes beliebiges Coordinatensystem; beim rechtwinkligen System kommt man auf die Gleichungen 11) des vorigen Paragraphen zurück, wenn man B und C durch die Winkel ausdrückt, welche die gegebene Gerade mit den Coordinatenachsen einschliesst.

II. Gerade durch zwei Punkte. Bezeichnen wir mit

4) $y = Bx + b, \qquad z = Cx + c$

die Gleichungen der gesuchten Geraden, welche durch die gegebenen Punkte $f_1 g_1 h_1$ und $f_2 g_2 h_2$ geht, so sind die vier Unbekannten B, b, C, c mittelst der folgenden vier Gleichungen zu bestimmen

$$g_1 = Bf_1 + b, \qquad h_1 = Cf_1 + c,$$
$$g_2 = Bf_2 + b, \qquad h_2 = Cf_2 + c,$$

welche die analytischen Ausdrücke der angegebenen Bedingungen sind. Man findet ohne Mühe

$$B = \frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1}, \qquad b = \frac{f_2 g_1 - f_1 g_2}{f_2 - f_1},$$
$$C = \frac{h_2 - h_1}{f_2 - f_1}, \qquad c = \frac{f_2 h_1 - f_1 h_2}{f_2 - f_1},$$

und folglich sind die Gleichungen der gesuchten Geraden

5) $y = \frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1} x + \frac{f_2 g_1 - f_1 g_2}{f_2 - f_1}, \quad z = \frac{h_2 - h_1}{f_2 - f_1} x + \frac{f_2 h_1 - f_1 h_2}{f_2 - f_1};$

dieselben drücken, einzeln betrachtet, den unmittelbar einleuchtenden Satz aus, dass die Projectionen der gesuchten Geraden durch die gleichnamigen Projectionen der gegebenen Punkte gehen.

Je nach Bedürfniss kann man den Gleichungen 5) noch andere Formen ertheilen, z. B.

$$y - g_1 = \frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1}(x - f_1), \qquad z - h_1 = \frac{h_2 - h_1}{f_2 - f_1}(x - f_1),$$

oder

$$y - g_2 = \frac{g_1 - g_2}{f_1 - f_2}(x - f_2), \qquad z - h_2 = \frac{h_1 - h_2}{f_1 - f_2}(x - f_2)$$

und am elegantesten

6) $\frac{y - g_1}{y - g_2} = \frac{x - f_1}{x - f_2}, \qquad \frac{z - h_1}{z - h_2} = \frac{x - f_1}{x - f_2}.$

Die vorstehenden Gleichungen lehren auch die Relationen kennen, welche zwischen den Coordinaten dreier Punkte $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$ und $f_3 g_3 h_3$ statt finden müssen, wenn diese in einer geraden

Linie liegen sollen. Hierzu ist nämlich erforderlich, dass der dritte Punkt auf der durch die beiden ersten Punkte gehenden Geraden liege, dass also seine Coordinaten den Gleichungen 6) genügen; die fragliche Bedingung ist demnach in den beiden Gleichungen

$$7)\qquad \frac{g_3-g_1}{g_3-g_2}=\frac{f_3-f_1}{f_3-f_1},\qquad \frac{h_3-h_1}{h_3-h_2}=\frac{f_3-f_1}{f_3-f_2}$$

enthalten, welche geometrisch bedeuten, dass im vorliegenden Falle die gleichnamigen Projectionen der drei Punkte in je einer Geraden liegen müssen.

§. 8.

Zwei Gerade.

Wenn zwei Gerade im Raume, deren Gleichungen

$$1)\qquad y=Bx+b,\qquad z=Cx+c,$$

$$2)\qquad y=B_1x+b_1,\qquad z=C_1x+c_1,$$

sein mögen, nicht parallel laufen, so können sie sich entweder schneiden oder an einander vorbeigehen, ohne irgend einen Punkt gemein zu haben. Um diese Fälle analytisch zu sondern, bestimmen wir zunächst die Durchschnitte der gleichnamigen Projectionen beider Geraden; aus den Gleichungen

$$y=Bx+b \text{ und } y=B_1x+b_1 .$$

finden wir als Coordinaten x' und y' des Durchschnittes der Projectionen auf die xy-Ebene

$$3)\qquad x'=-\frac{b_1-b}{B_1-B},\qquad y'=\frac{bB_1-b_1B}{B_1-B},$$

ebenso folgt aus den Gleichungen

$$z=Cx+c \text{ und } z=C_1x+c_1,$$

dass sich die Projectionen auf die xz-Ebene in einem Punkte schneiden, dessen Coordinaten sind:

$$4)\qquad x''=-\frac{c_1-c}{C_1-C},\qquad z''=\frac{cC_1-c_1C}{C_1-C}.$$

Wenn nun die beiden Geraden im Raume einen Punkt S als wirklichen Durchschnitt gemein haben, so müssen die Projectionen S' und S'' desselben mit den Durchschnitten der gleichnamigen Projectionen der Geraden zusammenfallen, d. h. x' und y' müssen die Coordinaten von S' und ebenso x'', z'' die Coordinaten von S' sein; dies ist aber nur möglich für $x'=x''$ und so ergiebt sich als Bedingung für das Vorhandensein eines Durchschnittes die Gleichung

5) $\frac{b_1 - b}{B_1 - B} = \frac{c_1 - c}{C_1 - C}$ oder $\frac{b_1 - b}{c_1 - c} = \frac{B_1 - B}{C_1 - C}$

oder auch

6) $(b_1 - b)(C_1 - C) = (c_1 - c)(B_1 - B)$.

Ist eine dieser drei Gleichungen erfüllt, so hat man für die Coordinaten des Durchschnittes, welche in diesem Falle x', y', z' heissen mögen, die Werthe

$$7) \begin{cases} x' = -\frac{b_1 - b}{B_1 - B} = -\frac{c_1 - c}{C_1 - C}, \\ y' = \frac{bB_1 - b_1 B}{B_1 - B}, \quad z' = \frac{cC_1 - c_1 C}{C_1 - C}; \end{cases}$$

im entgegengesetzten Falle kann nur von den Durchschnitten der Projectionen die Rede sein und die Formeln in 3) und 4) bestehen dann ohne weiteren Zusammenhang unter einander.

Bei zwei parallelen Geraden ist $B_1 = B$, $C_1 = C$ und mithin die Gleichung 6) erfüllt, die Formeln 7) geben $x' = \infty$, $y' = \infty$, $z' = \infty$ und sprechen den bekannten Satz aus, dass zwei Parallelen einen unendlich fernen Punkt gemein haben. Um diesen Fall mit dem vorigen in einen Ausdruck zusammenzufassen, sagen wir: zwei Gerade liegen in einer und derselben Ebene oder nicht, je nach dem die Gleichung

$$(b_1 - b)(C_1 - C) = (c_1 - c)(B_1 - B)$$

erfüllt oder nicht erfüllt ist; im ersten Falle haben sie einen Punkt gemein, der eben sowohl in endlicher als in unendlicher Entfernung liegen kann, im zweiten Falle besitzen die Geraden keinen gemeinschaftlichen Punkt.

Einige Aufmerksamkeit verdient noch der Fall, wenn die eine der gegebenen Geraden parallel zu einer oder zweien der Coordinatenebenen liegt. Ist die bisher durch

$$y = Bx + b, \qquad z = Cx + c$$

charakterisirte Gerade, welche kurz s heissen möge, parallel zur xy-Ebene, so hat man in den vorigen Formeln einfach $C = 0$ zu nehmen; ist sie parallel zur xz-Ebene, so wird dagegen $B = 0$. Etwas anders gestaltet sich die Sache, wenn s der yz-Ebene parallel liegt; die Gleichungen von s sind dann

$$x = a, \qquad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

und sie liefern, mit den Gleichungen 2) zusammen auf einen und denselben Punkt $x'y'z'$ angewendet, die Bedingung

$$8)\qquad \frac{B_1 a + b_1}{b} + \frac{C_1 a + c_1}{c} = 1.$$

Liegt die Gerade s parallel zur x-Achse, so ist $B = C = 0$, mithin nach 5)

$$9)\qquad \frac{b - b_1}{B_1} = \frac{c - c_1}{C_1} \text{ oder } \frac{b - b_1}{c - c_1} = \frac{B_1}{C_1};$$

verglichen mit der yz-Projection von s_1, d. h. mit der Geraden

$$\frac{y - b_1}{B_1} = \frac{z - c_1}{C_1}$$

giebt die obige Bedingung 9) zu erkennen, dass ein Durchschnitt von s und s_1 nur dann existirt, wenn die yz-Projection von s_1 durch die yz-Spur von s geht. Ist ferner s parallel der y-Achse, so sind die Gleichungen von s

$$x = a, \qquad z = c;$$

mit den Gleichungen 2) zusammen auf einen und denselben Punkt $x'y'z'$ angewendet, liefern sie die Bedingung

$$10)\qquad c = C_1 a + c_1,$$

welche geometrisch bedeutet, dass die xz-Projection von s_1 durch die xz-Spur von s gehen muss. Wäre endlich s parallel der z-Achse, mithin

$$x = a, \qquad y = b,$$

so würde sich durch ähnliche Schlüsse die Bedingung

$$11)\qquad b = B_1 a + b_1$$

ergeben, welche sagt, dass die xy-Projection von s_1 durch die gleichnamige Spur von s gehen muss.

Es bleibt nun noch der Winkel zu bestimmen, welchen die Geraden jedenfalls mit einander bilden, sie mögen sich schneiden oder nicht. Zu diesem Zwecke legen wir durch den Anfangspunkt der Coordinaten Parallelen zu den gegebenen Geraden; die Gleichungen dieser Parallelen sind

$$y = Bx, \quad z = Cx; \quad y = B_1 x, \quad z = C_1 x;$$

wir nennen ferner r die Strecke vom Anfangspunkte der Coordinaten bis zu dem auf der ersten Parallelen liegenden Punkte xyz, ebenso r_1 die Strecke vom Coordinatenanfang bis zu einem auf der zweiten Parallelen willkürlich gewählten Punkte $x_1 y_1 z_1$, dessen Coordinaten den Gleichungen

$$y_1 = B_1 x_1, \qquad z_1 = C_1 x_1$$

genügen müssen, und bestimmen den Winkel (rr_1), welcher der gesuchte Winkel ist. Nach §. 5 haben wir

$$\cos(rr_1) = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1 + (xy_1 + x_1y)\gamma + (xz_1 + x_1z)\beta + (yz_1 + y_1z)\alpha}{rr_1}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\cos(xy) = \gamma, \qquad \cos(xz) = \beta, \qquad \cos(yz) = \alpha,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\gamma + 2xz\beta + 2yz\alpha},$$

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2x_1y_1\gamma + 2x_1z_1\beta + 2y_1z_1\alpha};$$

durch Substitution der Werthe $y = Bx$, $z = Cx$, $y_1 = B_1x_1$, $z_1 = C_1x_1$ folgt hieraus

$$12)\quad \cos(rr_1) = \frac{1 + BB_1 + CC_1 + (B + B_1)\gamma + (C + C_1)\beta + (BC_1 + B_1C)\alpha}{DD_1}$$

wobei, wie früher, zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$13)\quad \begin{cases} D = \sqrt{1 + B^2 + C^2 + 2B\gamma + 2C\beta + 2BC\alpha}, \\ D_1 = \sqrt{1 + B_1^2 + C_1^2 + 2B_1\gamma + 2C_1\beta + 2B_1C_1\alpha}. \end{cases}$$

Für rechtwinklige Coordinaten vereinfacht sich diese Formel zur nachstehenden

$$14)\quad \cos(rr_1) = \frac{1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{(1 + B^2 + C^2)(1 + B_1^2 + C_1^2)}}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich u. A. auch die Bedingung, welcher die Coefficienten B, C, B_1, C_1 genügen müssen, wenn die gegebenen Geraden einen rechten Winkel mit einander bilden sollen (wobei sie sich eben sowohl rechtwinklig schneiden als kreuzen können); man hat nämlich für diesen Fall $\cos(rr_1) = 0$, mithin bei einem beliebigen Coordinatensysteme

$$15)\quad \left\{\begin{array}{l} 1 + BB_1 + CC_1 + (B + B_1)\cos(xy) \\ + (C + C_1)\cos(xz) + (BC_1 + B_1C)\cos(yz) \end{array}\right\} = 0,$$

und bei einem rechtwinkligen Coordinatensystem

$$16)\quad 1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

An die bisher entwickelte Theorie der Geraden im Raume knüpft sich eine Reihe wichtiger Aufgaben, deren Lösung uns zunächst beschäftigen wird.

§. 9.

Gerade durch einen Punkt und zwei Gerade.

Wie aus den Elementen der Stereometrie bekannt ist, lässt sich durch einen gegebenen Punkt immer eine Gerade so ziehen, dass sie zwei bestimmte nicht in einer Ebene liegende Gerade

schneidet; um dieselbe Aufgabe analytisch zu lösen, bezeichnen wir den gegebenen Punkt mit fgh und nennen

$$1)\quad \begin{cases} y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1, \\ y = B_2 x + b_2, & z = C_2 x + c_2 \end{cases}$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, sowie

$$2)\quad y = Px + p, \qquad z = Qx + q$$

die Gleichungen der gesuchten Geraden. Die Bedingung, dass letztere durch den Punkt fgh gehen soll, wird durch die Gleichungen

$$3)\quad g = Pf + p, \qquad h = Qf + q$$

ausgedrückt; die zweite Bedingung, dass die gesuchte Gerade jede der beiden gegebenen Geraden schneiden soll, liefert die Gleichungen

$$4)\quad \frac{p - b_1}{q - c_1} = \frac{P - B_1}{Q - C_1}, \qquad \frac{p - b_2}{q - c_2} = \frac{P - B_2}{Q - C_2},$$

und so hat man zusammen vier Gleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten P, p, Q, q. Substituirt man die aus Nr. 3) gezogenen Werthe

$$5)\quad p = g - Pf, \qquad q = h - Qf$$

in die Gleichungen 4), so ergeben sich nach Wegschaffung der Brüche die neuen Gleichungen

$$(C_1 f + c_1 - h) P - (B_1 f + b_1 - g) Q = B_1 (c_1 - h) - C_1 (b_1 - g),$$
$$(C_2 f + c_2 - h) P - (B_2 f + b_2 - g) Q = B_2 (c_2 - h) - C_2 (b_2 - g),$$

woraus P und Q leicht zu entwickeln sind. Zur Abkürzung sei

$$B_1 (c_1 - h) - C_1 (b_1 - g) = k_1, \qquad B_2 (c_2 - h) - C_2 (b_2 - g) = k_2,$$
$$B_1 f + b_1 - g = m_1, \qquad B_2 f + b_2 - g = m_2,$$
$$C_1 f + c_1 - h = n_1, \qquad C_2 f + c_2 - h = n_2;$$

die Werthe von P und Q sind dann folgende:

$$P = \frac{k_2 m_1 - k_1 m_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1}, \qquad Q = \frac{k_2 n_1 - k_1 n_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1};$$

hieraus finden sich p und q nach Nr. 5) und schliesslich sind die Gleichungen der verlangten Geraden

$$6)\quad y - g = \frac{k_2 m_1 - k_1 m_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1}(x - f), \quad z - h = \frac{k_2 n_1 - k_1 n_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1}(k - f).$$

Für die Coordinaten der Durchschnitte dieser Geraden mit den gegebenen Geraden findet man nach §. 8

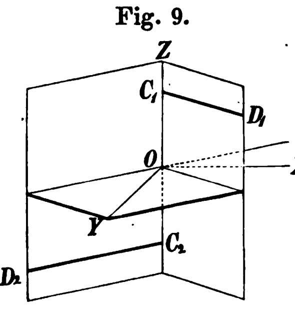
$$7)\quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{p - b_1}{P - B_1} = -\dfrac{q - c_1}{Q - C_1}, \\ y_1 = \dfrac{b_1 P - p B_1}{P - B_1}, \quad z_1 = \dfrac{c_1 Q - q C_1}{Q - C_1}; \end{cases}$$

$$8)\quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{p-b_2}{P-B_2} = -\dfrac{q-c_2}{Q-C_2}, \\ y_2 = \dfrac{b_2 P - p B_2}{P-B_2}, \quad z_2 = \dfrac{c_2 Q - q C_2}{Q-C_2}; \end{cases}$$

wo die oben gegebenen Werthe von P, p, Q, q zu substituiren sind.

Die gefundenen Ausdrücke vereinfachen sich, wenn man dem Coordinatensystem eine besondere gegen die gegebenen Geraden symmetrische Lage ertheilt; man erhält eine solche auf folgende Weise. Aus den Elementen der Stereometrie ist bekannt, dass immer eine Gerade existirt, die zwei gegebene kreuzende Gerade senkrecht schneidet und die Entfernung beider gegebenen Geraden angiebt (wie man sie analytisch bestimmen kann, wird in §. 13 gezeigt werden); diese Gerade nehmen wir zur z-Achse, sie schneidet die gegebenen Geraden $C_1 D_1$ und $C_2 D_2$ in zwei Punkten C_1 und C_2, zwischen welchen wir den Coordinatenanfang in die Mitte legen, so dass $OC_1 = c$ und $OC_2 = -c$ ist; ferner ziehen wir durch O Parallelen zu $C_1 D_1$ und $C_2 D_2$, halbiren die Winkel zwischen diesen Parallelen und nehmen die auf einander senkrechten Halbirungslinien zu den Achsen der x und der y. In Beziehung auf dieses neue rechtwinklige Coordinatensystem sind die Gleichungen der gegebenen Geraden

Fig. 9.



$$y = Bx, \qquad z = c,$$
$$y = -Bx, \qquad z = -c,$$

also durch Vergleich mit dem Früheren

$$B_1 = B, \quad b_1 = 0; \quad C_1 = 0, \quad c_1 = c,$$
$$B_2 = -B, \quad b_2 = 0, \quad C_2 = 0, \quad c_2 = -c;$$

hieraus ergeben sich die Werthe

$$k_1 = B(c-h); \qquad k_2 = B(c+h),$$
$$m_1 = Bf - g; \qquad m_2 = -(Bf+g),$$
$$n_1 = c - h; \qquad n_2 = -(c+h),$$

und als Gleichungen der gesuchten Geraden

$$9)\quad y - g = \frac{B(Bcf - gh)}{cg - Bfh}(x-f), \; z - h = \frac{B(c^2-h^2)}{cg - Bfh}(x-f).$$

Liegt der Punkt fgh auf einer der gegebenen Geraden, wie z. B.

wenn $g = Bf$ und $h = c$, so nehmen die Coefficienten von $x - f$ die vieldeutige Form $\frac{0}{0}$ an und geben dadurch zu erkennen, dass die Aufgabe in diesem Falle unbestimmt ist.

§. 10.

Transversale zu zweien und Parallele zur dritten von drei gegebenen Geraden.

Wenn drei gegebene Gerade durch die Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} y = Bx + b, & z = Cx + c, \\ y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1, \\ y = B_2 x + b_2, & z = C_2 x + c_2, \end{cases}$$

bestimmt sind, so kann nach einer vierten Geraden gefragt werden, welche der ersten parallel ist und die beiden anderen schneidet. Die Gleichungen der gesuchten Geraden mögen heissen

$$2)\qquad y = Px + p, \qquad z = Qx + q;$$

vermöge des Parallelismus dieser und der ersten Geraden ist

$$3)\qquad P = B, \qquad Q = C;$$

weil ferner die verlangte Gerade die beiden übrigen Geraden schneiden soll, müssen noch die Gleichungen

$$4)\qquad \frac{p - b_1}{q - c_1} = \frac{P - B_1}{Q - C_1} \text{ und } \frac{p - b_2}{q - c_2} = \frac{P - B_2}{Q - C_2}$$

erfüllt sein. Nach Substitution der Werthe von P und Q werden aus diesen Gleichungen die folgenden

$$(C - C_1)\,p - (B - B_1)\,q = b_1\,(C - C_1) - c_1\,(B - B_1),$$
$$(C - C_2)\,p - (B - B_2)\,q = b_2\,(C - C_2) - c_2\,(B - B_2),$$

aus denen sich p und q bestimmen lassen. Setzt man zur Abkürzung

$$5)\quad \begin{cases} b_1\,(C - C_1) - c_1\,(B - B_1) = d_1, \\ b_2\,(C - C_2) - c_2\,(B - B_2) = d_2, \end{cases}$$

so sind die Werthe von p und q:

$$6)\quad \begin{cases} p = \dfrac{d_2\,(B - B_1) - d_1\,(B - B_2)}{(B - B_1)\,(C - C_2) - (B - B_2)\,(C - C_1)}, \\ q = \dfrac{d_2\,(C - C_1) - d_1\,(C - C_2)}{(B - B_1)\,(C - C_2) - (B - B_2)\,(C - C_1)}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der verlangten Geraden lauten demnach

$$7)\qquad y = Bx + p, \qquad z = Cx + q,$$

wo p und q die oben angegebenen Werthe besitzen. Die Durchschnitte dieser und der beiden anderen Geraden finden sich durch

Formeln, welche mit den unter Nr. 8) und 9) des vorigen Paragraphen entwickelten übereinstimmen, in denen aber $P = B$, $Q = C$ und für p und q die obigen Ausdrücke zu setzen sind.

Weit einfacher wird die Lösung unserer Aufgabe, wenn wir ein in Beziehung auf die drei gegebenen Geraden symmetrisch liegendes Coordinatensystem wählen. Denken wir uns zunächst durch irgend einen Punkt im Raume Parallelen zu den drei Geraden gelegt und diese als Coordinatenachsen genommen, so erhalten wir als Gleichungen der drei Geraden

$$\begin{aligned} y &= b_1, \qquad & z &= c_1, \\ x &= a_2, & z &= c_2, \\ x &= a_3, & y &= b_3; \end{aligned}$$

dieses Coordinatensystem verschieben wir parallel nach einem Punkte, dessen Coordinaten sind

$$\tfrac{1}{2}(a_2 + a_3), \qquad \tfrac{1}{2}(b_1 + b_3), \qquad \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2)$$

und haben so, wenn die neuen Coordinaten mit x', y', z' bezeichnet werden

$$\begin{aligned} y' + \tfrac{1}{2}(b_1 + b_3) &= b_1, \qquad & z' + \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2) &= c_1, \\ x' + \tfrac{1}{2}(a_2 + a_3) &= a_2, & z' + \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2) &= c_2, \\ x' + \tfrac{1}{2}(a_2 + a_3) &= a_3, & y' + \tfrac{1}{2}(b_1 + b_3) &= b_3; \end{aligned}$$

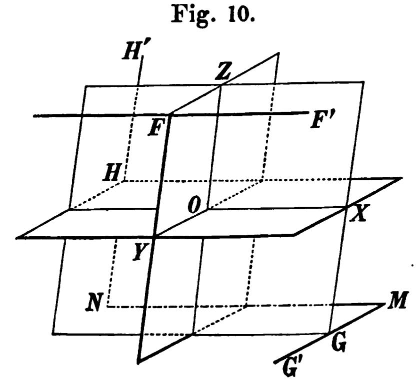
lassen wir endlich die nicht mehr nöthigen Accente weg und setzen zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}(a_2 - a_3) = f, \quad \tfrac{1}{2}(b_1 - b_3) = g, \quad \tfrac{1}{2}(c_1 - c_2) = h,$$

so sind die Gleichungen der drei gegebenen Geraden:

$$8) \quad \begin{cases} y = g, & z = h, \\ x = f, & z = -h, \\ x = -f, & y = -g. \end{cases}$$

Fig. 10.



Zu demselben Coordinatensysteme gelangt man auch dadurch, dass man durch jede der gegebenen Geraden zwei Ebenen parallel zu den anderen Geraden legt, den Mittelpunkt (Diagonalendurchschnitt) des von diesen sechs Ebenen begrenzten Parallelopipedes zum Coordinatenanfang nimmt und durch ihn die Coordinatenachsen pa-

rallel zu den gegebenen Geraden zieht. Soll nun die gesuchte Gerade der ersten Geraden parallel liegen, so sind ihre Gleichungen

$$y = p, \qquad z = q;$$

soll sie ferner die anderen Geraden schneiden, so ergeben sich nach §. 8 Nr. 9) und Nr. 10 (für $B = P = 0$, $C = Q = 0$) die Bedingungen

$$-h = q \quad \text{und} \quad -g = p;$$

die Gleichungen der verlangten Geraden sind folglich

$$9) \qquad y = -g \quad \text{und} \quad z = -h,$$

wie man geometrisch leicht verificiren kann. In der Figur ist die fragliche Gerade mit MN bezeichnet.

§. 11.

Transversale zu vier gegebenen Geraden.

Dass die Aufgabe ‚eine Gerade zu finden, welche drei gegebene Gerade schneidet' unbestimmt ist, erkennt man leicht aus §. 9, wenn man den dort gegebenen Punkt (fgh) auf einer dritten Geraden fortrücken lässt; bestimmt dagegen ist die Aufgabe ‚eine Gerade zu finden, welche vier gegebene Gerade schneidet', vorausgesetzt, dass kein Paar dieser Geraden in einer Ebene liegt. Sind

$$1) \quad \begin{cases} y = Bx + b, & z = Cx + c, \\ y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1, \\ y = B_2 x + b_2, & z = C_2 x + c_2, \\ y = B_3 x + b_3, & z = C_3 x + c_3, \end{cases}$$

die Gleichungen der gegebenen und

$$2) \qquad y = Px + p, \qquad y = Qx + q$$

die der gesuchten Geraden, so müssen die vier Unbekannten P, p, Q, q den folgenden vier Gleichungen genügen:

$$3) \quad \begin{cases} \dfrac{p-b}{q-c} = \dfrac{P-B}{Q-C}, & \dfrac{p-b_1}{q-c_1} = \dfrac{P-B_1}{Q-C_1}, \\ \dfrac{p-b_2}{q-c_2} = \dfrac{P-B_2}{Q-C_2}, & \dfrac{p-b_3}{q-c_3} = \dfrac{P-B_3}{Q-C_3}, \end{cases}$$

welche zur Bestimmung jener Grössen hinreichen. Um aber den Weitläufigkeiten zu entgehen, welche die Auflösung der vorstehenden Gleichungen mit sich bringt, wollen wir die Grössen p und q vermeiden und zunächst den Punkt $x_0 y_0 z_0$ aufsuchen, in welchem die verlangte Gerade die erste der gegebenen Geraden schneidet. Da der genannte Punkt beiden Geraden zugleich angehört, so gelten für seine Coordinaten die Gleichungen

4) $$y_0 = Bx_0 + b, \qquad z_0 = Cx_0 + c,$$

5) $$y_0 = Px_0 + p, \qquad z_0 = Qx_0 + q,$$

woraus man durch Elimination von y_0 und z_0 erhält

6) $$p = b + (B - P)x_0, \qquad q = c + (C - Q)x_0.$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in die drei letzten Gleichungen von Nr. 3) liefert drei Gleichungen zur Bestimmung von P, Q und x_0; die Substitution in die erste jener Gleichungen ist nicht mehr nöthig, denn dass die gesuchte Gerade die erste Gerade schneidet, ist schon dadurch ausgedrückt, dass beide den Punkt $x_0 y_0 z_0$ gemein haben sollen. Die zweite Gleichung in Nr. 3) wird nach der angedeuteten Operation zur folgenden:

$$[c_1 - c + (C_1 - C)x_0]P - [b_1 - b + (B_1 - B)x_0]Q$$
$$= B_1(c_1 - c) - C_1(b_1 - b) + (BC_1 - B_1C)x_0,$$

und von ähnlicher Gestalt sind die aus den zwei anderen Gleichungen entstehenden neuen Gleichungen. Zur Abkürzung sei nun

$$B_1(c_1 - c) - C_1(b_1 - b) = l_1, \qquad BC_1 - B_1C = L_1,$$
$$B_2(c_2 - c) - C_2(b_2 - b) = l_2, \qquad BC_2 - B_2C = L_2,$$
$$B_3(c_3 - c) - C_3(b_3 - b) = l_3, \qquad BC_3 - B_3C = L_3;$$
$$b_1 - b = m_1, \quad B_1 - B = M_1, \quad c_1 - c = n_1, \quad C_1 - C = N_1,$$
$$b_2 - b = m_2, \quad B_2 - B = M_2, \quad c_2 - c = n_2, \quad C_2 - C = N_2,$$
$$b_3 - b = m_3, \quad B_3 - B = M_3, \quad c_3 - c = n_3, \quad C_3 - C = N_3;$$

die aufzulösenden drei Gleichungen sind dann folgende:

$$(n_1 + N_1x_0)P - (m_1 + M_1x_0)Q = l_1 + L_1x_0,$$
$$(n_2 + N_2x_0)P - (m_2 + M_2x_0)Q = l_2 + L_2x_0,$$
$$(n_3 + N_3x_0)P - (m_3 + M_3x_0)Q = l_3 + L_3x_0.$$

Aus den beiden ersten ergeben sich für P und Q die Ausdrücke

7) $$P = \frac{(l_1 + L_1x_0)(m_2 + M_2x_0) - (l_2 + L_2x_0)(m_1 + M_1x_0)}{(m_2 + M_2x_0)(n_1 + N_1x_0) - (m_1 + M_1x_0)(n_2 + N_2x_0)},$$

8) $$Q = \frac{(l_1 + L_1x_0)(n_2 + N_2x_0) - (l_2 + L_2x_0)(n_1 + N_1x_0)}{(m_2 + M_2x_0)(n_1 + N_1x_0) - (m_1 + M_1x_0)(n_2 + N_2x_0)},$$

und wenn man diese in die letzte der obigen drei Gleichungen substituirt, so bleibt folgende nur die eine Unbekannte x_0 enthaltende Gleichung übrig:

9) $$\begin{cases} (n_3 + N_3x_0)[(l_1 + L_1x_0)(m_2 + M_2x_0) - (l_2 + L_2x_0)(m_1 + M_1x_0)] \\ -(m_3 + M_3x_0)[(l_1 + L_1x_0)(n_2 + N_2x_0) - (l_2 + L_2x_0)(n_1 + N_1x_0)] \\ = (l_3 + L_3x_0)[(m_2 + M_2x_0)(n_1 + N_1x_0) - (m_1 + M_1x_0)(n_2 + N_2x_0)]. \end{cases}$$

Nach Ausführung der angedeuteten Multiplikationen kann man alle Glieder auf eine Seite bringen, dies giebt eine cubische Gleichung von der Form

$$10) \qquad \varkappa + \lambda x_0 + \mu x_0^2 + \nu x_0^3 = 0$$

und zwar ist der Coefficient der höchsten Potenz

$$\nu = L_1(M_2 N_3 - M_3 N_2) + L_2(M_3 N_1 - M_1 N_3) + L_3(M_1 N_2 - M_2 N_1).$$

Dieser Ausdruck zieht sich sehr zusammen, wenn man beachtet, dass

$$L_1 = BC_1 - B_1 C = B(C_1 - C) - C(B_1 - B) = BN_1 - CM_1$$

und ebenso

$$L_2 = BN_2 - CM_2, \qquad L_3 = BN_3 - CM_3$$

ist; es findet sich nämlich durch Ausführung der Multiplicationen und Vereinigung der mit B und C behafteten Glieder

$$= B[N_1(M_2 N_3 - M_3 N_2) + N_2(M_3 N_1 - M_1 N_3) + N_3(M_1 N_2 - M_2 N_1)]$$
$$+ C[M_1(M_2 N_3 - M_3 N_2) + M_2(M_3 N_1 - M_1 N_3) + M_3(M_1 N_2 - M_2 N_1)]$$

d. h. $\nu = 0$.

Die Gleichung 10) ist daher nur eine quadratische und liefert im Allgemeinen zwei Werthe von x_0; die Gleichungen 7) und 8) bestimmen nachher die Unbekannten P und Q, die in Nr. 6) verzeichneten Gleichungen endlich liefern p und q. Hierin liegt in der That eine vollständige Lösung der Aufgabe, doch ist nicht zu leugnen, dass die ganze Rechnung etwas unbehilflicher Natur ist und namentlich zu einer Construction der verlangten Geraden gänzlich unbrauchbar sein würde. Wir geben daher eine zweite weit einfachere Behandlung des Problemes.

Die in Nr. 1) erwähnten Geraden mögen kurz s, s_1, s_2, s_3 und die gesuchte Transversale mag t heissen; durch jede der drei Geraden s_1, s_2, s_3 legen wir zwei Ebenen parallel zu den beiden übrigen Geraden, nehmen den Mittelpunkt des von den entstandenen sechs Ebenen begrenzten Parallelopipedes zum Coordinatenanfang und ziehen durch ihn die Coordinatenachsen parallel zu den Geraden s_1, s_2, s_3. Wie im vorigen Paragraphen haben wir dann

$$11) \begin{cases} y = g, & z = h \quad \text{als Gleichungen von } s_1, \\ x = f, & z = -h \quad \text{,, ,, ,, } s_2, \\ x = -f, & z = -g \quad \text{,, ,, ,, } s_3; \end{cases}$$

ferner seien wie vorhin

$$12) \quad y = Bx + b, \quad z = Cx + c \quad \text{die Gleichungen von } s,$$
$$13) \quad y = Px + p, \quad z = Qx + q \quad \text{,, ,, ,, } t.$$

Die Bedingung für den Durchschnitt von t mit s ist

$$14) \qquad \frac{p-b}{q-c} = \frac{P-B}{Q-C};$$

die Bedingung für den Durchschnitt von t mit s_1

15) $$\frac{p-g}{q-h}=\frac{P}{Q}.$$

Wenn ferner ein Durchschnitt von t mit s_2 existiren soll, so muss die xz-Projection von t durch die gleichnamige Spur von s_2 gehen; dies giebt

16) $$-h=Qf+q;$$

endlich schneiden sich t und s_3, wenn die xy-Projection von t durch die xy-Spur von s_3 geht, d. h. wenn

17) $$-g=-Pf+p.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgen die Ausdrücke

18) $$P=\frac{p+g}{f}, \qquad Q=-\frac{q+h}{f}$$

und durch Substitution derselben verwandelt sich die Gleichung 15) in die nachstehende

19) $$pq=gh;$$

auf gleiche Weise ergiebt sich aus Nr. 14), wenn man das vorstehende Ergebniss benutzt

20) $$(c-h-Cf)p+(b-g+Bf)q=2gh-b(h+Cf)-c(g-Bf).$$

Die Bestimmung von p und q aus den Gleichungen 19) und 20) unterliegt jetzt keiner Schwierigkeit, die Formeln in 18) geben nachher P und Q, womit die Aufgabe gelöst ist. Besonderes Interesse gewährt es aber, die geometrische Bedeutung der letzten Gleichungen aufzusuchen und daraus eine Construction der Transversale t herzuleiten.

Die Gleichung 19) sagt, dass die yz-Spur der Geraden t, nämlich der Punkt pq, auf einer Hyperbel liegt, deren Asymptoten die Achsen der y und der z sind und deren Potenz dem Produkte gh gleich kommt; die Gleichung 20) giebt zu erkennen, dass der Punkt pq einer Geraden angehört, welche von der y-Achse das Stück

$$m=\frac{2gh-b(h+Cf)-c(g-Bf)}{c-h-Cf}$$

und von der z Achse die Strecke

$$n=\frac{2gh-b(h+Cf)-c(g-Bf)}{b-g+Bf}$$

abschneidet; der Punkt pq ist demnach der Durchschnitt jener Hyperbel mit dieser Geraden. Um nun die Strecken m und n zu construiren, legen wir durch den Punkt $-f$, $-g$, $+h$ eine Parallele zu s und suchen ihre yz-Spur; die Gleichungen der fraglichen Parallelen sind

$$y + g = B(x + f), \qquad z - h = C(x + f)$$

oder

$$y = Bx - g + Bf, \qquad z = Cx + h + Cf$$

mithin die Coordinaten ihrer yz-Spur

$$b_1 = -g + Bf, \qquad c_1 = h + Cf;$$

legen wir zweitens durch den Punkt $+f$, $+g$, $-h$ eine Parallele zu s, so erhalten wir für die Coordinaten ihrer yz-Spur

$$b_2 = g - Bf, \qquad c_2 = -h - Cf,$$

d. i.

$$b_2 = -b_1 \quad \text{und} \quad c_2 = -c_1.$$

Vermöge dieser Werthe können die für m und n angegebenen Ausdrücke auf folgende Form gebracht werden

$$m = \frac{2gh}{c - c_1} + \frac{bc_1 - b_1c}{c_1 - c},$$

$$n = \frac{2gh}{b - b_2} + \frac{bc_2 - b_2c}{b - b_2};$$

nun stellt aber der Ausdruck

$$\frac{bc_1 - b_1c}{c_1 - c}$$

das Stück dar, welches die Verbindungslinie der Punkte bc und b_1c_1 auf der y-Achse abschneidet und welches kurz m_1 heissen möge, ebenso bedeutet der Ausdruck

$$\frac{bc_2 - b_2c}{b - b_2}$$

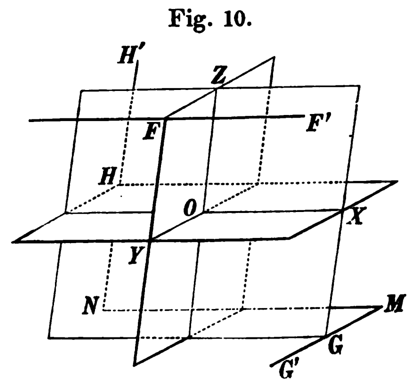
die Strecke, welche die Verbindungslinie der Punkte bc und b_2c_2 von der z-Achse abschneidet und die wir kurz n_2 nennen; es ist daher

$$21) \quad m = \frac{gh}{\frac{1}{2}(c - c_1)} + m_1, \qquad n = \frac{gh}{\frac{1}{2}(b - b_2)} + n_2$$

und diese Ausdrücke sind einfach genug für eine geometrische Construction; letztere besteht nämlich aus folgenden Operationen.

Man construirt zunächst die vorhin erwähnte Hyperbel zwischen den Asymptoten OY und OZ mit der Potenz gh; zu der gegebenen Geraden s, deren yz-Spur die Coordinaten b, c besitzt und A heissen möge, legt man durch den Punkt $-f$, $-g$, $+h$ (in der Figur H') eine Parallele und bestimmt ihre yz-Spur A_1, deren Coordinaten b_1 und c_1 sind; auf gleiche Weise hat man durch den Punkt $+f$, $+g$, $-h$ (in der Figur G') eine Parallele zu s zu legen und ihre yz-Spur A_2 aufzusuchen, deren Coordinaten

Fig. 10.



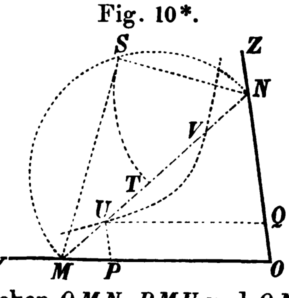
b_2 und c_2 sind. Die Gerade AA_1 schneidet von der y-Achse ein Stück ab, welches mit m_1 einerlei ist, ebenso schneidet AA_2 von der z-Achse eine Strecke $= n_2$ ab; das erste Stück vergrössert man um die zur Ordinate $\frac{1}{2}(c - c_1)$ gehörende Hyperbelabscisse, das zweite Stück um die zur Abscisse $\frac{1}{2}(b - b_2)$ gehörige Hyperbelordinate, und erhält hiermit auf der y-Achse die Strecke $OM = m$, sowie auf der z-Achse die Strecke $ON = n$. Die Gerade MN schneidet die Hyperbel in zwei Punkten U, V, und diese sind die yz-Spuren der beiden Geraden, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen. Will man endlich die verlangten Geraden selber construiren, so braucht man nur durch den einen oder anderen der Punkte U und V eine Gerade zu legen, welche zwei der gegebenen Geraden etwa s und s_1 schneidet.

Wir haben bei der angegebenen Construction eine Hyperbel benutzt, weil sich diese sehr ungezwungen darbot, können aber auch auf folgende Weise statt der Hyperbel einen Kreis verwenden. Nachdem m_1 und n_2 wie vorhin bestimmt worden sind, construiren wir die Ausdrücke

$$\frac{gh}{\frac{1}{2}(c - c_1)} \text{ und } \frac{gh}{\frac{1}{2}(b - b_2)}$$

als vierte Proportionalen und leiten daraus nach Formel 21) m und n ab, wodurch wir wieder zu der Geraden MN gelangen. Es kommt nun blos darauf an, in MN den Punkt U (oder V) zu finden, dessen Coordinaten $OP = p$ und $OQ = q$ der Gleichung $pq = gh$ genügen; setzen wir die bekannte Strecke $MN = l$, die unbekannten Stücke $MU = u$ und $NU = v$, so ist in den ähnlichen Dreiecken OMN, PMU und QNU

Fig. 10*.



$$l:m = v:p \text{ mithin } p = \frac{mv}{l},$$
$$l:n = u:q \quad „ \quad q = \frac{nu}{l},$$

n die Stelle der Gleichung $pq = gh$ tritt daher die folgende

$$uv = \frac{ghl^2}{mn} \text{ oder } uv = k^2,$$

orin k zur Abkürzung dienen möge und mittelst der Proportion

22) $$\sqrt{mn} : \sqrt{gh} = l:k$$

icht construirt werden kann. Ausserdem haben wir $u + v = l$ ıd durch Verbindung beider Gleichungen

$$u = \tfrac{1}{2}[l - \sqrt{l^2 - (2k)^2}],$$
$$v = \tfrac{1}{2}[l + \sqrt{l^2 - (2k)^2}].$$

es giebt folgende Construction. Nachdem k mittelst der Propor-n 22) bestimmt ist, beschreibt man über MN als Durchmesser ıen Halbkreis, trägt in diesen von M aus die Linie $MS = 2k$ ı, nimmt $NT = NS$ und halbirt die Strecke MT in U; der zweite ınkt V liegt von N aus in der Entfernung $NV = MU$.

§. 12.

Senkrechte von einem Punkte auf eine Gerade.

Die Coordinaten eines gegebenen Punktes mögen f, g, h heis-n und

1) $$y = Bx + b, \qquad z = Cx + c$$

e Gleichungen der gegebenen Geraden. Soll nun durch den ınkt fgh eine Gerade gezogen werden, welche die erste Gerade nkrecht schneidet, so sind die in den Gleichungen des gesuchten rpendikels etwa

2) $$y = Mx + m, \qquad z = Nx + n$$

rkommenden vier Unbekannten (M, N, m, n) mittelst folgender dingungen zu bestimmen. Weil erstens die verlangte Gerade rch den Punkt fgh gehen soll, ist

3) $$g = Mf + m, \qquad h = Nf + n;$$

il ferner das Perpendikel die gegebene Gerade schneiden soll, ıss die Bedingungsgleichung

4) $$(m - b)(N - C) = (n - c)(M - B)$$

ıtt finden; endlich gehört zur senkrechten Lage beider Geraden gen einander die Gleichung (§. 8 Nr. 15)

$$\left.\begin{array}{c} 1+BM+CN \\ +(B+M)\cos(xy)+(C+N)\cos(xz)+(BN+CM)\cos(yz) \end{array}\right\}=0,$$

in welcher wir zur Abkürzung die Cosinus der Coordinatenwinkel (yz), (xz), (xy) mit α, β, γ bezeichnen und die gleichartigen Grössen vereinigen, so dass die Gleichung lautet

$$5)\quad (B+\gamma+C\alpha)M+(C+\beta+B\alpha)N=-(1+B\gamma+C\beta).$$

Aus den Gleichungen 3) erhalten wir

$$6)\qquad m=g-Mf,\qquad n=h-Nf,$$

durch deren Substitution die Gleichung 4) in die folgende übergeht:

$$7)\quad (Cf+c-h)M-(Bf+b-g)N=B(c-h)-C(b-g).$$

Die Gleichungen 5) und 7) bestimmen M und N, wobei zur Abkürzung gesetzt werden möge:

$$8)\left\{\begin{array}{l} F=(Bf+b-g)(B+C\alpha+\gamma)+(Cf+c-h)(C+B\alpha+\beta), \\ G=[B(c-h)-C(b-g)](C+B\alpha+\beta)-(Bf+b-g)(1+B\gamma+C\beta), \\ H=[C(b-g)-B(c-h)](B+C\alpha+\gamma)-(Cf+c-h)(1+B\gamma+C\beta); \end{array}\right.$$

die Werthe der vier Unbekannten sind dann

$$M=\frac{G}{F},\qquad N=\frac{H}{F},$$

$$m=g-\frac{G}{F}f,\qquad n=h-\frac{H}{F}f,$$

mithin die Gleichungen der gesuchten Senkrechten:

$$9)\quad y-g=\frac{G}{F}(x-f),\qquad z-h=\frac{H}{F}(x-f).$$

Wir suchen zweitens die Coordinaten x_0, y_0, z_0 desjenigen Punktes zu bestimmen, in welchem die von fgh ausgehende Senkrechte die gegebene Gerade schneidet. Da der fragliche Durchschnitt beiden Geraden gleichzeitig angehört, so gelten für seine Coordinaten die Beziehungen

$$10)\quad y_0=Bx_0+b,\quad y_0-g=\frac{G}{F}(x_0-f),\ z_0-h=\frac{H}{F}(x_0-f);$$

aus den beiden ersten Gleichungen erhalten wir

$$x_0=-\frac{F(b-g)+Gf}{BF-G}$$

oder auch

$$11)\qquad x_0=f-\frac{Bf+b-g}{BF-G}F.$$

Vermöge der oben angegebenen Werthe von F und G ist aber

$$BF-G=(Bf+b-g)\left\{B(B+C\alpha+\gamma)+1+B\gamma+C\beta\right\}$$
$$+(C+B\alpha+\beta)\left\{B(Cf+c-h)-B(c-h)+C(b-g)\right\}$$

und unter der Bemerkung, dass der Inhalt der letzten Parenthese $= C(Bf + b - g)$ ist,

$$BF - G$$
$$= (Bf + b - g)(1 + B^2 + C^2 + 2B\gamma + 2C\beta + 2BC\alpha).$$

Benutzen wir die schon in §. 6 gebrauchte Abkürzung

12) $$D^2 = 1 + B^2 + C^2 + 2B\gamma + 2C\gamma + 2BC\alpha,$$

so vereinfacht sich der Werth von x_0 wesentlich; aus den Gleichungen 9) ergeben sich nachher y_0 und z_0, überhaupt sind

13) $$x_0 = f - \frac{F}{D^2}, \quad y_0 = g - \frac{G}{D^2}, \quad z_0 = h - \frac{H}{D^2},$$

lie Coordinaten des Fusspunktes der vom Punkte fgh auf die ge;ebene Gerade herabgelassenen Senkrechten.

Endlich möge noch die Entfernung p der Punkte fgh und $x_0 y_0 z_0$ aufgesucht werden; hierzu dient die Formel

$$p^2 = (x_0 - f)^2 + (y_0 - g)^2 + (z_0 - h)^2$$
$$+ 2(x_0 - f)(y_0 - g)\gamma + 2(x_0 - f)(z_0 - h)\beta + 2(y_0 - g)(z_0 - h)\alpha,$$

n welche nur die obigen Werthe von x_0, y_0, z_0 einzuführen sind. Ian findet auf diese Weise

14) $$p = \frac{\sqrt{F^2 + G^2 + H^2 + 2FG\gamma + 2FH\beta + 2GH\alpha}}{D^2}$$

ür die Entfernung des Punktes von der Geraden.

Bei rechtwinkligen Coordinaten hat man einfacher

15) $$\begin{cases} F = B(Bf + b - g) + C(Cf + c - h), \\ G = C[B(c - h) - C(b - g)] - (Bf + b - g), \\ H = B[C(b - g) - B(c - g)] - (Cf + c - h), \end{cases}$$

ie Gleichungen der Senkrechten lauten wiederum:

16) $$y - g = \frac{G}{F}(x - f), \qquad z - h = \frac{H}{F}(x - f),$$

ie Coordinaten ihres Fusspunktes sind:

17) $$\begin{cases} x_0 = f - \dfrac{F}{1 + B^2 + C^2}, \qquad y_0 = g - \dfrac{G}{1 + B^2 + C^2}, \\ z_0 = h - \dfrac{H}{1 + B^2 + C^2}, \end{cases}$$

nd der Abstand des Punktes fgh von der gegebenen Geraden ist

18) $$p = \frac{\sqrt{F^2 + G^2 + H^2}}{1 + B^2 + C^2}.$$

Dieser Ausdruck gestattet noch eine Zusammenziehung; bezeichnen wir nämlich zur Abkürzung die Ausdrücke

$$B(c-h)-C(b-g), \quad Bf+b-g, \quad Cf+c-h$$

der Reihe nach mit a', b', c', so dass also die Gleichungen

$$F=Bb'+Cc', \quad G=Ca'-b', \quad H=-Ba'-c'$$

statt finden, so erhalten wir zunächst

$$F^2+G^2+H^2$$
$$=b'^2+c'^2+B^2a'^2+B^2b'^2+C^2a'^2+C^2c'^2$$
$$+2(BCb'c'-Ca'b'+Ba'c');$$

der Parentheseninhalt ist, wie man leicht findet, einerlei mit

$$a'^2+B^2c'^2+C^2b'^2,$$

wodurch wir zur Gleichung

$$F^2+G^2+H^2=(1+B^2+C^2)(a'^2+b'^2+c'^2)$$

gelangen. Hiernach nimmt die Formel 18) die folgende Gestalt an

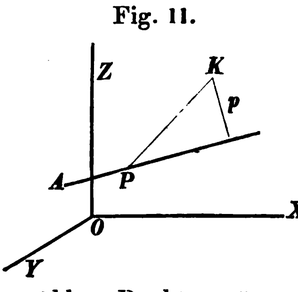
$$p=\sqrt{\frac{a'^2+b'^2+c'^2}{1+B^2+C^2}}$$

d. i. nach Wiedereinsetzung der Werthe von a', b' und c'

$$19) \quad p=\sqrt{\frac{(Bf+b-g)^2+(Cf+c-h)^2+[B(c-h)-C(b-g)]^2}{1+B^2+C^2}}.$$

Zu derselben Formel führt noch ein anderer Weg, der von dem Früheren unabhängig und dem Verfahren der descriptiven Geometrie nachgebildet ist; letztere würde nämlich den gegebenen Punkt fgh mit irgend einem Punkte P der gegebenen Geraden verbinden, die durch beide Gerade bestimmte Ebene in die Bildebene umlegen und nachher die gesuchte Senkrechte planimetrisch construiren. Dem entspricht folgende Rechnung. Die rechtwinkligen Coordinaten des auf der gegebenen Geraden willkürlich gewählten Punktes mögen x, y, z sein, wobei die Gleichungen

Fig. 11.



$$y=Bx+b, \qquad z=Cx+c$$

statt finden, die Entfernung der Punkte fgh und xyz heisse u, so bestimmen sich zunächst die Winkel, welche u mit den Achsen bildet, durch die Formeln

$$\cos(ux)=\frac{f-x}{u}, \quad \cos(uy)=\frac{g-y}{u}, \quad \cos(uz)=\frac{h-z}{u};$$

nennt man ferner die gegebene Gerade kurz s und (sx), (sy), (sz) ihre Winkel mit den Achsen, so ist

$$\cos(us) = \cos(ux)\cos(sx) + \cos(uy)\cos(sy) + \cos(uz)\cos(sz)$$

und durch Substitution der vorigen Werthe, sowie der Ausdrücke für $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$ aus §. 6 Nr. 9:

$$\cos(us) = \frac{f-x+(g-y)B+(h-z)C}{u\sqrt{1+B^2+C^2}}.$$

Weiter hat man

$$p^2 = u^2 \sin^2(us) = u^2 - [u\cos(us)]^2,$$

vermöge des obigen Werthes von $\cos(us)$ und unter Rücksicht auf die Gleichung

$$u^2 = (f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2$$

gestaltet sich die Formel für p^2 zur folgenden

$$p^2 = (f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2 - \frac{[f-x+B(g-y)+C(h-z)]^2}{1+B^2+C^2};$$

daraus wird, indem man Alles auf gleichen Nenner bringt:

$$p^2 = \frac{[B(f-x)-(g-y)]^2 + [C(f-x)-(h-z)]^2 + [B(h-z)-C(g-y)]^2}{1+B^2+C^2}.$$

Durch Substitution der für y und z angegebenen Werthe und nachherige Wurzelextraction geht diese Formel in die frühere Nr. 19) über.

Die für p entwickelten Formeln dienen auch zur Bestimmung des Abstandes zweier parallelen Geraden, deren Gleichungen

$$20)\quad \begin{cases} y = Bx + b, & z = Cx + c, \\ y = Bx + b_1, & z = Cx + c_1, \end{cases}$$

sein mögen; setzt man nämlich fest, dass der Punkt fgh auf der zweiten Geraden liegt, dass also die Gleichungen

$$g = Bf + b_1, \qquad h = Cf + c_1$$

statt finden, so ist seine Entfernung von der ersten Geraden einerlei mit dem Abstande der Parallelen von einander. Vermöge der angegebenen Werthe von g und h wird zunächst

$$21)\quad \begin{cases} F = (b-b_1)(B+C\alpha+\gamma) + (c-c_1)(C+B\alpha+\beta), \\ G = [(c-c_1)B-(b-b_1)C](C+B\alpha+\beta) - (b-b_1)(1+B\gamma+C\beta), \\ H = [(b-b_1)C-(c-c_1)B](B+C\alpha+\gamma) - (c-c_1)(1+B\gamma+C\beta), \end{cases}$$

und dann wie früher

$$22)\quad p = \frac{\sqrt{F^2+G^2+H^2+2FG\gamma+2FH\beta+2GH\alpha}}{D^2}.$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist

$$23)\quad \begin{cases} F=(b-b_1)B+(c-c_1)C, \\ G=(c-c_1)BC-(b-b_1)(1+C^2), \\ H=(b-b_1)BC-(c-c_1)(1+B^2), \end{cases}$$

und

$$24)\quad p=\frac{\sqrt{F^2+G^2+H^2}}{1+B^2+C^2}.$$

§. 13.

Senkrechte zu zwei gegebenen Geraden.

Die Gleichungen zweier gegebenen Geraden mögen sein

$$1)\quad y=B_1x+b_1,\qquad z=C_1x+c_1,$$

$$2)\quad y=B_2x+b_2,\qquad z=C_2x+c_2,$$

und die Gleichungen einer dritten Geraden, welche die beiden vorigen senkrecht schneidet,

$$3)\quad y=Mx+m,\qquad z=Nx+n;$$

zur Bestimmung der vier Unbekannten M, m, N, n haben wir dann folgende Bedingungen. Da die gesuchte Gerade mit jeder der gegebenen Geraden einen rechten Winkel bilden soll, so gelten die Gleichungen

$$4)\quad \begin{cases} (B_1+C_1\alpha+\gamma)M+(C_1+B_1\alpha+\beta)N=-(1+B_1\gamma+C_1\beta) \\ (B_2+C_2\alpha+\gamma)M+(C_2+B_2\alpha+\beta)N=-(1+B_2\gamma+C_2\beta), \end{cases}$$

worin α, β, γ wir früher die Cosinus der Coordinatenwinkel (yz), (xz), (xy) bezeichnen. Damit ferner die verlangte Gerade jede der gegebenen Gerade schneide, sind noch die zwei Bedingungen

$$5)\quad \begin{cases} (m-b_1)(N-C_1)=(n-c_1)(M-B_1) \\ (m-b_2)(N-C_2)=(n-c_2)(M-B_2) \end{cases}$$

erforderlich. Von den vier aufgestellten Gleichungen bestimmen die beiden ersten die Unbekannten M und N; setzen wir nämlich zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}=&(B_1C_2-B_2C_1)(1-\alpha^2) \\ &+(B_1-B_2)(\beta-\alpha\gamma)-(C_1-C_2)(\gamma-\alpha\beta), \\ \mathfrak{B}=&(B_1-B_2)(1-\gamma^2) \\ &+(C_1-C_2)(\alpha-\beta\gamma)+(B_1C_2-B_2C_1)(\beta-\alpha\gamma), \\ \mathfrak{C}=&(C_1-C_2)(1-\beta^2) \\ &+(B_1-B_2)(\alpha-\beta\gamma)-(B_1C_2-B_2C_1)(\gamma-\alpha\beta), \end{aligned}$$

so erhalten wir aus den Gleichungen 4) die Werthe

$$6)\quad M=\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}},\qquad N=-\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}.$$

Um zweitens m und n zu finden, substituiren wir die für M und N angegebenen Werthe in die Gleichungen 5); letztere nehmen dadurch die folgende Form an:

$$7)\begin{cases}(\mathfrak{A}C_1+\mathfrak{B})m-(\mathfrak{A}B_1-\mathfrak{C})n=b_1(\mathfrak{A}C_1+\mathfrak{B})-c_1(\mathfrak{A}B_1-\mathfrak{C}),\\(\mathfrak{A}C_2+\mathfrak{B})m-(\mathfrak{A}B_2-\mathfrak{C})n=b_2(\mathfrak{A}C_2+\mathfrak{B})-c_2(\mathfrak{A}B_2-\mathfrak{C});\end{cases}$$

die Auflösung dieser beiden Gleichungen ersten Grades hat nicht die mindeste Schwierigkeit und mag unterbleiben, weil sich die ganze Aufgabe noch auf andere Weise behandeln lässt.

Die gemeinschaftliche Normale der beiden gegebenen Geraden ist bestimmt, sobald man die Coordinaten der beiden Punkte $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ kennt, in denen sie die gegebenen Geraden schneidet; durch Verbindung der Gleichung 3) mit den Gleichungen 1) und 2) ergeben sich für jene sechs Coordinaten die Werthe:

$$8)\quad x_1=-\frac{m-b_1}{M-B_1} \text{ und zugleich } x_1=-\frac{n-c_1}{N-C_1},$$

$$9)\quad y_1=B_1x_1+b_1,\qquad z_1=C_1x_1+c_1;$$

$$10)\quad x_2=-\frac{m-b_2}{M-B_2} \text{ und zugleich } x_2=-\frac{n-c_2}{N-C_2},$$

$$11)\quad y_2=B_2x_2+b_2,\qquad z_2=C_2x_2+c_2;$$

obschon M, N, m, n, dem Vorigen zufolge, als bekannt gelten können, so würde doch die Substitution ihrer Werthe aus dem Grunde nicht unmittelbar räthlich sein, weil namentlich m und n, durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ausgedrückt, etwas complicirter Form sind; diese Weitläufigkeiten umgehen wir durch vorherige Wegschaffung von m und n. Aus der ersten Formel in Nr. 8) und der ersten Formel in Nr. 10) erhalten wir nämlich durch Elimination von m

$$(M-B_1)x_1-(M-B_2)x_2=b_1-b_2,$$

und ebenso aus den zweiten Formeln in 8) und 10) durch Elimination von n

$$(N-C_1)x_1-(N-C_2)x_2=c_1-c_2;$$

da M und N bekannt sind, so kommen in diesen Gleichungen nur die Unbekannten x_1 und x_2 vor, wir finden als deren Werthe

$$x_1=\frac{(b_1-b_2)(N-C_2)-(c_1-c_2)(M-B_2)}{(M-B_1)(N-C_2)-(M-B_2)(N-C_1)},$$

$$x_2=\frac{(b_1-b_2)(N-C_1)-(c_1-c_2)(M-B_1)}{(M-B_1)(N-C_2)-(M-B_2)(N-C_1)}.$$

Nach Entwickelung des gemeinschaftlichen Nenners und Substitution der Werthe von M und N (Nr. 6) ergeben sich für x_1 und x_2, sowie für die übrigen Coordinaten folgende Ausdrücke

$$12)\begin{cases} x_1 = -\dfrac{(b_1-b_2)(\mathfrak{A}C_2+\mathfrak{B})-(c_1-c_2)(\mathfrak{A}B_2-\mathfrak{C})}{\mathfrak{A}(B_1C_2-B_2C_1)+\mathfrak{B}(B_1-B_2)+\mathfrak{C}(C_1-C_2)}, \\ y_1 = B_1x_1+b_1, \qquad z_1 = C_1x_1+c_1; \end{cases}$$

$$13)\begin{cases} x_2 = -\dfrac{(b_1-b_2)(\mathfrak{A}C_1+\mathfrak{B})-(c_1-c_2)(\mathfrak{A}B_1-\mathfrak{C})}{\mathfrak{A}(B_1C_2-B_2C_1)+\mathfrak{B}(B_1-B_2)+\mathfrak{C}(C_1-C_2)}, \\ y_2 = B_2x_2+b_2, \qquad z_2 = C_2x_2+c_2. \end{cases}$$

Es hat nun auch keine Schwierigkeit, den Abstand der Punkte $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$, d. h. die Entfernung der beiden gegebenen Geraden, der Grösse und Lage nach zu bestimmen; es ist nämlich

$$e^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$
$$+2\alpha(y_1-y_2)(z_1-z_2)+2\beta(x_1-x_2)(z_1-z_2)+2\gamma(x_1-x_2)(y_1-y_2).$$

Da die Punkte $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$ auf der gemeinschaftlichen Normalen beider Geraden liegen, so gelten die Gleichungen

$$y_1 = Mx_1+m, \qquad z_1 = Nx_1+n,$$
$$y_2 = Mx_2+m, \qquad z_2 = Nx_2+n,$$

woraus folgt

$$14) \quad y_1-y_2 = M(x_1-x_2), \qquad z_1-z_2 = N(x_1-x_2).$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke wird

$$e^2 = (x_1-x_2)^2\left\{1+M^2+N^2+2\alpha MN+2\beta N+2\gamma M\right\};$$

hier haben wir zunächst die Werthe von M und N einzusetzen und nachher die Wurzel zu ziehen; zur Abkürzung sei

$$R^2 = \mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2-2\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{C}-2\beta\mathfrak{A}\mathfrak{B}+2\gamma\mathfrak{A}\mathfrak{C},$$

wir erhalten dann

$$15) \qquad e = \frac{x_1-x_2}{\mathfrak{A}}R.$$

Vermöge der eben angegebenen Werthe von x_1 und x_2 ist

$$x_1-x_2 = \frac{(b_1-b_2)(C_1-C_2)-(c_1-c_2)(B_1-B_2)}{\mathfrak{A}(B_1C_2-B_2C_1)+\mathfrak{B}(B_1-B_2)+\mathfrak{C}(C_1-C_2)}\mathfrak{A},$$

mithin lautet die Formel für die Entfernung der beiden Geraden

$$16) \quad e = \frac{(b_1-b_2)(C_1-C_2)-(c_1-c_2)(B_1-B_2)}{\mathfrak{A}(B_1C_2-B_2C_1)+\mathfrak{B}(B_1-B_2)+\mathfrak{C}(C_1-C_2)}R.$$

Die Richtung von e bestimmt sich, gemäss §. 5, durch die Gleichungen

$$\cos(ex) = \frac{x_1-x_2+(y_1-y_2)\gamma+(z_1-z_2)\beta}{e},$$

$$\cos(ey) = \frac{y_1-y_2+(z_1-z_2)\alpha+(x_1-x_2)\gamma}{e},$$

$$\cos(ez) = \frac{z_1-z_2+(x_1-x_2)\beta+(y_1-y_2)\alpha}{e};$$

in diesen haben wir zunächst $y_1 - y_2$ und $z_1 - z_2$ durch M, N, $x_1 - x_2$ auszudrücken (Nr. 14) und gleichzeitig für M und N ihre Werthe zu setzen; dies giebt

$$cos\,(ex) = \frac{x_1 - x_2}{\mathfrak{A} e}(\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\gamma - \mathfrak{B}\beta),$$

$$cos\,(ey) = \frac{x_1 - x_2}{\mathfrak{A} e}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B}\alpha + \mathfrak{A}\gamma),$$

$$coa\,(ez) = \frac{x_1 - x_2}{\mathfrak{A} e}(-\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\beta + \mathfrak{C}\alpha),$$

oder endlich vermöge des aus Nr. 15) genommenen Werthes von e

$$17)\quad \begin{cases} cos\,(ex) = \dfrac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\gamma}{R}, \\ cos\,(ey) = \dfrac{\mathfrak{A}\gamma - \mathfrak{B}\alpha + \mathfrak{C}}{R}, \\ cos\,(ez) = \dfrac{\mathfrak{A}\beta - \mathfrak{B} + \mathfrak{C}\alpha}{R}. \end{cases}$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem erhalten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die einfachen Werthe

$$\mathfrak{A} = B_1 C_2 - B_2 C_1, \quad \mathfrak{B} = B_1 - B_2, \quad \mathfrak{C} = C_1 - C_2;$$

ferner ist

$$R^2 = (B_1 C_2 - B_2 C_1)^2 + (B_1 - B_2)^2 + (C_1 - C_2)^2$$
$$= \mathfrak{A}(B_1 C_2 - B_2 C_1) + \mathfrak{B}(B_1 - B_2) + \mathfrak{C}(C_1 - C_2),$$

aus den Formeln 16) und 17) werden dann die folgenden:

$$18)\quad e = \frac{(b_1 - b_2)(C_1 - C_2) - (c_1 - c_2)(B_1 - B_2)}{\sqrt{(B_1 C_2 - B_2 C_1)^2 + (B_1 - B_2)^2 + (C_1 - C_2)^2}},$$

$$19)\quad \begin{cases} cos\,(ex) = \dfrac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{\sqrt{(B_1 C_2 - B_2 C_1)^2 + (B_1 - B_2)^2 + (C_1 - C_2)^2}}, \\ cos\,(ey) = \dfrac{C_1 - C_2}{\sqrt{(B_1 C_2 - B_2 C_1)^2 + (B_1 - B_2)^2 + (C_1 - C_2)^2}}, \\ cos\,(ez) = \dfrac{-(B_1 - B_2)}{\sqrt{(B_1 C_2 - B_2 C_1)^2 + (B_1 - B_2)^2 + (C_1 - C_2)^2}}. \end{cases}$$

Im Fall sich beide Geraden schneiden, ist

$$(b_1 - b_2)(C_1 - C_2) = (c_1 - c_2)(B_1 - B_2)$$

und mithin $e = 0$, wie es sein muss; die Formeln 17) oder 19) bestimmen dann die Richtung derjenigen Geraden, welche auf der Ebene der beiden sich schneidenden Geraden senkrecht steht.

Drittes Capitel.

Die ebene Fläche.

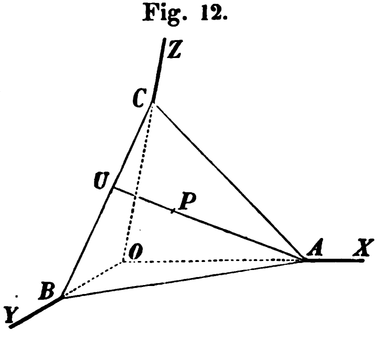
§. 14.

Die Gleichung der Ebene.

Wenn zwischen den drei Coordinaten eines Punktes nur eine Gleichung besteht, so darf man zwei der Grössen x, y, z willkürlich wählen, und die vorhandene Gleichung liefert dann von selbst die dritte, d. h. geometrisch, der Punkt P im Raume ist bestimmt, so bald eine seiner Projectionen willkürlich angenommen wird. Ertheilen wir nun z. B. den Coordinaten x und y alle möglichen Werthe, so betritt die xy-Projection P' alle möglichen Stellen der xy-Ebene, diesen entsprechen successive Lagen des Punktes P, die in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine gewisse Fläche bilden. Demnach wird eine Fläche im Allgemeinen durch eine Gleichung charakterisirt, welche zwischen den drei Coordinaten jedes ihrer Punkte besteht und eben deshalb die Gleichung der Fläche heisst. Die einfachste Fläche ist die Ebene, zu ihrer Gleichung gelangt man auf folgendem Wege.

Eine beliebige Ebene schneidet im Allgemeinen jede der drei Coordinatenachsen und ist ihrer Lage nach durch die Strecken OA, OB, OC bestimmt, welche sie auf den Achsen abgrenzt; man kann sich nämlich, wenn die Punkte A, B, C gegeben sind, die Ebene dadurch entstanden denken, dass eine veränderliche Gerade AU sich um den Punkt A dreht und zugleich an der Geraden BC hingleitet.

Fig. 12.



Sind nun x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der beweglichen Geraden, also auch der Ebene ABC, und setzen wir ferner $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, so sind

$$y = M(x - a) \quad \text{und} \quad z = N(x - a)$$

die Gleichungen der Geraden AU. Für die Coordinaten v und w ihrer yz-Spur, d. h. des Punktes U, erhalten wir daraus

$$v = -Ma = \frac{y}{a - x}a, \qquad w = -Na = \frac{z}{a - x}a;$$

da U auf der Geraden BC liegen muss, so ist bekanntlich

$$\frac{v}{b} + \frac{w}{c} = 1$$

mithin durch Substitution der Werthe von v und w

$$1) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, welche von den Coordinatenachsen die Strecken a, b, c abschneidet, wobei stillschweigend vorausgesetzt wird, dass keiner dieser Abschnitte der Null gleich ist, dass also die Ebene nicht durch den Coordinatenanfang geht.

Schafft man aus der obigen Gleichung die Brüche weg, so erhält man eine neue Gleichung von der Form

$$2) \qquad Ax + By + Cz = D,$$

von welcher auch direct gezeigt werden kann, dass sie eine Ebene charakterisirt. Es bedarf hierzu nur des Nachweises, dass eine Gerade, welche zwei Punkte mit der durch vorstehende Gleichung bestimmten Fläche gemein hat, ganz in sie hinein fällt. Für zwei auf der Fläche liegende Punkte $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ hat man zunächst

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = D,$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 = D,$$

aus welchen Gleichungen die nachstehenden folgen:

$$3) \quad \begin{cases} A + B\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + C\dfrac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} = 0, \\ \dfrac{B(x_2 y_1 - x_1 y_2) + C(x_2 z_1 - x_1 z_2)}{x_2 - x_1} = D; \end{cases}$$

verbindet man ferner die Punkte $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ durch eine Gerade, so gelten für irgend einen dritten Punkt $x_3 y_3 z_3$ derselben die Gleichungen (§. 7, Nr. 5)

$$y_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_3 + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

$$z_3 = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} x_3 + \frac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{x_2 - x_1}$$

und man zieht daraus die Relation

$$A x_3 + B y_3 + C z_3 = \left(A + B \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + C \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}\right) x_3$$
$$+ \frac{B(x_2 y_1 - x_1 y_2) + C(x_2 z_1 - x_1 z_2)}{x_2 - x_1}$$

d. i. unter Rücksicht auf die Gleichungen 3)

$$A x_3 + B y_3 + C z_3 = D.$$

Jeder beliebige Punkt $x_3 y_3 z_3$ der von $x_1 y_1 z_1$ nach $x_2 y_2 z_2$ gehenden Geraden liegt demnach auf derselben Fläche, wie jene zwei Punkte, d. h. die Verbindungsgerade irgend zweier Punkte der Fläche fällt ganz in die letztere, was bei der Ebene und nur bei dieser statt findet.

Setzt man in Nr. 2) eine der Coordinaten x, y, z gleich Null, so wird daraus eine Gleichung zwischen den Coordinaten solcher Punkte, die gleichzeitig der Ebene und einer der Coordinatenebenen angehören; man erhält so die Gleichungen derjenigen Geraden, in welchen die Ebene die Coordinatenebenen schneidet, d. i. die Gleichungen der sogenannten Spuren der Ebene. Sie lauten der Reihe nach für die xy, xz und yz-Spur:

4) $\quad Ax + By = D, \quad Ax + Cz = D, \quad By + Cz = D,$

zwei von diesen drei Spuren bestimmen die Ebene gleichfalls, weil hierdurch die vier Grössen A, B, C, D bekannt werden*).

Lässt man in der Gleichung der Ebene zwei Coordinaten zu Null werden, so erhält man ihren Durchschnitt mit einer der Coordinatenachsen; für $y = 0$ und $z = 0$ ergiebt sich z. B.

---

*) Die descriptive Geometrie, welche ihrer Natur nach Punkte im Raume nicht unmittelbar auffassen kann, benutzt die Spuren der Ebene zur graphischen Darstellung der letzteren; will man daher eine Construction der descriptiven Geometrie mittelst der Rechnung verfolgen (z. B. um die Uebereinstimmung zwischen der descriptiven und analytischen Behandlung einer Aufgabe nachzuweisen), so hat man jede vorkommende Ebene nicht durch eine Gleichung von der Form

$$Ax + By + Cz = D,$$

sondern durch zwei Spurengleichungen, etwa

$$Ax + By = D \text{ und } Ax + Cz = D$$

auszudrücken. Diese Modification des Calcüls ist übrigens so leicht, dass es dazu keiner Beispiele bedürfen wird.

$$Ax = D \text{ oder } x = \frac{D}{A}$$

nd hier ist $\frac{D}{A}$ die Strecke, welche die Ebene von der x-Achse

bschneidet. In ähnlicher Weise sind $\frac{D}{B}$ und $\frac{D}{C}$ die Abschnitte

ıf den Achsen der y und z, wie man auch durch Vergleichung it Nr. 1) bestätigen kann.

Diese allgemeinen Ergebnisse erleiden unter Umständen einige odificationen. Ist keine der Grössen A, B, C, D gleich Null, so ınn die Gleichung 2) durch D dividirt und unter der etwas eincheren Form

5) $$A'x + B'y + C'z = 1$$

ırgestellt werden; die Gleichungen der Spuren lauten dann

6) $$A'x + B'y = 1, \quad A'x + C'z = 1, \quad B'y + C'z = 1,$$

ıd die auf den Achsen gebildeten Abschnitte sind die reciproken 'erthe von A', B', C'. Verschwindet eine der Grössen A, B, C, D ıd zwar zunächst D, so geht die zur Gleichung

$$Ax + By + Cz = 0$$

ıhörende Ebene durch den Anfangspunkt der Coordinaten, weil e Werthe $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ der Gleichung genügen; nicht lten giebt man in diesem Falle der Gleichung die Form

7) $$z = A''x + B''y.$$

t $C = 0$, so wird aus der allgemeinen Gleichung die folgende

$$Ax + By = D, \quad (z \text{ beliebig})$$

ler

$$A'x + B'y = 1;$$

ır auf der z-Achse gebildete Abschnitt hat die Grösse $\frac{D}{0} = \infty$

ıd mithin ist die Ebene parallel zur Achse der z; für $B = 0$ erılt man entsprechend eine Ebene parallel zur y-Achse, für $A = 0$ ne Parallelebene zur x-Achse. In dem Falle, wo die zwei Coefıienten C und D verschwinden, wird die Gleichung

$$Ax + By = 0$$

ırch $x = 0$, $y = 0$, sowie durch jedes beliebige z befriedigt, oraus folgt, dass die Ebene die z-Achse in sich enthält. Liegt agegen die y-Achse in der Ebene, so lautet die Gleichung der ıtzteren ($B = 0$, $D = 0$)

$$Ax + Cz = 0,$$

enthält sie die x-Achse, so ist $A = 0$ und $D = 0$, mithin

$$By + Cz = 0.$$

Sind zwei der Coëfficienten A, B, C gleich Null, wie z. B. in

$$Ax = D,$$

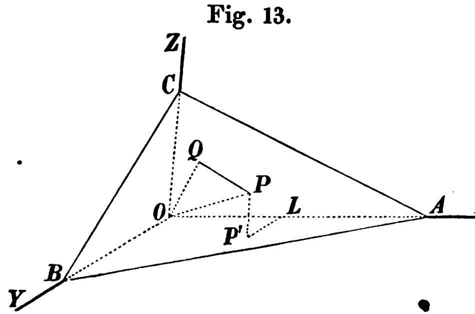
so bleiben y und z beliebig, mithin ist die Ebene parallel der yz-Ebene und von ihr entfernt um $\frac{D}{A}$; in gleicher Weise würden

$$By = D, \qquad Cz = D$$

Parallelebenen zu den Ebenen xz, resp. xy bedeuten. Für $D = 0$ reduciren sich die letzten drei Gleichungen auf $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und charakterisiren der Reihe nach die Coordinatenebenen yz, xz, xy.

Sowie jede Gerade eine bestimmte Richtung hat, welche durch die Winkel zwischen ihr und den Coordinatenachsen fixirt wird, so kann auch jeder Ebene eine bestimmte Stellung zugeschrieben werden, und zwar ergiebt sich diese aus der Richtung einer auf der Ebene errichteten Senkrechten. Bezeichnen wir mit p das Perpendikel OQ vom Coordinatenanfang auf die Ebene ABC (die Entfernung jenes Punktes von dieser Ebene), so ist es passend, die Winkel (px), (py), (pz) die Stellungswinkel der Ebene zu nennen; sie können auf folgende Weise aus der Gleichung derselben abgeleitet werden. Wo auch der Punkt P auf der Ebene ABC liegen möge, so fällt seine rechtwinklige Projection auf die Normale OQ doch immer nach Q, demgemäss ist p die rechtwinklige Projection des Radiusvector OP, statt dessen auch die gebrochene Linie $OLP'P$ auf OQ projicirt werden kann; man hat daher die Beziehung

Fig. 13.



$$p = x \cos(px) + y \cos(py) + z \cos(pz)$$

oder auch durch Division mit p und umgekehrte Anordnung

$$\frac{\cos(px)}{p} x + \frac{\cos(py)}{p} y + \frac{\cos(pz)}{p} z = 1.$$

Der Vergleich zwischen dieser und der früheren Gleichung

$$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z = 1$$

liefert die Relationen

8) $$\frac{\cos(px)}{p} = \frac{A}{D}, \quad \frac{\cos(py)}{p} = \frac{B}{D}, \quad \frac{\cos(pz)}{p} = \frac{C}{D},$$

die man auch unmittelbar durch Betrachtung der rechtwinkligen Dreiecke AQO, BQO, CQO erhalten kann. Die vorstehenden drei Gleichungen enthalten die vier Unbekannten p, $\cos(px)$, $\cos(py)$, $\cos(pz)$, von denen die drei letzteren für den Augenblick kurz ξ, η, ζ heissen mögen; dazu gesellt sich als vierte Gleichung die zwischen drei Richtungswinkeln jederzeit bestehende Relation (§. 4 Nr. 7)

9) $$\begin{cases} (1-\alpha^2)\xi^2 + (1-\beta^2)\eta^2 + (1-\gamma^2)\zeta^2 \\ -2(\alpha-\beta\gamma)\eta\zeta - 2(\beta-\alpha\gamma)\xi\zeta - 2(\gamma-\alpha\beta)\xi\eta \\ = 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2, \end{cases}$$

worin α, β, γ die Cosinus der Coordinatenwinkel yz, xz, xy bedeuten. Mittelst der Gleichungen 8) kann man ξ, η, ζ durch p ausdrücken, diese Werthe in Nr. 9) substituiren, daraus p und nachher ξ, η, ζ bestimmen; setzt man zur Abkürzung

10) $$\delta^2 = 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2,$$

11) $$\begin{cases} E^2 = (1-\alpha^2)A^2 + (1-\beta^2)B^2 + (1-\gamma^2)C^2 \\ \quad -2(\alpha-\beta\gamma)BC - 2(\beta-\alpha\gamma)AC - 2(\gamma-\alpha\beta)AB, \end{cases}$$

so sind die Ergebnisse der angedeuteten leichten Rechnung:

12) $$\begin{cases} p = \frac{D\delta}{E}, \\ \cos(px) = \frac{A\delta}{E}, \quad \cos(py) = \frac{B\delta}{E}, \quad \cos(pz) = \frac{C\delta}{E}. \end{cases}$$

Nicht überflüssig ist es, die speciellen Formeln für die Fälle anzumerken, wo die beliebige Ebene einer der Coordinatenebenen parallel liegt. Ist erstens die Ebene parallel der yz-Ebene, also

$$x = a$$

ihre Gleichung, so haben wir $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = a$, folglich, wenn wir die Senkrechte p in diesem Falle mit p_x bezeichnen,

13) $$p_x = \frac{a\delta}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad \cos(p_x x) = \frac{\delta}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad \cos(p_x y) = 0, \quad \cos(p_x z) = 0.$$

Auf ähnliche Weise finden wir, wenn die Ebene parallel zur xz-Ebene also ihre Gleichung

$$y = b$$

ist und p_y ihren Abstand vom Coordinatenanfang bezeichnet,

$$14)\quad p_y = \frac{b\delta}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad cos(p_y x) = 0,\quad cos(p_y y) = \frac{\delta}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad cos(p_y z) = 0;$$

endlich für den dritten Fall, wo die Ebene parallel zur xy-Ebene liegt, ihre Gleichung

$$z = c$$

und p_z ihre Entfernung vom Coordinatenanfang ist,

$$15)\quad p_z = \frac{c\delta}{\sqrt{1-\gamma^2}},\quad cos(p_z x) = 0,\quad cos(p_z y) = 0,\quad cos(p_z z) = \frac{\delta}{\sqrt{1-\gamma^2}}.$$

In Verbindung mit Nr. 12) führen die Gleichungen 13), 14) und 15) zur Kenntniss der Neigungswinkel einer beliebigen Ebene gegen die Coordinatenebenen. Bezeichnen wir die Neigungswinkel der Ebene 2) gegen die Ebenen yz, xz und xy der Reihe nach mit Θ_x, Θ_y, Θ_z, so ist Θ_x einerlei mit dem Winkel zwischen den auf jenen Ebenen senkrechten Geraden p und p_x, überhaupt

$$\Theta_x = \angle(pp_x),\qquad \Theta_y = \angle(pp_y),\qquad \Theta_z = \angle(pp_z);$$

man findet nun $cos\,\Theta_x = cos\,(pp_x)$ nach Formel 5) in §. 5 mittelst der Substitutionen $r = p$, $r_1 = p_x$,

$$\xi = cos\,(px),\qquad \eta = cos\,(py),\qquad \zeta = cos\,(pz),$$
$$\xi_1 = cos\,(p_x x),\qquad \eta_1 = cos\,(p_x y),\qquad \zeta_1 = cos\,(p_x z),$$

wobei gleichzeitig die Werthe der rechter Hand stehenden Cosinus den Gleichungen 12) und 13) zu entnehmen sind. Auf analoge Weise bestimmen sich $cos\,\Theta_y$ und $cos\,\Theta_z$, überhaupt gelangt man durch die angedeutete leichte Rechnung zu den folgenden Formeln

$$16)\quad \begin{cases} cos\,\Theta_x = \dfrac{A(1-\alpha^2) - B(\gamma-\alpha\beta) - C(\beta-\alpha\gamma)}{E\sqrt{1-\alpha^2}}, \\[2ex] cos\,\Theta_y = \dfrac{B(1-\beta^2) - C(\alpha-\beta\gamma) - A(\gamma-\alpha\beta)}{E\sqrt{1-\beta^2}}, \\[2ex] cos\,\Theta_z = \dfrac{C(1-\gamma^2) - A(\beta-\alpha\gamma) - B(\alpha-\beta\gamma)}{E\sqrt{1-\gamma^2}}. \end{cases}$$

Bei einem rechtwinkligen Coordinatensysteme sind die Stellungswinkel (px), (py), (pz) identisch mit den Neigungswinkeln Θ_x, Θ_y, Θ_z, und es ist dann

$$17)\qquad p = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$18)\quad \begin{cases} \cos(px) = \cos\Theta_x = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos(py) = \cos\Theta_y = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos(pz) = \cos\Theta_z = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{cases}$$

§. 15.

Bestimmung der Ebene durch drei Punkte.

Wenn eine Ebene, deren Gleichung

$$1)\quad A'x + B'y + C'z = 1$$

sein möge, durch drei gegebene Punkte $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$, $f_3 g_3 h_3$ gehen soll, so muss ihre Gleichung von den Coordinaten der genannten Punkte befriedigt werden; man hat daher zur Bestimmung von A', B', C' die drei Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} A'f_1 + B'g_1 + C'h_1 = 1, \\ A'f_2 + B'g_2 + C'h_2 = 1, \\ A'f_3 + B'g_3 + C'h_3 = 1. \end{cases}$$

Durch Auflösung derselben erhält man für A', B', C' folgende Werthe

$$A' = \frac{(g_2h_3 - g_3h_2) + (g_3h_1 - g_1h_3) + (g_1h_2 - g_2h_1)}{f_1(g_2h_3 - g_3h_2) + f_2(g_3h_1 - g_1h_3) + f_3(g_1h_2 - g_2h_1)},$$

$$B' = \frac{(h_2f_3 - h_3f_2) + (h_3f_1 - h_1f_3) + (h_1f_2 - h_2f_1)}{g_1(h_2f_3 - h_3f_2) + g_2(h_3f_1 - h_1f_3) + g_3(h_1f_2 - h_2f_1)},$$

$$C' = \frac{(f_2g_3 - f_3g_2) + (f_3g_1 - f_1g_3) + (f_1g_2 - f_2g_1)}{h_1(f_2g_3 - f_3g_2) + h_2(f_3g_1 - f_1g_3) + h_3(f_1g_2 - f_2g_1)};$$

die Nenner dieser drei Brüche sind gleich und hier nur in verschiedenen Formen angegeben worden, um die regelmässige Bildung der Ausdrücke hervortreten zu lassen. Durch Substitution der obigen Werthe in die Gleichung 1) und bei Wegschaffung der Brüche ergiebt sich nun als Gleichung der verlangten Ebene:

$$3)\quad \begin{cases} [(g_2h_3 - g_3h_2) + (g_3h_1 - g_1h_3) + (g_1h_2 - g_2h_1)]\,x \\ + [(h_2f_3 - h_3f_2) + (h_3f_1 - h_1f_3) + (h_1f_2 - h_2f_1)]\,y \\ + [(f_2g_3 - f_3g_2) + (f_3g_1 - f_1g_3) + (f_1g_2 - f_2g_1)]\,z \\ = f_1(g_2h_3 - g_3h_2) + f_2(g_3h_1 - g_1h_3) + f_3(g_1h_2 - g_2h_1). \end{cases}$$

In speciellen Fällen vereinfacht sich diese Gleichung oft bedeutend; ist z. B. $f_3 = g_3 = h_3 = 0$, so bleibt

$$4)\quad (g_1 h_2 - g_2 h_1) x + (h_1 f_2 - h_2 f_1) y + (f_1 g_2 - f_2 g_1) z = 0$$

als Gleichung der Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten und ausserdem durch die Punkte $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$ geht. Für $g_1 = h_1 = f_2 = h_2 = f_3 = g_3 = 0$ ergiebt sich

$$g_2 h_3 x + h_3 f_1 y + f_1 g_2 z = f_1 g_2 h_3$$

oder

$$\frac{x}{f_1} + \frac{y}{g_2} + \frac{z}{h_3} = 1$$

als Gleichung einer Ebene, welche auf den Coordinatenachsen der Reihe nach die Strecken f_1, g_2, h_3 abschneidet; dieses Resultat stimmt in der Hauptsache mit der Gleichung 1) des vorigen Paragraphen überein.

Wenn die Punkte $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$ und $f_3 g_3 h_3$ in einer Geraden liegen, so sind unendlich viel Ebenen durch dieselben möglich; dies zeigen auch die Gleichungen 2), sobald man ihnen die folgenden Formen ertheilt

$$A' f_1 + B' g_1 + C' h_1 = 1,$$

$$A' + B' \frac{g_3 - g_1}{f_3 - f_1} + C' \frac{h_3 - h_1}{f_3 - f_1} = 0,$$

$$A' + B' \frac{g_3 - g_2}{f_3 - f_2} + C' \frac{h_3 - h_2}{f_3 - f_2} = 0.$$

Unter der gemachten Voraussetzung ist nämlich nach §. 7 Gleichung 7)

$$\frac{g_3 - g_1}{f_3 - f_1} = \frac{g_3 - g_2}{f_3 - f_2}, \qquad \frac{h_3 - h_1}{f_3 - f_1} = \frac{h_3 - h_2}{f_3 - f_2},$$

die beiden letzten der obigen Gleichungen werden jetzt identisch und man hat nur noch zwei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten A', B', C'.

Die Gleichung 3) lehrt auch die Bedingung kennen, unter welcher vier gegebene Punkte $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$, $f_3 g_3 h_3$, $f_4 g_4 h_4$ in einer Ebene liegen. Dazu ist nämlich erforderlich, dass der vierte Punkt in der Ebene liegt, welche durch die ersten drei Punkte bestimmt wird; die gesuchte Bedingung lautet demnach:

$$5)\quad \begin{cases} [(g_2 h_3 - g_3 h_2) + (g_3 h_1 - g_1 h_3) + (g_1 h_2 - g_2 h_1)] f_4 \\ + [(h_2 f_3 - h_3 f_2) + (h_3 f_1 - h_1 f_3) + (h_1 f_2 - h_2 f_1)] g_4 \\ + [(f_2 g_3 - f_3 g_2) + (f_3 g_1 - f_1 g_3) + (f_1 g_2 - f_2 g_1)] h_4 \\ = f_1 (g_2 h_3 - g_3 h_2) + f_2 (g_3 h_1 - g_1 h_3) + f_3 (g_1 h_2 - g_2 h_1). \end{cases}$$

§. 16.

Verschiedene Lagen eines Punktes gegen eine Ebene.

Wenn ein Punkt xyz auf der durch die gegebenen Grössen , B, C, D bestimmten Ebene liegt, so ist

$$1)\quad Ax + By + Cz = D \text{ oder } D - (Ax + By + Cz) = 0,$$

ɜi jeder anderen Lage des Punktes kann diese Gleichung nicht ehr bestehen und es muss folglich für einen ausserhalb der Ebene ɛfindlichen Punkt xyz die Differenz

$$D - (Ax + By + Cz)$$

nen von Null verschiedenen positiven oder negativen Werth be- ;zen. Um zu entscheiden, in welchen Fällen das positive und in ɜlchen das negative Zeichen zum Vorschein kommt, stellen wir e folgende Betrachtung an.

Ausserhalb der durch die Gleichung 1) repräsentirten Ebene ɪnken wir uns zwei beliebige Punkte P_1, P_2 und diese durch eine erade verbunden; nennen wir $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ die Coordinaten ner Punkte, so sind nach §. 7 II. die Gleichungen der Verbin- ɪngslinie

$$2)\quad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1},\quad z = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{x_2 - x_1}.$$

iese Gerade schneidet die Ebene in einem Punkte P_0, dessen ɔordinaten $x_0 y_0 z_0$ durch die Bemerkung gefunden werden, dass ɪr Punkt P_0 gleichzeitig der Ebene und der Geraden angehört, ,ss folglich seine Coordinaten jeder der drei. Gleichungen 1) und genügen müssen; schreiben wir also in den letzteren x_0, y_0, z_0 r x, y, z, so haben wir drei Gleichungen zur Bestimmung der ei Unbekannten x_0, y_0, z_0; für die erste, die zu unserem Zwecke lein nöthig ist, erhalten wir

$$3)\quad x_0 = \frac{D(x_2 - x_1) - B(x_2 y_1 - x_1 y_2) - C(x_2 z_1 - x_1 z_2)}{A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1)}.$$

insichtlich der Lage von P_0 zu P_1 und P_2 sind nun zwei Fälle ɔglich; befinden sich nämlich P_1 und P_2 auf einer und derselben ɪite der Ebene, so liegt P_0 ausserhalb der Strecke $P_1 P_2$, lie- n aber P_1 und P_2 auf entgegengesetzten Seiten der Ebene, so llt P_0 zwischen die Punkte P_1 und P_2. Ganz Dasselbe gilt von n Projectionen der Punkte auf eine der Coordinatenachsen. ählen wir zu letzterer die x-Achse, nennen der Reihe nach L_0, , L_2 die Projectionen von P_0, P_1, P_2 auf OX, so ist $OL_0 = x_0$,

$OL_1 = x_1$, $OL_2 = x_2$; bei der ersten (gleichstimmigen) Lage von P_1 und P_2, also auch von L_1 und L_2, haben die Strecken $L_0 L_1 = x_0 - x_1$ und $L_0 L_2 = x_0 - x_2$ gleiche Vorzeichen, bei der zweiten Lage entgegengesetzte Vorzeichen, und es folgt daraus, dass das Product

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$$

im ersten Falle positiv, im zweiten negativ ist. Ebenso leicht bewahrheitet sich der umgekehrte Satz, dass das positive Vorzeichen des vorstehenden Productes die gleichstimmige, das negative die entgegengesetzte Lage der Punkte P_1 und P_2 bedingt. Vermöge des vorhin angegebenen Werthes von x_0 findet man nun, wenn zur Abkürzung

$$A + B\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + C\frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} = N$$

gesetzt wird,

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = \frac{(D - Ax_1 - By_1 - Cz_1)(D - Ax_2 - By_2 - Cz_2)}{N^2}$$

und daraus ergiebt sich, dass das im Zähler stehende Product positiv oder negativ ist, je nach dem die Punkte $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ auf gleichen oder verschiedenen Seiten der Ebene liegen. Demzufolge haben die beiden Ausdrücke

$$D - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) \text{ und } D - (Ax_2 + By_2 + Cz_2)$$

im ersten Falle gleiche, im zweiten entgegengesetzte Vorzeichen. Um auch über letzteres unzweideutig zu entscheiden, wollen wir die in der Gleichung der Ebene vorkommende Grösse D immer als positiv betrachten, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit jederzeit möglich ist, weil im Falle eines negativen D die Gleichung 1) mit (-1) multiplicirt werden kann; für den Anfangspunkt der Coordinaten, als Punkt $x_1 y_1 z_1$ genommen, haben wir dann $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, mithin

$$D - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = D, \text{ d. h. positiv,}$$

besitzt nun der dem zweiten Punkte $x_2 y_2 z_2$ entsprechende Ausdruck

$$D - (Ax_2 + By_2 + Cz_2)$$

dasselbe, also positive Vorzeichen, so liegt der Punkt $x_2 y_2 z_2$ auf derselben Seite der Ebene, wie der Coordinatenanfang, ist aber die obige Differenz negativ, so fällt der Punkt $x_2 y_2 z_2$ auf die entgegengesetzte Seite. Bei Weglassung der ferner nicht nöthigen Indices können wir das Endresultat in dem Satze zusammenfassen: je nach dem der Ausdruck

$$D-(Ax+By+Cz),$$

worin D als wesentlich positiv angesehen wird, positiv, gleich Null oder negativ ist, liegt der Punkt xyz ausserhalb der durch die Gleichung

$$Ax+By+Cz=D$$

charakterisirten Ebene auf der Seite des Coordinatenanfanges, oder in der Ebene selbst, oder ausser ihr auf der dem Coordinatenanfang entgegengesetzten Seite.

§. 17.

Die Gerade in der Ebene.

Um zu entscheiden, ob eine gegebene Gerade in einer gleichfalls gegebenen Ebene liegt oder nicht, bedarf es nur der Untersuchung, ob irgend zwei Punkte der Geraden in die Ebene fallen oder nicht; bei der Willkürlichkeit dieser Punkte kann man sich jene Untersuchung dadurch erleichtern, dass man die Spuren der Geraden betrachtet; jenachdem dieselben in die Spuren der Ebene fallen oder nicht, liegt die Gerade in der Ebene oder ausser ihr. Ist nun

$$1)\qquad Ax+By+Cz=D$$

die Gleichung der Ebene, so sind der Reihe nach

$$Ax+By=D, \qquad Ax+Cz=D,$$
$$By+Cz=D$$

die Gleichungen ihrer xy, xz und yz-Spur; bezeichnen wir ferner mit

$$2)\qquad y=B_1x+b_1, \qquad z=C_1x+c_1$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, so haben wir als Coordinaten ihrer in gleicher Ordnung genommenen Spuren

$$x'=-\frac{c_1}{C_1}, \quad y'=b_1-\frac{B_1c_1}{C_1}; \quad x''=-\frac{b_1}{B_1}, \quad z''=c_1-\frac{C_1b_1}{B_1};$$
$$y'''=b_1, \qquad z'''=c_1.$$

Der Punkt $x'y'$ liegt nun in der xy-Spur der Ebene, wenn

$$3)\qquad -A\frac{c_1}{C_1}+B\left(b_1-\frac{B_1c_1}{C_1}\right)=D,$$

ferner liegt $x''z''$ in der xz-Spur der Ebene, wenn

$$4)\qquad -A\frac{b_1}{B_1}+C\left(c_1-\frac{C_1b_1}{B_1}\right)=D,$$

endlich $y'''z'''$ in der yz-Spur der Ebene, wenn

$$5)\qquad Bb_1+Cc_1=D.$$

Finden von diesen Gleichungen zwei statt, so ist die Gerade in der Ebene enthalten und die dritte Gleichung eine Folge der beiden anderen. Durch Subtraction der Gleichung 4) von 5) ergiebt sich noch

6) $$A + BB_1 + CC_1 = 0$$

und diese Gleichung kann in Verbindung mit Nr. 5) zum Ersatz für die früheren Gleichungen dienen; durch Elimination von C aus 5) und 6) erhält man nämlich die Gleichung 3), durch Elimination von B die Gleichung 4). Die Gleichungen 5) und 6) enthalten demnach die Bedingungen, unter welchen die Gerade in der Ebene liegt.

Dasselbe Resultat kann man leicht auf rein analytischem Wege finden; jeder Punkt der Geraden muss nämlich ein Punkt der Ebene sein, es ist folglich erlaubt, die Werthe von y und z aus Nr. 2) in Nr. 1) zu substituiren, die letztere Gleichung erhält dadurch die Form

$$(A + BB_1 + CC_1)x + Bb_1 + Cc_1 = D$$

und sie muss nun für alle x gelten; dies ist aber nur möglich für

7) $$A + BB_1 + CC_1 = 0 \text{ und } Bb_1 + Cc_1 = D,$$

welche Bedingungen mit den früheren übereinstimmen.

Hieran knüpfen sich einige Aufgaben, betreffend die Bestimmung solcher Ebenen, die eine oder zwei gegebene Gerade enthalten sollen.

α. Ebene durch einen Punkt und eine gegebene Gerade. Sind f, g, h die Coordinaten des gegebenen Punktes,

8) $$y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, endlich

9) $$A'x + B'y + C'z = 1$$

die Gleichung der verlangten Ebene, so hat man zur Bestimmung von A', B', C' die drei Gleichungen

$$A'f + B'g + C'h = 1,$$
$$A' + B'B_1 + C'C_1 = 0, \qquad B'b_1 + C'c_1 = 1$$

aus denen jene Unbekannten leicht zu entwickeln sind. Etwas kürzer ist folgender Weg; man subtrahirt die erste der Bedingungsgleichungen von der Gleichung der Ebene (Nr. 9), dividirt überall mit A' und setzt zur Abkürzung

$$\frac{B'}{A'} = M, \quad \frac{C'}{A'} = N,$$

die Gleichung der gesuchten Ebene ist dann

$$10)\qquad x - f + M(y-g) + N(z-h) = 0.$$

Durch Division mit A' ergiebt sich ferner aus der zweiten Bedingung die folgende

$$B_1 M + C_1 N = -1;$$

subtrahirt man endlich die erste Bedingungsgleichung von der letzten und dividirt wiederum durch A', so ist

$$(b_1 - g) M + (c_1 - h) N = f.$$

Die letzten zwei Gleichungen bestimmen M und N; nach Wegschaffung der Brüche erhält man aus Nr. 10)

$$11)\quad \begin{cases} [B_1(c_1-h) - C_1(b_1-g)](x-f) \\ -(C_1 f + c_1 - h)(y-g) + (B_1 f + b_1 - g)(z-h) = 0 \end{cases}$$

als Gleichung der gesuchten Ebene. Liegt der Punkt fgh in der gegebenen Geraden, ist also gleichzeitig

$$g = B_1 f + b_1, \qquad h = C_1 f + c_1$$

so werden die beiden für M und N angegebenen Gleichungen identisch und es bleibt daher eine dieser Grössen willkürlich, wie es die in diesem Falle vorhandene Unbestimmtheit der Aufgabe erfordert.

β. Ebene durch zwei Gerade. Wenn eine Ebene, deren Gleichung

$$12)\qquad A'x + B'y + C'z = 1$$

heissen möge, zwei durch die Gleichungen

$$13)\qquad \begin{cases} y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1, \\ y = B_2 x + b_2, & z = C_2 x + c_2, \end{cases}$$

gegebene Gerade in sich enthalten soll, so müssen die Coefficienten A', B', C' den folgenden vier Gleichungen genügen

$$A' + B_1 B' + C_1 C' = 0, \qquad b_1 B' + c_1 C' = 1,$$
$$A' + B_2 B' + C_2 C' = 0, \qquad b_2 B' + c_2 C' = 1.$$

Man kann hier zunächst B' und C' aus denjenigen zwei Gleichungen bestimmen, in denen A' nicht vorkommt und findet:

$$B' = -\frac{c_1 - c_2}{b_1 c_2 - b_2 c_1}, \qquad C' = +\frac{b_1 - b_2}{b_1 c_2 - b_2 c_1};$$

die beiden übrigen Gleichungen liefern nachher zwei Werthe von A', nämlich:

$$A' = \frac{B_1(c_1 - c_2) - C_1(b_2 - b_2)}{b_1 c_2 - b_2 c_1},$$

$$A' = \frac{B_2(c_1 - c_2) - C_2(b_1 - b_2)}{b_1 c_2 - b_2 c_1}.$$

Da A' nur einen Werth haben kann, so ist die Aufgabe unmög-

lich, wenn die beiden für A' gefundenen Ausdrücke verschieden sind, möglich dagegen, sobald jene Ausdrücke zusammenfallen. Das Letztere findet statt für

$$B_1(c_1-c_2)-C_1(b_1-b_2)=B_2(c_1-c_2)-C_2(b_1-b_2)$$

oder

$$14)\qquad (B_1-B_2)(c_1-c_2)=(C_1-C_2)(b_1-b_2)$$

d. h. wenn die Geraden sich entweder schneiden oder parallel laufen. Die vorstehende Bedingung ist identisch mit der schon früher (§. 8) erwähnten, nach welcher zwei Gerade in einer Ebene liegen oder nicht, je nach dem die obige Gleichung erfüllt oder nicht erfüllt ist. Das Bestehen der Gleichung 14) vorausgesetzt, haben wir als Gleichung der gesuchten Ebene:

$$15)\qquad [B_1(c_1-c_2)-C_1(b_1-b_2)]x-(c_1-c_2)y+(b_1-b_2)z = b_1c_2-b_2c_1.$$

Ist $b_1c_2=b_2c_1$, was geometrisch bedeutet, dass die Verbindungslinie der yz-Spuren b_1c_1 und b_2c_2 durch den Coordinatenanfang geht, so verschwindet die rechte Seite der obigen Gleichung und die Ebene beider Geraden geht dann gleichfalls durch den Anfangspunkt der Coordinaten.

§. 18.

Parallele Lage einer Geraden gegen eine Ebene.

Wenn eine Ebene und ausserhalb derselben eine Gerade gegeben sind, so kann man die Frage, ob die Gerade die Ebene schneidet oder ihr parallel ist, dadurch entscheiden, dass man durch irgend einen Punkt der Ebene eine Parallele zur Geraden legt; diese Parallele hat mit der Ebene entweder nur jenen einzigen Punkt oder alle Punkte gemein, im ersten Falle schneidet die Gerade die Ebene, im zweiten Falle ist sie ihr parallel, weil sie einer in der Ebene liegenden Geraden parallel läuft. Das genannte Kennzeichen drücken wir auf folgende Weise analytisch aus. Die Gleichung der Ebene sei

$$1)\qquad Ax+By+Cz=D,$$

die Gleichungen der Geraden mögen heissen

$$2)\qquad y=B_1x+b_1,\qquad z=C_1x+c_1;$$

für irgend einen Punkt $x_0y_0z_0$ der gegebenen Ebene gilt die Gleichung

$$Ax_0+By_0+Cz_0=D,$$

und wenn wir sie mit der Gleichung 1) durch Subtraction verbinden, so ist

3) $$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

immer noch die Gleichung derselben Ebene nur mit der Nebenbestimmung, dass letztere den Punkt $x_0 y_0 z_0$ enthält. Die Gleichungen einer durch diesen Punkt gehenden Parallelen zur gegebenen Geraden sind

4) $$y-y_0=B_1(x-x_0), \qquad z-z_0=C_1(x-x_0)$$

und wenn die Parallele ganz in der Ebene liegen soll, so müssen die Coordinaten jedes ihrer Punkte sowohl den Gleichungen 4) als der Gleichung 3) genügen; dies giebt für jedes beliebige x

$$(A+BB_1+CC_1)(x-x_0)=0$$

was nur möglich ist, wenn die Gleichung

5) $$A+BB_1+CC_1=0$$

statt findet; diese ist folglich die Bedingungsgleichung für die parallele Lage der Geraden gegen die Ebene*).

Hieran knüpfen sich einige Aufgaben über die Bestimmung einer Ebene, welche einer oder zwei gegebenen Geraden parallel sein soll.

α. Ebene durch zwei Punkte parallel einer Geraden. Die gegebenen Punkte mögen $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$ und die Gleichungen der gegebenen Geraden

6) $$y=Bx+b, \qquad z=Cx+c$$

heissen; die Gleichung der gesuchten Ebene sei

7) $$Lx+My+Nz=1.$$

Dass die Ebene durch jene zwei Punkte geht, wird ausgedrückt durch die beiden Gleichungen

$$Lf_1+Mg_1+Nh_1=1,$$
$$Lf_2+Mg_2+Ng_2=1;$$

die parallele Lage der Ebene und der Geraden liefert hierzu noch die Bedingung

$$L+MB+NC=0,$$

*) Die im vorigen Paragraphen unter Nr. 7) verzeichneten Bedingungen für den Fall, dass die Gerade in der Ebene liegt, erhalten durch das Obige eine sehr einfache Bedeutung. Von jenen zwei Bedingungsgleichungen sagt nämlich die erste, dass die Gerade der Ebene parallel ist, und die zweite, dass die yz-Spur der Geraden in der gleichnamigen Spur der Ebene liegt, dass also beide Gebilde einen Punkt gemein haben; diese Bedingungen sind zusammen nur von einer in der Ebene enthaltenen Geraden erfüllt.

und damit hat man drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten L, M und N. Man findet für sie die Werthe

$$L = \frac{B(h_1 - h_2) - C(g_1 - g_2)}{(g_1 - Bf_1)(h_2 - Cf_2) - (g_2 - Bf_2)(h_1 - Cf_1)},$$

$$M = \frac{-(h_1 - h_2) + C(f_1 - f_2)}{(g_1 - Bf_1)(h_2 - Cf_2) - (g_2 - Bf_2)(h_1 - Cf_1)},$$

$$N = \frac{+(g_1 - g_2) - B(f_1 - f_2)}{(g_1 - Bf_1)(h_2 - Cf_2) - (g_2 - Bf_2)(h_1 - Cf_1)};$$

durch Substitution in Nr. 7) und Wegschaffung der Brüche ergiebt sich

$$8) \quad \begin{cases} [B(h_1 - h_2) - C(g_1 - g_2)]x \\ -[h_1 - h_2 - C(f_1 - f_2)]y + [g_1 - g_2 - B(f_1 - f_2)]z \\ = (g_1 - Bf_1)(h_2 - Cf_2) - (g_2 - Bf_2)(h_1 - Cf_1) \end{cases}$$

als Gleichung der gesuchten Ebene.

β. Ebene durch eine Gerade parallel einer zweiten Geraden. Die beiden gegebenen Geraden mögen durch die Gleichungen

$$9) \quad \begin{cases} y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1, \\ y = B_2 x + b_2, \qquad z = C_2 x + c_2, \end{cases}$$

bestimmt sein, die Gleichung der gesuchten Ebene heisse

$$10) \qquad Lx + My + Nz = 1.$$

Soll diese Ebene die erste Gerade in sich enthalten, so müssen die Bedingungen

$$L + B_1 M + C_1 N = 0, \qquad b_1 M + c_1 N = 1$$

erfüllt sein, und wenn sie ausserdem der zweiten Geraden parallel liegen soll, so gehört dazu

$$L + B_2 M + C_2 N = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen ergeben sich für die Unbekannten L, M, N die Werthe

$$L = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{b_1(C_1 - C_2) - c_1(B_1 - B_2)},$$

$$M = \frac{C_1 - C_2}{b_1(C_1 - C_2) - c_1(B_1 - B_2)},$$

$$N = \frac{-(B_1 - B_2)}{b_1(C_1 - C_2) - c_1(B_1 - B_2)};$$

durch Substitution dieser Ausdrücke erhält man aus Nr. 10)

$$11) \quad \begin{cases} (B_1 C_2 - B_2 C_1)x + (C_1 - C_2)y - (B_1 - B_2)z \\ = b_1(C_1 - C_2) - c_1(B_1 - B_2) \end{cases}$$

als Gleichung der verlangten Ebene.

γ. **Ebene durch einen Punkt parallel zwei Geraden.** Bezeichnen wir die Coordinaten des gegebenen Punktes mit f, g, h, die Gleichungen der gegebenen Geraden und der gesuchten Ebene ganz wie vorhin, so haben wir zur Bestimmung der Unbekannten L, M, N die drei Gleichungen

$$Lf + Mg + Nh = 1,$$
$$L + B_1 M + C_1 N = 0,$$
$$L + B_2 M + C_2 N = 0;$$

die Ermittelung von L, M, N bietet keine Schwierigkeit dar und mag unterbleiben, weil sich die Rechnung eleganter auf folgende Weise führen lässt. Wir ziehen die erste Bedingungsgleichung von der Gleichung der Ebene ab, dividiren mit L und setzen zur Abkürzung

$$\frac{M}{L} = P, \qquad \frac{N}{L} = Q;$$

die Gleichung der Ebene lautet dann

$$12) \qquad x - f + P(y-g) + Q(z-h) = 0.$$

Die übrigen Bedingungsgleichungen dividiren wir gleichfalls mit L und haben dann zur Bestimmung von P und Q die Gleichungen

$$1 + B_1 P + C_1 Q = 0,$$
$$1 + B_2 P + C_2 Q = 0;$$

hieraus ergeben sich die Werthe

$$P = \frac{C_1 - C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1}, \qquad Q = -\frac{B_1 - B_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1};$$

durch Substitution derselben in Nr. 12) erhalten wir nach Wegschaffung der Brüche

$$13) \quad (B_1 C_2 - B_2 C_1)(x-f) + (C_1 - C_2)(y-g) - (B_1 - B_2)(z-h) = 0$$

als Gleichung der verlangten Ebene.

§. 19.

Senkrechte Lage einer Geraden gegen eine Ebene.

Wenn eine Ebene, deren Gleichung

$$1) \qquad Ax + By + Cz = D$$

heissen möge, normal zu einer durch die Gleichungen

$$2) \qquad y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1$$

bestimmten Geraden liegen soll, so müssen die Stellungswinkel der Ebene der Reihe nach dieselben sein, wie die Richtungswinkel der Geraden, es gelten daher, wenn die vom Coordinatenanfange

auf die Ebene herabgelassene Senkrechte mit p und die Gerade mit s_1 bezeichnet wrid, die Gleichungen

3) $cos(px) = cos(s_1 x)$, $cos(py) = cos(s_1 y)$, $cos(pz) = cos(s_1 z)$.

Unter Benutzung der schon früher gebrauchten Abkürzungen

$$cos(xy) = \gamma, \quad cos(xz) = \beta, \quad cos(yz) = \alpha,$$

$$\delta^2 = 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2,$$

$$E^2 = (1-\alpha^2)A^2 + (1-\beta^2)B^2 + (1-\gamma^2)C^2$$
$$-2(\alpha-\beta\gamma)BC - 2(\beta-\alpha\gamma)AC - 2(\gamma-\alpha\beta)AB,$$

$$D_1^2 = 1 + B_1^2 + C_1^2 + 2\alpha B_1 C_1 + 2\beta C_1 + 2\gamma B_1$$

sind die Stellungswinkel der Ebene durch die Formeln

$$cos(px) = \frac{A\delta}{E}, \quad cos(py) = \frac{B\delta}{E}, \quad cos(pz) = \frac{C\delta}{E},$$

und die Richtungswinkel der Geraden durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$cos(s_1 x) = \frac{1 + B_1\gamma + C_1\beta}{D_1},$$

$$cos(s_1 y) = \frac{B_1 + \gamma + C_1\alpha}{D_1},$$

$$cos(s_1 z) = \frac{C_1 + \beta + B_1\alpha}{D_1};$$

bildet man aus diesen Werthen die in Nr. 3) erwähnten Gleichungen, so kann man letztere leicht auf folgende Form bringen:

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{D_1\delta}{E} = \dfrac{1 + B_1\gamma + C_1\beta}{A} \\ \quad = \dfrac{B_1 + \gamma + C_1\alpha}{B} = \dfrac{C_1 + \beta + B_1\alpha}{C}, \end{cases}$$

und sie sind die analytischen Bedingungen für die gegenseitige senkrechte Lage der Ebene und der Geraden. Zu bemerken ist übrigens, dass von den Gleichungen 3) oder den damit identischen drei Gleichungen in Nr. 4) bereits zwei ausreichen, um die erwähnte Lage festzustellen; da nämlich die Richtung einer Geraden (p oder s_1) schon durch zwei Richtungswinkel bestimmt wird, so ist jede der Gleichungen 3) eine Folge der beiden übrigen und eben desswegen braucht man auch von den Gleichungen 4) nur zwei beizubehalten. Dies geschieht am einfachsten dadurch, dass man den ersten Quotienten rechter Hand mit den beiden übrigen Quotienten vergleicht; man hat so

$$5)\quad \frac{B}{A} = \frac{B_1 + C_1\alpha + \gamma}{1 + B_1\gamma + C_1\beta}, \quad \frac{C}{A} = \frac{C_1 + B_1\alpha + \beta}{1 + B_1\gamma + C_1\beta}$$

oder auch, wenn man die Brüche wegschafft und die gleichartigen Grössen vereinigt

$$6)\quad \begin{cases} (A-B\gamma)B_1+(A\alpha-B\beta)C_1=B-A\gamma \\ (A\alpha-C\gamma)B_1+(A-C\beta)C_1=C-A\beta. \end{cases}$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem hat man einfacher

$$7)\quad \frac{B}{A}=B_1,\quad \frac{C}{A}=C_1 \quad \text{oder} \quad AB_1=B,\quad AC_1=C.$$

Hieran knüpfen sich die folgenden zwei Aufgaben.

α. **Durch einen gegebenen Punkt eine Normalebene zu einer gegebenen Geraden zu legen.** Die Coordinaten des gegebenen Punktes mögen f, g, h, die Gleichungen der gegebenen Geraden

$$8)\qquad y=B_1x+b_1,\qquad z=C_1x+c_1$$

sein, und die Gleichung der gesuchten Ebene heisse

$$Ax+By+Cz=D.$$

Da letztere durch den Punkt fgh gehen soll, so hat man erstlich

$$Af+Bg+Ch=D$$

und durch Subtraction dieser Gleichung von der vorigen ergiebt sich nach Division mit A

$$9)\qquad x-f+\frac{B}{A}(y-g)+\frac{C}{A}(z-h)=0;$$

dies ist immer noch die Gleichung der gesuchten Ebene, nur unter Einrechnung der ersten angegebenen Bedingung. Die senkrechte Lage der Geraden gegen die Ebene verlangt ferner das Stattfinden der Gleichungen 5); setzt man die hierdurch bestimmten Werthe von $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$ in die Gleichung 9) ein, so erhält man nach Wegschaffung der Brüche

$$10)\quad \begin{cases} (1+B_1\gamma+C_1\beta)(x-f) \\ +(B_1+C_1\alpha+\gamma)(y-g)+(C_1+B_1\alpha+\beta)(z-h)=0, \end{cases}$$

und einfacher bei rechtwinkligen Coordinaten

$$11)\qquad (x-f)+B_1(y-g)+C_1(z-h)=0$$

als Gleichung der verlangten Ebene.

Die hiermit bestimmte Ebene schneidet die gegebene Gerade in einem Punkte, dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0 sich mittelst der Bemerkung finden lassen, dass sie den Gleichungen 8) und 10) gleichzeitig genügen müssen, weil der Punkt $x_0y_0z_0$ sowohl der Ebene als der Geraden angehört; schreiben wir also in 8) und 10) x_0, y_0, z_0 für x, y, z, so haben wir drei Gleichungen ersten Gra-

des zur Bestimmung der gesuchten Coordinaten. Diese Andeutung möge genügen, da die Rechnung keine Schwierigkeiten darbietet. Endlich bestimmt sich noch die Entfernung der Punkte $x_0 y_0 z_0$ und fgh mittelst der bekannten Formel

$$e^2 = (x_0 - f)^2 + (y_0 - g)^2 + (z_0 - h)^2$$
$$+ 2(x_0 - f)(y_0 - g)\gamma + 2(x_0 - f)(z_0 - h)\beta + 2(y_0 - g)(z_0 - h)\alpha,$$

in welche man die auf die erwähnte Weise gefundenen Werthe von x_0, y_0 und z_0 substituiren kann.

β. Senkrechte von einem Punkte auf eine Gerade. Die gegebene Ebene habe zur Gleichung

$$12) \qquad Ax + By + Cz = D,$$

die Coordinaten des gegebenen Punktes mögen f, g, h heissen und durch ihn werde senkrecht zur Ebene eine Gerade gelegt, deren Gleichungen wir mit

$$13) \qquad y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1$$

bezeichnen. Die Bedingung, dass diese Gerade durch den Punkt fgh gehen soll, liefert die Gleichungen

$$g = B_1 f + b_1, \qquad h = C_1 f + c_1,$$

welche, mit den vorigen verbunden,

$$14) \qquad y - g = B_1 (x - f), \qquad z - h = C_1 (x - f)$$

als Gleichungen der gesuchten Normalen geben. Um die noch übrigen Unbekannten B_1 und C_1 zu bestimmen, erinnern wir an die Gleichungen 6), welche die senkrechte Lage der Geraden gegen die Ebene ausdrücken; setzen wir zur Abkürzung

$$15) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = (1 - \alpha^2) A - (\gamma - \alpha\beta) B - (\beta - \alpha\gamma) C, \\ \mathfrak{B} = (1 - \beta^2) B - (\alpha - \beta\gamma) C - (\gamma - \alpha\beta) A, \\ \mathfrak{C} = (1 - \gamma^2) C - (\beta - \alpha\gamma) A - (\alpha - \beta\gamma) B, \end{cases}$$

so erhalten wir durch Auflösung der Gleichungen 6) die Werthe

$$B_1 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}, \qquad C_1 = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}},$$

mithin sind die Gleichungen der verlangten Normalen

$$16) \quad y - g = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} (x - f), \qquad z - h = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} (x - f).$$

Um den Durchschnitt dieser Geraden mit der Ebene, d. h. den Fusspunkt des vom Punkte fgh auf die Ebene herabgelassenen Perpendikels zu finden, bemerken wir, dass die Coordinaten jenes Punktes, welche x_0, y_0, z_0 heissen mögen, den Gleichungen 12) und 16) zusammen genügen müssen; durch Auflösung derselben ergeben sich die Werthe

$$17)\quad \begin{cases} x_0 = f + \dfrac{D-(Af+Bg+Ch)}{A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C}}\mathfrak{A}, \\ y_0 = g + \dfrac{D-(Af+Bg+Ch)}{A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C}}\mathfrak{B}, \\ z_0 = h + \dfrac{D-(Af+Bg+Ch)}{A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C}}\mathfrak{C}. \end{cases}$$

Der in den Quotienten vorkommende gemeinschaftliche Nenner $A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C}$ ist übrigens einerlei mit der anfangs dieses Paragraphen erwähnten Grösse E^2.

Endlich können wir noch die Entfernung der Punkte fgh und $x_0y_0z_0$, d. h. den Abstand des Punktes fgh von der gegebenen Ebene bestimmen; bezeichnen wir ihn mit q, so ist

$$q^2 = (x_0-f)^2+(y_0-g)^2+(z_0-h)^2$$
$$+2(x_0-f)(y_0-g)\gamma+2(x_0-f)(z_0-h)\beta+2(y_0-g)(z_0-h)\alpha,$$

wo noch die Werthe von x_0, y_0, z_0 aus Nr. 17) zu substituiren sind. Um diese Substitution bequem ausführen zu können, setzen wir zuerst, wie schon erwähnt,

$$A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C} = E^2,$$

und

$$D-(Af+Bg+Ch) = \varDelta;$$

dies giebt bei Absonderung der gemeinschaftlichen Factoren

$$q^2 = \frac{\varDelta^2}{E^4}(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2+2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\gamma+2\mathfrak{A}\mathfrak{C}\beta+2\mathfrak{B}\mathfrak{C}\alpha)$$

wobei für den Augenblick der Parentheseninhalt Σ, mithin die Formel

$$18)\qquad q^2 = \frac{\varDelta^2}{E^4}\Sigma$$

heissen möge. Wollte man nun, wie es als das Nächstliegende erscheint, den Ausdruck Σ dadurch auf seine einfachste Form bringen, dass man die Werthe von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ substituirte und die gleichartigen Grössen vereinigte, so würde man auf eine äusserst weitläufige Rechnung eingehen müssen, welcher sich das einfache Endresultat nicht leicht absehen liesse. Dagegen führt kurz die Bemerkung zum Ziele, dass die Grössen E und Σ zwar von A, B, C, α, β, γ, nicht aber von f, g, h abhängig sind, dass sie folglich für eine bestimmte Ebene dieselben bleiben, wo auch der Punkt fgh liegen möge; nehmen wir speciell $f=g=h=0$, so wird $\varDelta=D$, $q=p$, und die aus Nr. 18) entspringende Gleichung

$$p^2 = \frac{D^2}{E^4} \Sigma$$

muss jetzt mit der früheren Gleichung (§. 14, Formel 12)

$$p^2 = \frac{D^2 \delta^2}{E^2}$$

übereinstimmen. Die Vergleichung liefert den Werth $\Sigma = \delta^2 E^2$ und aus der Formel 18) ergiebt sich nun

$$19) \qquad q = \frac{D - (Af + Bg + Ch)}{E} \delta.$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem vereinfachen sich alle diese Ergebnisse; die Bedingungen für die normale Lage der Geraden gegen die Ebene lauten in diesem Falle

$$B_1 = \frac{B}{A}, \qquad C_1 = \frac{C}{A}$$

und bedeuten geometrisch, dass die Projectionen der Geraden senkrecht auf den gleichnamigen Spuren der Ebene stehen, wie auch aus der descriptiven Geometrie bekannt ist; die Gleichungen der Normalen sind

$$20) \quad y - g = \frac{B}{A}(x - f), \qquad z - h = \frac{C}{A}(x - f);$$

die Coordinaten ihres Durchschnittes mit der Ebene:

$$21) \quad \begin{cases} x_0 = f + \dfrac{D - (Af + Bg + Ch)}{A^2 + B^2 + C^2} A, \\ y_0 = g + \dfrac{D - (Af + Bg + Ch)}{A^2 + B^2 + C^2} B, \\ z_0 = h + \dfrac{D - (Af + Bg + Ch)}{A^2 + B^2 + C^2} C; \end{cases}$$

und der Abstand des Punktes von der Ebene:

$$22) \qquad q = \frac{D - (Af + Bg + Ch)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Nehmen wir, wie früher, die in Nr. 19) vorkommenden Grössen δ und E, welche durch Wurzelziehung bestimmt werden, im absoluten Sinne und ebenso die in Nr. 22) vorkommende Wurzel, so ist q positiv oder negativ, jenachdem $D - (Af + Bg + Ch)$ positiv oder negativ ausfällt; das Perpendikel q erhält demnach das positive Vorzeichen, wenn sich der Punkt fgh auf derselben Seite der Ebene befindet, wie der Coordinatenanfang, das negative Zeichen, wenn fgh und der Coordinatenanfang zu entgegengesetzten Seiten der Ebene liegen.

γ. Die im vorigen Abschnitte entwickelten Formeln für q bestimmen auch den gegenseitigen **Abstand einer Ebene und einer ihr parallelen Geraden.** Sind nämlich

$$y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1,$$

worin B_1 und C_1 der Bedingung

$$A + BB_1 + CC_1 = 0$$

genügen, die Gleichungen der parallelen Geraden, so hat man nur festzusetzen, dass der Punkt fgh dieser Geraden angehört, dass also die Gleichungen

$$g = B_1 f + b_1, \qquad h = C_1 f + c_1$$

statt finden; die Entfernung q des Punktes von der Ebene ist dann einerlei mit dem Abstande der Geraden von derselben Ebene. Man hat nun nach Formel 19) unter Substitution der für g und h angegebenen Werthe

$$q = \frac{D - [(A + BB_1 + CC_1)f + Bb_1 + Cc_1]}{E} \delta$$

und bei Rücksicht auf die parallele Lage der Geraden gegen die Ebene

$$23) \qquad q = \frac{D - (Bb_1 + Cc_1)}{E} \delta.$$

Bei rechtwinkligen Coordinaten ist

$$24) \qquad q = \frac{D - (Bb_1 + Cc_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Die Vorzeichen von q befolgen selbstverständlich dieselbe Regel wie vorhin.

§. 20.

Beliebige Lage einer Geraden gegen eine Ebene.

Eine Ebene, deren Gleichung

$$1) \qquad Ax + By + Cz = D$$

sein möge, hat mit einer durch die Gleichungen

$$2) \qquad y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c$$

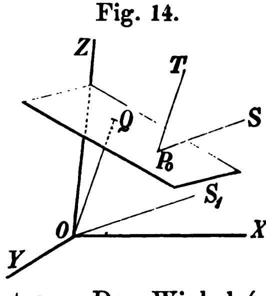
dargestellten Geraden im Allgemeinen einen Punkt, den Durchschnitt beider Gebilde, gemein; die Coordinaten x_0, y_0, z_0 desselben ergeben sich aus der Bemerkung, dass sie den Gleichungen 1) und 2) zusammen genügen müssen, schreibt man also in letzteren x_0, y_0, z_0 für x, y, z, so hat man drei Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten. Man findet hiernach für die Coordinaten des Durchschnittspunktes die Werthe

$$3)\quad\begin{cases} x_0 = -\dfrac{Bb_1 + Cc_1 - D}{A + BB_1 + CC_1}, \\ y_0 = \dfrac{Ab_1 + C(b_1 C_1 - c_1 B_1) + DB_1}{A + BB_1 + CC_1}, \\ z_0 = \dfrac{Ac_1 + B(c_1 B_1 - b_1 C_1) + DC_1}{A + BB_1 + CC_1}. \end{cases}$$

Im Allgemeinen sind diese Ausdrücke endliche Grössen, sie können aber unter Umständen unendlich oder unbestimmt werden. Ist erstens der gemeinschaftliche Nenner der obigen Brüche gleich Null, ohne dass aber einer der Zähler verschwindet, so wird jede der Coordinaten x_0, y_0, z_0 unendlich gross, die Gerade hat dann mit der Ebene nur einen unendlich entfernten Punkt gemein, d. h. sie ist ihr parallel (vergl. §. 18); verschwinden der Nenner und alle Zähler der vorigen Brüche gleichzeitig, so erhalten x_0, y_0, z_0 die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, d. h. jeder Punkt der Geraden ist ein Punkt der Ebene (vergl. §. 17).

Um zweitens den Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene zu bestimmen, denken wir uns in dem Durchschnittspunkte P_0 beider Gebilde eine Normale $P_0 T$ auf der Ebene errichtet; der Neigungswinkel, welcher ω heissen möge, ist dann das Complement des Winkels SP_0T zwischen der Geraden und der Normalen, mithin $\sin\omega = \cos SP_0T$. Da ferner die Normale P_0T parallel zu der Entfernung der Ebene vom Coordinatenanfang liegt, so können wir $\angle SP_0T$ auch als den Winkel zwischen $OQ = p$ und der Geraden $P_0S = s$ bezeichnen, mithin

Fig. 14.



$$4)\quad \sin\omega = \cos(ps)$$

setzen. Der Winkel (ps) lässt sich als Winkel zwischen zwei Vectoren betrachten, wenn man durch den Coordinatenanfang eine Gerade $s_1 \parallel s$ zieht, man hat dann nach Formel 5) in §. 5

$$5)\quad \begin{cases} \sin\omega = \cos(ps_1) \\ = \dfrac{1}{\delta^2}\Big\{(1-\alpha^2)\xi\xi_1 + (1-\beta^2)\eta\eta_1 + (1-\gamma^2)\zeta\zeta_1 \\ \quad -(\alpha-\beta\gamma)(\eta\zeta_1+\eta_1\zeta) - (\beta-\alpha\gamma)(\xi\zeta_1+\xi_1\zeta) \\ \quad -(\gamma-\alpha\beta)(\xi\eta_1+\xi_1\eta)\Big\} \end{cases}$$

und zwar ist dabei

$$6)\begin{cases} \delta^2 = 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2, \\ \xi = \cos(px), \quad \eta = \cos(py), \quad \zeta = \cos(pz), \\ \xi_1 = \cos(s_1 x), \quad \eta_1 = \cos(s_1 y), \quad \zeta_1 = \cos(s_1 z). \end{cases}$$

Die Werthe der hier vorkommenden Cosinus sind unmittelbar bekannt; nach Nr. 12) in §. 14 hat man

$$\xi = \frac{A\delta}{E}, \qquad \eta = \frac{B\delta}{E}, \qquad \zeta = \frac{C\delta}{E},$$

wo δ die obige Bedeutung hat und

$$7)\begin{cases} E^2 = (1-\alpha^2)A^2 + (1-\beta^2)B^2 + (1-\gamma^2)C^2 \\ \quad -2(\alpha-\beta\gamma)BC - 2(\beta-\alpha\gamma)AC - 2(\gamma-\alpha\beta)AB \end{cases}$$

ist, ferner hat man nach §. 6 Nr. 7)

$$\xi_1 = \frac{1 + B_1\gamma + C_1\beta}{D_1},$$

$$\eta_1 = \frac{B_1 + C_1\alpha + \gamma}{D_1},$$

$$\zeta_1 = \frac{C_1 + B_1\alpha + \beta}{D_1},$$

und darin

$$8) \quad D_1^2 = 1 + B_1^2 + C_1^2 + 2\alpha B_1 C_1 + 2\gamma B_1 + 2\beta C_1.$$

Substituirt man die für ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1 angegebenen Werthe in die Formel 5) und fasst die gleichartigen Glieder zusammen, so findet man, dass die Coefficienten von

$$AB_1, \quad AC_1, \quad BC_1, \quad CB_1, \quad B, \quad C$$

verschwinden und dass folgender Ausdruck übrig bleibt:

$$\sin\omega = \frac{A}{\delta E D_1}\left\{1 - \alpha^2 - \beta(\beta - \alpha\gamma) - \gamma(\gamma - \alpha\beta)\right\}$$
$$+ \frac{BB_1}{\delta E D_1}\left\{1 - \beta^2 - \alpha(\alpha - \beta\gamma) - \gamma(\gamma - \alpha\beta)\right\}$$
$$+ \frac{CC_1}{\delta E D_1}\left\{1 - \gamma^2 - \alpha(\alpha - \beta\gamma) - \beta(\beta - \alpha\gamma)\right\}.$$

Der Inhalt jeder der drei Parenthesen ist derselbe, nämlich

$$1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = \delta^2,$$

die obige Formel wird daher zur folgenden

$$9) \qquad \sin\omega = \frac{A + BB_1 + CC_1}{ED_1}\,\delta.$$

Als specielle Fälle hiervon ergeben sich die Neigungswinkel der Geraden gegen die Coordinatenebenen; sind nämlich ω_x, ω_y, ω_z die Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebenen yz, xz, xy, so ist im ersten Falle $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, im zweiten $A = 0$,

$B=1$, $C=0$ und im dritten $A=0$, $B=0$, $C=1$, man erhält mittelst dieser Specialisirungen

$$10)\quad \begin{cases} \sin\omega_x = \dfrac{\delta}{D_1\sqrt{1-\alpha^2}}, \qquad \sin\omega_y = \dfrac{B_1\delta}{D_1\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \sin\omega_z = \dfrac{C_1\delta}{D_1\sqrt{1-\gamma^2}}. \end{cases}$$

Bei rechtwinkligen Coordinaten ist einfacher

$$11)\quad \sin\omega = \frac{A+BB_1+CC_1}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(1+B_1^2+C_1^2)}}$$

$$12)\quad \begin{cases} \sin\omega_x = \dfrac{1}{\sqrt{1+B_1^2+C_1^2}}, \\ \sin\omega_y = \dfrac{B_1}{\sqrt{1+B_1^2+C_1^2}}, \\ \sin\omega_z = \dfrac{C_1}{\sqrt{1+B_1^2+C_1^2}}. \end{cases}$$

§. 21.

Parallele Lage zweier Ebenen.

Aus dem bekannten Satze, dass zwei Ebenen parallel sind, wenn sie auf einer und derselben Geraden senkrecht stehen, folgt augenblicklich, dass Parallelebenen als Ebenen von gleicher Stellung bezeichnet werden können. Sind nun

$$1)\quad Ax + By + Cz = D,$$

$$2)\quad A_1x + B_1y + C_1z = D_1$$

die Gleichungen zweier Ebenen und p, p_1 deren Abstände vom Coordinatenanfang, so wird die Bedingung des Parallelismus dieser Ebenen durch die Gleichungen

$$3)\quad \angle(px) = \angle(p_1x), \quad \angle(py) = \angle(p_1y), \quad \angle(pz) = \angle(p_1z)$$

ausgedrückt, von denen übrigens nur zwei nothwendig sind, weil zwei Stellungswinkel den dritten bestimmen. Zufolge der Formeln 12) in §. 14 ist weiter

$$\cos(px) = \frac{A\delta}{E}, \quad \cos(py) = \frac{B\delta}{E}, \quad \cos(pz) = \frac{C\delta}{E},$$

$$\cos(p_1x) = \frac{A_1\delta}{E_1}, \quad \cos(p_1y) = \frac{B_1\delta}{E_1}, \quad \cos(p_1z) = \frac{C_1\delta}{E_1},$$

mithin durch Verbindung mit den Gleichungen 3)

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{E}{E_1};$$

von diesen drei Gleichungen brauchen wir vermöge der vorherigen Bemerkung nur zwei beizubehalten, demnach sind die Bedingungen für die parallele Lage der in Rede stehenden Ebenen

$$4)\qquad \frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}.$$

Auch ohne Kenntniss der Stellungswinkel kann man zu diesen Gleichungen gelangen, wenn man sich an den Satz erinnert, dass zwei Ebenen parallel liegen, sobald die gleichnamigen Spuren derselben parallel sind. Zur parallelen Lage der xy-Spuren

$$Ax+By=D \quad\text{und}\quad A_1x+B_1y=D_1$$

gehört nun die Bedingung

$$\frac{A}{B}=\frac{A_1}{B_1} \text{ oder } \frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1},$$

der Parallelismus der xz-Spuren

$$Ax+Cz=D \quad\text{und}\quad A_1x+C_1z=D_1$$

verlangt ferner das Stattfinden der Gleichung

$$\frac{A}{C}=\frac{A_1}{C_1} \text{ oder } \frac{A}{A_1}=\frac{C}{C_1};$$

mit der vorhergehenden Bedingung zusammen giebt dies wieder die in Nr. 4) verzeichneten Gleichungen.

Der Abstand q der beiden Parallelebenen ist $=p-p_1$ oder $=p+p_1$, jenachdem die Ebenen auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten vom Coordinatenanfang liegen; nach Formel 12) in §. 14 erhalten wir

$$5)\qquad q=\left(\frac{D}{E}\mp\frac{D_1}{E_1}\right)\delta,$$

wobei die Vorzeichen den beiden erwähnten Lagen entsprechen.

Diese Betrachtungen führen zur Lösung der Aufgabe: durch einen gegebenen Punkt eine Ebene parallel einer gegebenen Ebene zu legen. Nennen wir f, g, h die Coordinaten des gegebenen Punktes

$$Ax+By+Cz=D$$

die Gleichung der gegebenen, und

$$6)\qquad A_1x+B_1y+C_1z=D_1$$

die der gesuchten Ebene, so muss erstens

$$A_1f+B_1g+C_1h=D_1$$

sein. Wir ziehen diese Gleichung von der vorhergehenden ab und dividiren den Rest durch A_1; das Ergebniss

7) $$x - f + \frac{B_1}{A_1}(y - g) + \frac{C_1}{A_1}(z - h) = 0$$

ist noch immer die Gleichung der verlangten Ebene mit Einschluss der Bedingung, dass sie durch den Punkt fgh geht. Zur parallelen Lage beider Ebenen gehören weiter die Gleichungen 4), aus denen folgt

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{B}{A} \text{ und } \frac{C_1}{A_1} = \frac{C}{A};$$

nach Substitution dieser Werthe und Multiplication mit A ergiebt sich aus Nr. 7)

8) $$A(x-f) + B(y-g) + C(z-h) = 0$$

als Gleichung der verlangten Parallelebene. Ihr Abstand von der gegebenen Ebene ist einerlei mit der Entfernung des Punktes fgh von derselben Ebene.

§. 22.

Senkrechte Lage zweier Ebenen.

Lässt man von irgend einem Punkte P_1 einer Ebene $\mathfrak{E}_1$ eine Senkrechte p auf eine andere Ebene $\mathfrak{E}$ herab, so liegt p entweder in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ selbst oder schneidet $\mathfrak{E}$; im ersten Falle sind die beiden Ebenen senkrecht zu einander, im zweiten nicht. Um dieses geometrische Kennzeichen analytisch auszudrücken, bezeichnen wir mit

1) $$Ax + By + Cz = D$$

die Gleichung der Ebene $\mathfrak{E}$, mit

2) $$A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$$

die der Ebene $\mathfrak{E}_1$, und mit x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines der letzteren Ebene angehörigen Punktes, für welchen also die Gleichung

3) $$A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 = D_1$$

besteht. Nach §. 19 Formel 16) sind die Gleichungen einer vom Punkte $x_1 y_1 z_1$ auf die Ebene $\mathfrak{E}$ herabgelassenen Senkrechten

$$y - y_1 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}(x - x_1), \qquad z - z_1 = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}(x - x_1),$$

wobei zur Abkürzung gesetzt war

$$\mathfrak{A} = (1-\alpha^2)A - (\gamma - \alpha\beta)B - (\beta - \alpha\gamma)C,$$
$$\mathfrak{B} = (1-\beta^2)B - (\alpha - \beta\gamma)C - (\gamma - \alpha\beta)A,$$
$$\mathfrak{C} = (1-\gamma^2)C - (\beta - \alpha\gamma)A - (\alpha - \beta\gamma)B;$$

soll nun das erwähnte Perpendikel in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ enthalten sein, so gehören dazu die Bedingungen

$$4)\quad \begin{cases} A_1 + B_1 \dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} + C_1 \dfrac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = 0, \\ B_1\left(y_1 - \dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} x_1\right) + C_1\left(z_1 - \dfrac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} x_1\right) = D_1. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen ist die zweite überflüssig, weil sie sich aus den Gleichungen 3) und 4) ergiebt, wenn man die letztere mit x_1 multiplicirt und von der ersteren abzieht; zu dem nämlichen Resultate führt auch die geometrische Bemerkung, dass p mit $\mathfrak{E}_1$ bereits den Punkt $x_1 y_1 z_1$ gemein hat, also nur noch parallel mit $\mathfrak{E}_1$ zu sein braucht, um ganz in diese Ebene zu fallen. Als Bedingung für die senkrechte Lage der beiden Ebenen bleibt demnach die eine Gleichung 4) oder

$$5)\quad \mathfrak{A}A_1 + \mathfrak{B}B_1 + \mathfrak{C}C_1 = 0.$$

Will man die abgekürzten Zeichen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ vermeiden, so ist zu schreiben

$$6)\quad \begin{cases} (1-\alpha^2)AA_1 + (1-\beta^2)BB_1 + (1-\gamma^2)CC_1 \\ -(\alpha-\beta\gamma)(BC_1 + B_1C) - (\beta-\alpha\gamma)(AC_1 + A_1C) \\ -(\gamma-\alpha\beta)(AB_1 + A_1B) \\ = 0. \end{cases}$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem wird $\mathfrak{A} = A$, $\mathfrak{B} = B$, $\mathfrak{C} = C$, mithin

$$7)\quad AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

Hieran knüpfen sich folgende Aufgaben.

α. Durch zwei gegebene Punkte eine Normalebene zu einer gegebenen Ebene zu legen. Nennen wir $f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2$ die Coordinaten der gegebenen Punkte,

$$Ax + By + Cz = D$$

die Gleichung der gegebenen und

$$8)\quad Lx + My + Nz = 1$$

die der gesuchten Ebene, so haben wir erstens, weil die Punkte $f_1 g_1 h_1$ und $f_2 g_2 h_2$ in dieser Ebene liegen sollen,

$$9)\quad \begin{cases} Lf_1 + Mg_1 + Nh_1 = 1, \\ Lf_2 + Mg_2 + Nh_2 = 1, \end{cases}$$

und wegen der senkrechten Lage der beiden Ebenen

$$10)\quad \mathfrak{A}L + \mathfrak{B}M + \mathfrak{C}N = 0.$$

Die Bestimmung der Unbekannten L, M, N erfordert nun die Auflösung der drei Gleichungen 9) und 10), was weiter keine Schwie-

rigkeit hat. Nach Substitution der für L, M und N gefundenen Werthe kann man die Gleichung 8) auf folgende Form bringen:

$$11)\quad \begin{cases} [\mathfrak{B}(h_1-h_2)-\mathfrak{C}(g_1-g_2)]x+[\mathfrak{C}(f_1-f_2)-\mathfrak{A}(h_1-h_2)]y \\ \qquad +[\mathfrak{A}(g_1-g_2)-\mathfrak{B}(f_1-f_2)]z \\ =\mathfrak{A}(g_1h_2-g_2h_1)+\mathfrak{B}(h_1f_2-h_2f_1)+\mathfrak{C}(f_1g_2-f_2g_1). \end{cases}$$

Ist das Coordinatensystem rechtwinklig, so hat man nur A, B, C für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zu schreiben.

Die beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden, von welcher alle Punkte beiden Ebenen gleichzeitig angehören; sind also x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes der Durchschnittslinie, so müssen diese den Gleichungen

$$Ax+By+Cz=D$$
$$Fx+Gy+Hz=K$$

zusammen genügen, wobei die zweite Gleichung nur eine abgekürzte Schreibweise der Gleichung 11) sein soll. Die Gleichungen der Projectionen der Durchschnittslinie finden sich, wenn man aus den vorstehenden Gleichungen einmal z und das andere Mal y eliminirt; sie lauten

$$12)\quad \begin{cases} (CF-AH)x+(CG-BH)y=CK-DH, \\ (BF-AG)x+(BH-CG)z=BK-DG. \end{cases}$$

Auch die Richtungswinkel dieser Geraden können leicht mittelst der Formeln 7) in §. 6 vermittelt werden, sobald man den Gleichungen 12) die gewöhnliche Form der Gleichungen einer Geraden ertheilt.

β. Durch eine gegebene Gerade eine Normalebene zu einer gegebenen Ebene zu legen. Die Gleichungen der gegebenen Ebene, der Geraden und der gesuchten Ebene mögen der Reihe nach sein

$$Ax+By+Cz=D,$$
$$y=B_1x+b_1,\qquad z=C_1x+c_1,$$
$$Lx+My+Nz=1;$$

da die letztere Ebene die Gerade in sich enthalten soll, so müssen zunächst die Bedingungen

$$13)\qquad L+B_1M+C_1N=0,\qquad b_1M+c_1N=1$$

erfüllt sein; hierzu kommt als Bedingungsgleichung für die senkrechte Lage beider Ebenen gegen einander:

$$14)\qquad \mathfrak{A}L+\mathfrak{B}M+\mathfrak{C}N=0.$$

Die Gleichungen 13) und 14) bestimmen die Werthe von L, M und

N, nach Substitution derselben ergiebt sich als Gleichung der gesuchten Ebene:

$$15)\quad \begin{cases} (\mathfrak{B} C_1 - \mathfrak{C} B_1)x - (\mathfrak{A} C_1 - \mathfrak{C})y + (\mathfrak{A} B_1 - \mathfrak{B})z \\ \quad = (\mathfrak{A} B_1 - \mathfrak{B})c_1 - (\mathfrak{A} C_1 - \mathfrak{C})b_1; \end{cases}$$

bei rechtwinkligen Coordinaten wird $\mathfrak{A} = A$, $\mathfrak{B} = B$, $\mathfrak{C} = C$.

Den Durchschnitt der neuen Ebene mit der gegebenen Ebene kann man auf gleiche Weise wie bei der vorigen Aufgabe ermitteln; man erhält dann die Gleichungen der rechtwinkligen Projection einer gegebenen Geraden auf eine bestimmte Ebene.

γ. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche einer bestimmten Geraden parallel und senkrecht zu einer vorgeschriebenen Ebene ist. Die Coordinaten des gegebenen Punktes mögen f, g, h heissen, die Gleichungen der Geraden und der Ebene seien

$$y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1,$$
$$Ax + By + Cz = D,$$

endlich bezeichne

$$16)\qquad Lx + My + Nz = 1$$

die Gleichung der gesuchten Ebene. Die Bedingung, dass letztere den Punkt fgh enthalten soll, wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$Lf + Mg + Nh = 1;$$

wir ziehen dieselbe von Nr. 16) ab, dividiren mit L und setzen $\frac{M}{L} = P$, $\frac{N}{L} = Q$; es bleibt

$$17)\qquad x - f + P(y - g) + Q(z - h) = 0$$

und dies ist immer noch die Gleichung der verlangten Ebene. Die senkrechte Lage derselben gegen die gegebene Ebene und ihr Parallelismus zur gegebenen Geraden geben die weiteren Gleichungen

$$\mathfrak{A} L + \mathfrak{B} M + \mathfrak{C} N = 0, \qquad L + B_1 M + C_1 N = 0,$$

die wir gleichfalls durch L dividiren. Wir haben jetzt

$$\mathfrak{B} P + \mathfrak{C} Q = -\mathfrak{A}, \qquad B_1 P + C_1 Q = -1,$$

hieraus finden sich P und Q, durch deren Substitution in Nr. 17) die Gleichung der verlangten Ebene zum Vorschein kommt, nämlich

$$18)\quad (\mathfrak{B} C_1 - \mathfrak{C} B_1)(x - f) - (\mathfrak{A} C_1 - \mathfrak{C})(y - g) + (\mathfrak{A} B_1 - \mathfrak{B})(z - h) = 0.$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem gehen, wie bisher, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in A, B, C über.

Der Durchschnitt der neuen mit der gegebenen Ebene kann wie bei den vorigen Aufgaben bestimmt werden.

§. 23.

Ebenen in beliebigen Lagen zu einander.

Zwei beliebige durch die Gleichungen

$$1) \qquad Ax + By + Cz = D,$$

$$2) \qquad A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$$

repräsentirte Ebenen haben im Allgemeinen einen geradlinigen Durchschnitt, für dessen Punkte jede der obigen Gleichungen gilt; versteht man demnach unter x, y und z in beiden Gleichungen Dasselbe, so sind letztere die Gleichungen der Durchschnittslinie selber. Die Gleichungen ihrer Projectionen finden sich hieraus, wenn man einmal z, das andere Mal y eliminirt; sie lauten

$$3) \quad \begin{cases} (AC_1 - A_1 C)x + (BC_1 - B_1 C)y = DC_1 - D_1 C, \\ (AB_1 - A_1 B)x + (CB_1 - C_1 B)z = DB_1 - D_1 B. \end{cases}$$

Dasselbe Resultat kann man auch durch die geometrische Bemerkung finden, dass die Spuren der Durchschnittslinie die Durchschnitte von den gleichnamigen Spuren der beiden Ebenen sein müssen.

Was zweitens den Neigungswinkel Θ der beiden Ebenen anbelangt, so ist derselbe einerlei mit dem Winkel zwischen den Senkrechten p und p_1, welche vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Ebenen herabgelassen werden können; bezeichnen wir, wie früher, die Cosinus der Coordinatenwinkel yz, xz, xy mit α, β, γ und die Cosinus der Winkel (px), (py), (pz), $(p_1 x)$, $(p_1 y)$, $(p_1 z)$ der Reihe nach mit ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1, so erhalten wir $\cos\Theta = \cos(pp_1)$ mittelst der Formel 5) in §. 5, nämlich

$$\delta^2 \cos\Theta = (1-\alpha^2)\xi\xi_1 + (1-\beta^2)\eta\eta_1 + (1-\gamma^2)\zeta\zeta_1$$
$$- (\alpha - \beta\gamma)(\eta\zeta_1 + \eta_1\zeta) - (\beta - \alpha\gamma)(\xi\zeta_1 + \xi_1\zeta) - (\gamma - \alpha\beta)(\xi\eta_1 + \xi_1\eta),$$

worin δ^2 seine gewöhnliche durch die Formel

$$\delta^2 = 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$$

angegebene Bedeutung hat. In die obige Gleichung haben wir noch die Werthe der sechs Cosinus ξ, $\eta \ldots \zeta_1$ zu substituiren, diese sind nach Nr. 12) in §. 14

$$\xi = \frac{A\delta}{E}, \quad \eta = \frac{B\delta}{E}, \quad \zeta = \frac{C\delta}{E},$$

$$\xi_1 = \frac{A_1\delta}{E_1}, \quad \eta_1 = \frac{B_1\delta}{E_1}, \quad \zeta_1 = \frac{C_1\delta}{E_1},$$

worin

$$E^2 = (1-\alpha^2)A^2 + (1-\beta^2)B^2 + (1-\gamma^2)C^2$$
$$-2(\alpha-\beta\gamma)BC - 2(\beta-\alpha\gamma)AC - 2(\gamma-\alpha\beta)AB,$$
$$E_1^2 = (1-\alpha^2)A_1^2 + (1-\beta^2)B_1^2 + (1-\gamma^2)C_1^2$$
$$-2(\alpha-\beta\gamma)B_1C_1 - 2(\beta-\alpha\gamma)A_1C_1 - 2(\gamma-\alpha\beta)A_1B_1;$$

bezeichnen wir dabei zur Abkürzung wie folgt

$$F^2 = (1-\alpha^2)AA_1 + (1-\beta^2)BB_1 + (1-\gamma^2)CC_1$$
$$-(\alpha-\beta\gamma)(BC_1+B_1C) - (\beta-\alpha\gamma)(AC_1+A_1C) - (\gamma-\alpha\beta)(AB_1+A_1B),$$

so gelangen wir zu dem Endresultate

$$4) \qquad \cos\Theta = \frac{F^2}{EE_1}.$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem erhält die Formel die einfachere Gestalt

$$5) \qquad \cos\Theta = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}}.$$

Aus Nr. 4) ergeben sich die früheren Formeln für die Cosinus der Neigungswinkel der ersten Ebene gegen die Coordinatenebenen, wenn man die zweite Ebene der Reihe nach mit jeder der Coordinatenebenen zusammenfallen lässt. Als Bedingung für die senkrechte Lage der Ebenen gegen einander erhält man aus Nr. 4) $F^2 = 0$ übereinstimmend mit der Gleichung 6) im vorigen Paragraphen.

Noch wollen wir kurz die verschiedenen gegenseitigen Lagen von drei Ebenen erörtern; letztere mögen kurz $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$ heissen und durch die Gleichungen

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2,$$
$$A_3x + B_3y + C_3z = D_3,$$

gegeben sein. Im Allgemeinen schneidet jede dieser Ebenen die beiden anderen und es bezeichne g_1 den Durchschnitt von $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$, g_2 den von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_3$, endlich g_3 den von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$; die Gleichungen dieser drei Geraden sind

$$\left.\begin{aligned}(A_2C_3 - A_3C_2)x + (B_2C_3 - B_3C_2)y &= D_2C_3 - D_3C_2\\ (A_2B_3 - A_3B_2)x + (C_2B_3 - C_3B_2)z &= D_2B_3 - D_3B_2\end{aligned}\right\}(g_1)$$
$$\left.\begin{aligned}(A_3C_1 - A_1C_3)x + (B_3C_1 - B_1C_3)y &= D_3C_1 - D_1C_3\\ (A_3B_1 - A_1B_3)x + (C_3B_1 - C_1B_3)z &= D_3B_1 - D_1B_3\end{aligned}\right\}(g_2)$$
$$\left.\begin{aligned}(A_1C_2 - A_2C_1)x + (B_1C_2 - B_2C_1)y &= D_1C_2 - D_2C_1\\ (A_1B_2 - A_2B_1)x + (C_1B_2 - C_2B_1)z &= D_1B_2 - D_2B_1\end{aligned}\right\}(g_3)$$

Ferner schneiden sich diese drei Geraden, wie die Ebenen selbst, in einem Punkte $x_0y_0z_0$, dessen Coordinaten allen vorhandenen Gleichungen genügen; man findet hieraus:

$$x_0 = \frac{D_1(B_2C_3 - B_3C_2) + D_2(B_3C_1 - B_1C_3) + D_3(B_1C_2 - B_2C_1)}{A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1)},$$

$$y_0 = \frac{D_1(C_2A_3 - C_3A_2) + D_2(C_3A_1 - C_1A_3) + D_3(C_1A_2 - C_2A_1)}{B_1(C_2A_3 - C_3A_2) + B_2(C_3A_1 - C_1A_3) + B_3(C_1A_2 - C_2A_1)},$$

$$z_0 = \frac{D_1(A_2B_3 - A_3B_2) + D_2(A_3B_1 - A_1B_3) + D_3(A_1B_2 - A_2B_1)}{C_1(A_2B_3 - A_3B_2) + C_2(A_3B_1 - A_1B_3) + C_3(A_1B_2 - A_2B_1)}.$$

Die Nenner dieser Brüche sind identisch und nur in drei verschiedenen Formen dargestellt worden, um den symmetrischen Bau der Gleichungen hervortreten zu lassen; zur Abkürzung stellen wir die letzteren Formeln in folgender Weise dar:

$$x_0 = \frac{A_0}{N}, \qquad y_0 = \frac{B_0}{N}, \qquad z_0 = \frac{C_0}{N}.$$

Ausser dem besprochenen allgemeinen Falle können nun folgende vier specielle Fälle vorkommen.

Sind alle drei Ebenen parallel, so hat man

$$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2 = A_3 : B_3 : C_3$$

folglich

$$\frac{B_2}{B_3} = \frac{C_2}{C_3}, \qquad \frac{B_3}{B_1} = \frac{C_3}{C_1}, \qquad \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

oder

$$B_2C_3 - B_3C_2 = B_3C_1 - B_1C_3 = B_1C_2 - B_2C_1 = 0;$$

in diesem Falle verschwindet der gemeinschaftliche Nenner N und es wird $x_0 = \infty$, $y_0 = \infty$, $z_0 = \infty$.

Sind nur zwei Ebenen parallel, etwa $\mathfrak{E}_1 \parallel \mathfrak{E}_2$, so erhalten die Quotienten

$$\frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{B_2}{B_1}, \quad \frac{C_2}{C_1}$$

einen gemeinschaftlichen Werth, den wir $\varkappa$ nennen wollen; die Substitution $A_2 = \varkappa A_1$, $B_2 = \varkappa B_1$, $C_2 = \varkappa C_1$ verwandelt die Gleichungen für g_1 in die folgenden

$$(A_1C_3 - A_3C_1)x + (B_1C_3 - B_3C_1)y = \frac{1}{\varkappa} D_2C_3 - D_3C_1,$$

$$(A_1B_3 - A_3B_1)x + (C_1B_3 - C_3B_1)z = \frac{1}{\varkappa} D_2B_3 - D_3B_1;$$

ihr Vergleich mit den für g_2 geltenden Gleichungen zeigt, dass $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ von $\mathfrak{E}_3$ in den parallelen Geraden g_1 und g_2 geschnitten werden. Mittelst derselben Substitution ergiebt sich gleichzeitig $N = 0$, also $x_0 = \infty$, $y_0 = \infty$, $z_0 = \infty$.

Ist nur $N = 0$, ohne dass irgend zwei der drei Ebenen parallel liegen, so finden gleichzeitig die folgenden Beziehungen statt

$$6)\quad \frac{A_2 C_3 - A_3 C_2}{B_2 C_3 - B_3 C_2} = \frac{A_3 C_1 - A_1 C_3}{B_3 C_1 - B_1 C_3} = \frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1},$$

$$7)\quad \frac{A_2 B_3 - A_3 B_2}{B_2 C_3 - B_3 C_2} = \frac{A_3 B_1 - A_1 B_3}{B_3 C_1 - B_1 C_3} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1};$$

man erkennt hieraus, dass sich die Ebenen in drei parallelen Geraden schneiden; zugleich ist $x_0 = \infty$, $y_0 = \infty$, $z_0 = \infty$.

Wenn kein Paar der Ebenen parallel liegt, wenn ferner $N = 0$ ist und einer der Zähler A_0, B_0, C_0, etwa A_0 verschwindet, so gelten erstens wieder die Gleichungen 6) und 7); aus der Gleichung $A_0 = 0$ folgt weiter

$$8)\quad \frac{D_2 C_3 - D_3 C_2}{B_2 C_3 - B_3 C_2} = \frac{D_3 C_1 - D_1 C_3}{B_3 C_1 - B_1 C_3} = \frac{D_1 C_2 - D_2 C_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1},$$

und wenn man diese Beziehungen durch die Gleichungen 6) und 7) dividirt

$$\frac{D_2 C_3 - D_3 C_2}{A_2 C_3 - A_3 C_2} = \frac{D_3 C_1 - D_1 C_3}{A_3 C_1 - A_1 C_3} = \frac{D_1 C_2 - D_2 C_1}{A_1 C_2 - A_2 C_1},$$

$$\frac{D_2 C_3 - D_3 C_2}{A_2 B_3 - A_3 B_2} = \frac{D_3 C_1 - D_1 C_3}{A_3 B_1 - A_1 B_3} = \frac{D_1 C_2 - D_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1},$$

d. h. nach gehöriger Reduction $B_0 = 0$ und $C_0 = 0$. Schreibt man endlich statt der ersten Gleichung $A_0 = 0$

$$9)\quad \frac{D_2 B_3 - D_3 B_2}{C_2 B_3 - C_3 B_2} = \frac{D_3 B_1 - D_1 B_3}{C_3 B_1 - C_1 B_3} = \frac{D_1 B_2 - D_2 B_1}{C_1 B_2 - C_2 B_1},$$

so erkennt man aus Nr. 6) und Nr. 8) die Identität der xy-Projectionen von g_1, g_2, g_3, sowie aus Nr. 7) und Nr. 9) die Identität der xz-Projectionen dieser Geraden. Hieraus zusammen folgt, dass sich für $N = 0$ und $A_0 = 0$ die drei Ebenen in einer und derselben Geraden schneiden; zugleich erhalten x_0, y_0, z_0 den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$, welcher sich im vorliegenden Falle durch die Bemerkung erklärt, dass jeder beliebige Punkt der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der Ebenen als ein Durchschnittspunkt der letzteren gelten kann.

Viertes Capitel.

Transformation der Coordinaten.

---

§. 24.

Die allgemeinen Fundamentalformeln.

Wenn drei in einem Punkte zusammentreffende Ebenen auf ein beliebiges Coordinatensystem bezogen, also ihrer Lage nach gegeben sind, so können dieselben auch als neue Coordinatenebenen genommen werden und es entsteht dann die Frage nach den neuen Coordinaten, welche irgend ein Punkt im Raume bei seiner Beziehung auf das zweite Coordinatensystem erhält. Die primitiven Coordinaten des Punktes P mögen x, y, z, die secundären Coordinaten desselben x', y', z' heissen, ferner nennen wir a, b, c die auf das ursprüngliche System bezogenen Coordinaten des neuen Coordinatenanfanges, endlich p_x, p_y, p_z die auf den Ebenen yz, xz, xy errichteten Normalen, durch deren Richtungen sich die Stellungen der entsprechenden Ebenen bestimmen.

I. Am einfachsten gestaltet sich die Coordinatenverwandlung in dem Falle, wo die neuen Ebenen parallel zu den ursprünglichen liegen, also auch die gleichnamigen Achsen beider Systeme parallel sind; wir nehmen dann die positiven x' in demselben Sinne (d. h. nach derselben Gegend des Raumes hin), wie die positiven x, ebenso $+y'$ im Sinne von $+y$ und $+z'$ im Sinne von $+z$. Hieraus folgt unmittelbar, dass beide Coordinatensysteme zur Congruenz gebracht werden können, wenn man die yz-Ebene in der Richtung der positiven x parallel mit sich selbst um a verschiebt und wenn man gleichzeitig mit der xz-Ebene eine ähnliche Verschiebung um b, sowie mit der xy-Ebene eine Verschiebung um c vornimmt. Demgemäss hat man die Gleichungen

$$1) \qquad x = a + x', \qquad y = b + y', \qquad z = c + z',$$

welche ganz allgemein giltig sind, wenn man immer die möglichen verschiedenen Zeichen der darin vorkommenden Coordinaten berücksichtigt.

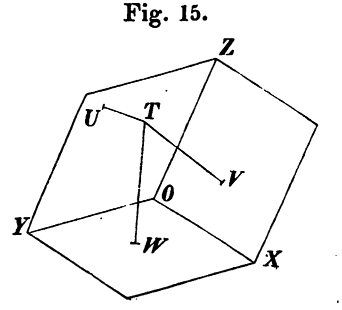
II. Wir betrachten zweitens den Fall, wo beide Coordinatensysteme einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt besitzen, ohne dass aber irgend eine der neuen Coordinatenachsen mit einer des primitiven Systemes zusammenfällt. Wo nun auch der Punkt xyz oder $x'y'z'$ liegen möge, so ist doch sein Radiusvector r immer derselbe, gleichgiltig, ob man ihn auf das eine oder andere Coordinatensystem bezieht; eben desswegen ist auch die rechtwinklige Projection von r auf irgend eine Gerade s in beiden Fällen die nämliche, was wir durch die (wegen $r = r'$) identische Gleichung $r \cos(rs) = r' \cos(r's)$ ausdrücken können. Projiciren wir statt r die aus x, y, z bestehende gebrochene Linie, ebenso statt r' die aus x', y', z' zusammengesetzte gebrochene Linie, so verwandelt sich die vorige Gleichung in die nachstehende:

$$2)\quad \begin{cases} x\cos(xs) + y\cos(ys) + z\cos(zs) \\ = x'\cos(x's) + y'\cos(y's) + z'\cos(z's), \end{cases}$$

welche als die Quelle aller folgenden Formeln zu betrachten ist.

Zunächst wollen wir die beliebige Gerade s der Reihe nach mit den auf den Ebenen yz, xz, xy errichteten Senkrechten p_x, p_y, p_z zusammenfallen lassen. Dabei unterscheiden wir an diesen Normalen eine positive und negative Seite; die positive Seite von p_x soll nämlich diejenige sein, welche nach der positiven Seite der x gerichtet ist, in gleicher Weise nehmen wir die positiven Seiten von p_y und p_z im Sinne der positiven y resp. z. Dies lässt sich auch so ausdrücken: wenn man von einem Punkte T, dessen drei primitive Coordinaten positiv sind, welcher also innerhalb des von den positiven Theilen der Coordinatenebenen gebildeten Körperwinkel liegt, Senkrechte TU, TV, TW auf die Coordinatenebenen herablässt, so ist $p_x = UT$ positiv in der Richtung von U nach T, und dem entsprechend $p_y = VT$, $p_z = WT$. Ferner soll im Folgenden der Winkel zwischen zwei Geraden immer als der Winkel zwischen deren positiven Theilen verstanden und von 0^0 bis 180^0 gezählt werden. Hiernach ist

Fig. 15.



$$\begin{array}{ll} \text{für } s = p_x, & \angle(ys) = \angle(zs) = 90^0, \\ \text{,, } s = p_y, & \angle(xs) = \angle(zs) = 90^0, \\ \text{,, } s = p_z, & \angle(xs) = \angle(ys) = 90^0, \end{array}$$

und aus der Gleichung 2) fliessen jetzt die folgenden Relationen

$$3) \begin{cases} x \cos(xp_x) = x' \cos(x'p_x) + y' \cos(y'p_x) + z' \cos(z'p_x), \\ y \cos(yp_y) = x' \cos(x'p_y) + y' \cos(y'p_y) + z' \cos(z'p_y), \\ z \cos(zp_z) = x' \cos(x'p_z) + y' \cos(y'p_z) + z' \cos(z'p_z). \end{cases}$$

Für den Gebrauch dieser Transformationsformeln ist nur zu merken, dass erstens die linker Hand vorkommenden Winkel (xp_x), (yp_y), (zp_z) als bekannt anzusehen sind, weil sie aus den bekannten Coordinatenwinkeln (xy), (xz), (yz) abgeleitet werden können (§. 14, Nr. 13, 14, 15), und dass zweitens die rechter Hand vorkommenden neun Winkel gegeben sein müssen, weil durch sie die Lage der neuen Coordinatenachsen gegen die Normalen p_x, p_y, p_z festgestellt wird. Uebrigens bestehen zwischen den genannten neun Winkeln noch drei Gleichungen, nämlich die drei Relationen, welche überhaupt für je drei Richtungswinkel gelten (§. 4, Nr. 7).

Will man die Anwendung der Normalen p_x, p_y, p_z vermeiden und unmittelbar die Winkel zwischen den secundären und primitiven Achsen in Rechnung bringen, so braucht man die willkürliche Gerade s nur der Reihe nach mit den ursprünglichen Achsen der x, y und z zusammenfallen zu lassen. Die Gleichung 2) liefert dann die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} & x + y \cos(yx) + z \cos(zx) \\ & \qquad = x' \cos(x'x) + y' \cos(y'x) + z' \cos(z'x), \\ & x \cos(xy) + y + z \cos(zy) \\ & \qquad = x' \cos(x'y) + y' \cos(y'y) + z' \cos(z'y), \\ & x \cos(xz) + y \cos(yz) + z \\ & \qquad = x' \cos(x'z) + y' \cos(y'z) + z' \cos(z'z); \end{aligned}$$

bezeichnen wir, wie früher, die Cosinus der Coordinatenwinkel (yz), (xz), (xy) mit α, β, γ, den Ausdruck

$$1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$$

mit δ^2, und setzen wir ferner abkürzend

$$\begin{aligned} x' \cos(x'x) + y' \cos(y'x) + z' \cos(z'x) &= X, \\ x' \cos(x'y) + y' \cos(y'y) + z' \cos(z'y) &= Y, \\ x' \cos(x'z) + y' \cos(y'z) + z' \cos(z'z) &= Z, \end{aligned}$$

so führt die Auflösung der vorigen drei Gleichungen zu den folgenden Transformationsformeln:

$$4)\quad \begin{cases} x = \dfrac{(1-\alpha^2)X-(\gamma-\alpha\beta)Y-(\beta-\alpha\gamma)Z}{\delta^2}, \\ y = \dfrac{(1-\beta^2)Y-(\alpha-\beta\gamma)Z-(\gamma-\alpha\beta)X}{\delta^2}, \\ z = \dfrac{(1-\gamma^2)Z-(\beta-\alpha\gamma)X-(\alpha-\beta\gamma)Y}{\delta^2}. \end{cases}$$

'on den hierin vorkommenden zwölf Winkeln sind zunächst (xy), $z)$ und (yz) unmittelbar bekannt; jede der drei Gruppen

$$\begin{matrix} (x'x), & (x'y), & (x'z), \\ (y'x), & (y'y), & (z'z), \\ (z'x), & (z'y), & (z'z), \end{matrix}$$

ıthält die Richtungswinkel einer secundären Achse gegen die primi-ren Achsen, zwischen den Winkeln einer Gruppe besteht also jedes-al die überhaupt für drei Richtungswinkel geltende Gleichung, und ımnach dürfen aus jeder Gruppe nur zwei Winkel gegeben werden.

III. Wenn das neue Coordinatensystem dem ursprünglichen ›der parallel liegt, noch denselben Anfangspunkt besitzt, so ınn man sich durch den Coordinatenanfang O' des secundären rstemes ein drittes System gelegt denken, dessen Achsen den imitiven Coordinatenachsen in gleichem Sinne parallel sind. Die ›ordinaten des Punktes xyz in Beziehung auf dieses inter-ediäre System mögen x_0, y_0, z_0 heissen; es ist dann

$$5)\qquad x = a + x_0, \qquad y = b + y_0, \qquad z = c + z_0;$$

s intermediäre System der $x_0 y_0 z_0$ hat ferner mit dem System r $x'y'z'$ den Coordinatenanfang gemein und daher sind auf dieses ɜ Formeln 3) oder 4) anwendbar, indem man x_0, y_0, z_0 für x, y, z hreibt. Weil ferner $x_0 // x$, $y_0 // y$, $z_0 // z$, so stimmen die Winkel $'x_0)$, $(x'y_0)$ etc. mit den Winkeln $(x'x)$, $(x'y)$ etc. überein und bedarf daher überall, wo Winkel vorkommen, nicht mehr der dices. Nach Ermittelung von x_0, y_0, z_0 geben nun die Formeln x, y, z ausgedrückt durch x', y', z'; also erstens, wenn man die chtungen der neuen Achsen durch die Winkel zwischen ihnen d den Normalen der ursprünglichen Coordinatenebenen fixirt:

$$6)\quad \begin{cases} x = a + \dfrac{x'\cos(x'p_x) + y'\cos(y'p_x) + z'\cos(z'p_x)}{\cos(xp_x)}, \\ y = b + \dfrac{x'\cos(x'p_y) + y'\cos(y'p_y) + z'\cos(z'p_y)}{\cos(yp_y)}, \\ z = c + \dfrac{x'\cos(x'p_z) + y'\cos(y'p_z) + z'\cos(z'p_z)}{\cos(zp_z)}; \end{cases}$$

zweitens, wenn man die Winkel zwischen den secundären und primären Achsen in Rechnung bringt und die bereits in II. erwähnten Abkürzungen benutzt:

$$7)\quad \begin{cases} x = a + \dfrac{(1-\alpha^2)X - (\gamma-\alpha\beta)Y - (\beta-\alpha\gamma)Z}{\delta^2}, \\ y = b + \dfrac{(1-\beta^2)Y - (\alpha-\beta\gamma)Z - (\gamma-\alpha\beta)X}{\delta^2}, \\ z = c + \dfrac{(1-\gamma^2)Z - (\beta-\alpha\gamma)X - (\alpha-\beta\gamma)Y}{\delta^2}. \end{cases}$$

Diese ganz allgemeinen Formeln können auf ähnliche Weise angewendet werden, wie die entsprechenden specielleren Formeln der analytischen Geometrie der Ebene; hat man nämlich zwischen den drei Coordinaten x, y, z eines Punktes eine oder zwei Gleichungen, wodurch entweder eine Fläche oder eine Linie charakterisirt wird, so führt die Substitution der für x, y, z angegebenen Werthe zu eben so viel neuen Gleichungen zwischen x', y', z', d. h. zu den Gleichungen der nämlichen Gebilde, bezogen auf das neue Coordinatensystem. Nicht überflüssig ist hierbei die Bemerkung, dass die Werthe von x, y, z nur die ersten Potenzen von x', y', z' und keine Produkte von zweien oder dreien dieser Grössen enthalten; in Folge dieses Umstandes ist jede resultirende Gleichung zwischen x', y', z' immer von demselben Grade wie die ursprüngliche Gleichung zwischen x, y und z.

§. 25.

Transformation rechtwinkliger Systeme.

Die überaus häufige und meistens bequeme Anwendung des rechtwinkligen Coordinatensystems erheischt noch eine nähere Untersuchung des speciellen Falles, wo die Systeme xyz und $x'y'z'$ rechtwinklig sind und einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt besitzen. Es ist dann $a = b = c = 0$, $\angle(xy) = \angle(xz) = \angle(yz) = 90^0$, und überhaupt für jede beliebige Gerade s

$$\angle(sp_x) = \angle(sx), \quad \angle(sp_y) = \angle(sy), \quad \angle(sp_z) = \angle(sz);$$

die Formeln 6) und 7) des vorigen Paragraphen geben jetzt übereinstimmend

$$1)\quad \begin{cases} x = x' \cos(x'x) + y' \cos(y'x) + z' \cos(z'x), \\ y = x' \cos(x'y) + y' \cos(y'y) + z' \cos(z'y), \\ z = x' \cos(x'z) + y' \cos(y'z) + z' \cos(z'z). \end{cases}$$

Zwischen den Cosinus der neun vorkommenden Winkel finden

folgende Beziehungen statt; erstens hat man für die drei Richtungswinkel von jeder der neuen Achsen

$$2)\quad \begin{cases} \cos^2(x'x) + \cos^2(x'y) + \cos^2(x'z) = 1, \\ \cos^2(y'x) + \cos^2(y'y) + \cos^2(y'z) = 1, \\ \cos^2(z'x) + \cos^2(z'y) + \cos^2(z'z) = 1; \end{cases}$$

weil ferner die neuen Coordinatenwinkel $(x'y')$, $(x'z')$ und $(y'z')$ rechte Winkel sein sollen, so ist nach Formel 9) in §. 5

$$3)\quad \begin{cases} \cos(x'x)\cos(y'x) + \cos(x'y)\cos(y'y) + \cos(x'z)\cos(y'z) = 0, \\ \cos(x'x)\cos(z'x) + \cos(x'y)\cos(z'y) + \cos(x'z)\cos(z'z) = 0, \\ \cos(y'x)\cos(z'x) + \cos(y'y)\cos(z'y) + \cos(y'z)\cos(z'z) = 0. \end{cases}$$

Umgekehrt kann man auch von dem Systeme $x'y'z'$ zu dem Systeme xyz übergehen, indem man jenes als das primitive und dieses als das secundäre betrachtet; hierzu bedarf es keiner neuen Rechnung, sondern nur einer gegenseitigen Vertauschung von x mit x', y mit y' und z mit z'; die resultirenden Formeln sind:

$$4)\quad \begin{cases} x' = x\cos(xx') + y\cos(yx') + z\cos(zx'), \\ y' = x\cos(xy') + y\cos(yy') + z\cos(zy'), \\ z' = x\cos(xz') + y\cos(yz') + z\cos(zz'); \end{cases}$$

und zwar gelten für die Richtungswinkel der Achsen von x, y, z gegen die Achsen x', y', z' die Gleichungen

$$5)\quad \begin{cases} \cos^2(xx') + \cos^2(xy') + \cos^2(xz') = 1, \\ \cos^2(yx') + \cos^2(yy') + \cos^2(yz') = 1, \\ \cos^2(zx') + \cos^2(zy') + \cos^2(zz') = 1, \end{cases}$$

endlich, weil die Winkel (xy), (xz) und (yz) rechte Winkel sind,

$$6)\quad \begin{cases} \cos(xx')\cos(yx') + \cos(xy')\cos(yy') + \cos(xz')\cos(yz') = 0, \\ \cos(xx')\cos(zx') + \cos(xy')\cos(zy') + \cos(xz')\cos(zz') = 0, \\ \cos(yx')\cos(zx') + \cos(yy')\cos(zy') + \cos(yz')\cos(zz') = 0. \end{cases}$$

Um kurz sein zu können, bezeichnen wir die Cosinus der Richtungswinkel von x' gegen die Achsen der x, y, z der Reihe nach mit α, α', α'', und dem entsprechend die Cosinus der Richtungswinkel von y' und z' mit β, β', β'' und γ, γ', γ''; die bisherigen Gleichungen lauten dann:

$$7)\quad \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \\ y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ z = \alpha'' x' + \beta'' x' + \gamma'' z'; \end{cases}$$

$$8)\quad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0, \\ \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0, \\ \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0; \end{cases}\quad 9)$$

und umgekehrt

$$10) \quad \begin{cases} x' = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, \\ y' = \beta x + \beta' y + \beta'' z, \\ z' = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z; \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1; \end{cases} \qquad \begin{rcases} \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \\ \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0, \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0. \end{rcases} 12)$$

An dieses Formelnsystem knüpfen sich drei wesentliche Bemerkungen.

a. Durch die Gleichungen 8) und 9) ist ausgesprochen, dass die beiden Coordinatensysteme rechtwinklig sind; das Nämliche liegt in den Gleichungen 11) und 12) ausgedrückt, mithin müssen diese sich aus jenen herleiten lassen. Es ist nichts weniger als überflüssig, dies direct nachzuweisen, weil man dabei noch einige andere brauchbare Relationen gewinnt.

Aus den beiden ersten Gleichungen in Nr. 9) findet man durch Entwickelung von α' und α''

$$\alpha' = \frac{\beta''\gamma - \beta\gamma''}{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'}\alpha, \qquad \alpha'' = \frac{\beta\gamma' - \beta'\gamma}{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'}$$

und durch Substitution in die erste der Gleichungen 8)

$$\{(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')^2 + (\beta''\gamma - \beta\gamma'')^2 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2\}\,\alpha^2 = (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')^2.$$

Die linke Seite der vorstehenden Gleichung ist identisch mit der Differenz

$$(\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2)(\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2) - (\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'')^2,$$

deren Betrag, zufolge der übrigen Gleichungen in Nr. 8), die Einheit ausmacht; die vorige Gleichung vereinfacht sich demnach zu

$$\alpha^2 = (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')^2,$$

und daraus folgen nach dem Obigen die analogen Gleichungen

$$\alpha'^2 = (\beta''\gamma - \beta\gamma'')^2, \qquad \alpha''^2 = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2.$$

Aehnliche Beziehungen sind leicht für β, β', β'' und $\gamma, \gamma', \gamma''$ zu erhalten, überhaupt ergiebt sich folgendes System von neuen Gleichungen:

$$13) \begin{cases} \alpha = \pm(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'), & \beta = \pm(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha'), & \gamma = \pm(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'), \\ \alpha' = \pm(\beta''\gamma - \beta\gamma''), & \beta' = \pm(\gamma''\alpha - \gamma\alpha''), & \gamma' = \pm(\alpha''\beta - \alpha\beta''), \\ \alpha'' = \pm(\beta\gamma' - \beta'\gamma), & \beta'' = \pm(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha), & \gamma'' = \pm(\alpha\beta' - \alpha'\beta). \end{cases}$$

Aus der ersten und zweiten der Gleichungen 8) ziehen wir ferner

$$(\alpha'^2 + \alpha''^2)(\beta'^2 + \beta''^2) = (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)$$

oder

$$\alpha'^2\beta'^2 + \alpha'^2\beta''^2 + \alpha''^2\beta'^2 + \alpha''^2\beta''^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2\beta^2 = 1;$$

substituirt man für $\alpha^2\beta^2$ seinen der ersten Gleichung in Nr. 9) entnommenen Werth, nämlich

$$\alpha'^2\beta''^2+2\alpha'\alpha''\beta'\beta''+\alpha''^2+\beta''^2,$$

so wird aus der vorigen Gleichung

$$\alpha^2+\beta^2+(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2=1$$

d. i. unter Rücksicht auf die dritte Gleichung in Nr. 13)

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Auf ähnliche Weise, wie hier die erste Gleichung in Nr. 11) abgeleitet wurde, lassen sich die übrigen Gleichungen derselben Gruppe beweisen.

Setzen wir in der soeben entwickelten Formel für α, β, γ ihre nach Nr. 13) bestimmten Werthe, so erhalten wir

$$(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')^2+(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')^2+(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2=1;$$

die linke Seite ist identisch mit

$$(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)-(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')^2$$

oder vermöge der schon bewiesenen zweiten und dritten Gleichung in Nr. 11) einerlei mit

$$1-(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')^2;$$

nach Substitution dieses Ausdruckes geht die letzte Gleichung in die dritte Gleichung der Gruppe 12) über; auf analoge Weise ergeben sich die übrigen Gleichungen derselben Gruppe.

b. Eine zweite Bemerkung bezieht sich auf die Frage, ob die Achsen in beiden rechtwinkligen Coordinatensystemen in derselben Ordnung auf einander folgen oder nicht. Denken wir uns nämlich das secundäre System so weit herumgewendet, dass die positive Seite der x-Achse mit der positiven Seite der x'-Achse zusammenfällt, so können wir durch Drehung des secundären Systemes um die x'-Achse auch den positiven Theil der y'-Achse mit dem positiven Theile der y-Achse zur Coïncidenz bringen, und gleichzeitig muss nun die z'-Achse in die z-Achse zu liegen kommen. Dabei sind aber zwei Fälle zu unterscheiden; nämlich entweder fällt die positive Seite der z'-Achse mit der positiven Seite der z-Achse zusammen, oder umgekehrt ist es die negative Seite der z'-Achse, welche auf die positive Seite der z-Achse zu liegen kommt. Im ersten Falle lassen sich beide Systeme zur Congruenz bringen und mögen h o m o l o g e Coordinatensysteme heissen, im zweiten Falle können sie nur als symmetrisch-gleiche betrachtet werden, was durch die Bezeichnung s y m m e t r i s c h e Coordinatensysteme ausgedrückt werden soll.

Die Formeln 7), 8), 9) beziehen sich, wie aus ihrer Herleitung unmittelbar erhellt, auf beide Arten von Coordinatensystemen, dasselbe gilt von den abgeleiteten Gleichungen 13), letztere enthalten aber das Mittel zur analytischen Sonderung der genannten Fälle, und zwar sind es die doppelten Vorzeichen, wodurch die Unterscheidung herbeigeführt wird. Setzen wir

$$\alpha = \cos 0^0 = 1, \qquad \alpha' = \alpha'' = \cos 90^0 = 0,$$

so fällt x' mit x zusammen, d. h. es wird

$$x' = x;$$

nehmen wir gleichzeitig

$$\beta = 0, \qquad \beta' = 1, \qquad \beta'' = 0,$$

so wird

$$y' = y;$$

bei zwei homologen Systemen muss nun z' mit z zusammenfallen, also

$$\gamma = 0, \qquad \gamma' = 0, \qquad \gamma'' = +1,$$
$$z' = z$$

werden, bei zwei symmetrischen Systemen dagegen würde sich

$$\gamma = 0, \qquad \gamma' = 0, \qquad \gamma'' = -1,$$
$$z' = -z$$

ergeben müssen. In der That liefert die letzte Gleichung in Nr. 13) vermöge der für $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ angenommenen Specialwerthe $\gamma'' = \pm 1$, und der Vergleich mit dem Vorigen lehrt nun, dass das obere Zeichen für homologe, das untere für symmetrische Coordinatensysteme gilt. Durch die nämlichen Substitutionen überzeugt man sich leicht, dass in den Gleichungen 13) überhaupt immer die positiven Vorzeichen den homologen und die negativen den symmetrischen Coordinatensystemen entsprechen.

c. Da zwischen den neun Cosinus $\alpha, \alpha', \ldots \gamma''$ sechs Gleichungen bestehen, so dürfen nicht mehr als drei derselben willkürlich angenommen werden und zwar nur solche, die nicht gleichzeitig in einer der sechs Gleichungen 8) oder 11) vorkommen. Drei derartige Grössen sind z. B. α, β', γ''; die Bestimmung der übrigen sechs Grössen geschieht dann auf folgende Weise.

Von der Summe der ersten und zweiten Gleichung in Nr. 8) subtrahiren wir die dritte Gleichung in Nr. 11), ebenso von der Summe der ersten und dritten Gleichung in Nr. 8) die zweite Gleichung in 10), endlich von der Summe der zweiten und dritten

Gleichung in 8) die erste Gleichung in 10); wir erhalten so die Relationen

$$14)\quad \begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\alpha'^2+\beta'^2=1+\gamma''^2, \\ \alpha^2+\gamma^2+\alpha''^2+\gamma''^2=1+\beta'^2, \\ \beta'^2+\gamma'^2+\beta''^2+\gamma''^2=1+\alpha^2, \end{cases}$$

n denen rechter Hand nur bekannte Grössen vorkommen. Nach Nr. 13) haben wir ferner für homologe Systeme:

$$15)\quad \alpha\beta'-\alpha'\beta=\gamma'',\quad \gamma''\alpha-\gamma\alpha''=\beta',\quad \beta'\gamma''-\beta''\gamma'=\alpha,$$

lagegen für symmetrische Systeme:

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta=-\gamma'',\quad \gamma''\alpha-\gamma\alpha''=-\beta',\quad \beta'\gamma''-\beta''\gamma'=-\alpha,$$

o dass es nur einer Aenderung der Vorzeichen von α, β', γ'' bedarf, um zwei homologe durch zwei symmetrische Systeme zu ersetzen. Subtrahiren und addiren wir das Doppelte der Gleichungen 15) zu den Gleichungen 14), so finden wir

$$\begin{aligned} (\alpha-\beta')^2+(\beta+\alpha')^2&=(1-\gamma'')^2, \\ (\alpha+\beta')^2+(\beta-\alpha')^2&=(1+\gamma'')^2; \\ (\alpha-\gamma'')^2+(\alpha''+\gamma)^2&=(1-\beta')^2, \\ (\alpha+\gamma'')^2+(\alpha''-\gamma)^2&=(1+\beta')^2; \\ (\beta'-\gamma'')^2+(\gamma'+\beta'')^2&=(1-\alpha)^2, \\ (\beta'+\gamma'')^2+(\gamma'-\beta'')^2&=(1+\beta)^2; \end{aligned}$$

lie linker Hand zuerst stehenden Ausdrücke sind bekannt, die vorigen Gleichungen führen daher zu den folgenden

$$\begin{aligned} \beta+\alpha'&=\sqrt{(1-\gamma'')^2-(\alpha-\beta')^2}, \\ \beta-\alpha'&=\sqrt{(1+\gamma'')^2-(\alpha+\beta')^2}; \\ \alpha''+\gamma&=\sqrt{(1-\beta')^2-(\alpha-\gamma'')^2}, \\ \alpha''-\gamma&=\sqrt{(1+\beta')^2-(\alpha+\gamma'')^2}; \\ \gamma'+\beta''&=\sqrt{(1-\alpha)^2-(\beta'-\gamma'')^2}, \\ \gamma'-\beta''&=\sqrt{(1+\alpha)^2-(\beta'+\gamma'')^2}. \end{aligned}$$

Man übersieht auf der Stelle, wie sich hieraus die sechs Unbekannten β, α', α'', γ, γ', β'' durch Addition und Subtraction ableiten lassen; vorher wollen wir aber bemerken, dass die unter den Wurzelzeichen stehenden Quadratdifferenzen in Producte zerlegbar sind; setzen wir nämlich zur Abkürzung

$$16)\quad \begin{cases} 1+\alpha-\beta'-\gamma''=A, \\ 1-\alpha+\beta'-\gamma''=B, \\ 1-\alpha-\beta'+\gamma''=C, \\ 1+\alpha+\beta'+\gamma''=D, \end{cases}$$

o lauten die obigen Gleichungen

$$\beta + \alpha' = \sqrt{AB}, \quad \alpha'' + \gamma = \sqrt{AC}, \quad \gamma' + \beta'' = \sqrt{BC},$$
$$\beta - \alpha' = \sqrt{CD}, \quad \alpha'' - \gamma = \sqrt{BD}, \quad \gamma' - \beta'' = \sqrt{AD}.$$

Die Werthe der Unbekannten sind hiernach für homologe Systeme:

$$17) \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}(\sqrt{AB} + \sqrt{CD}), & \gamma = \frac{1}{2}(\sqrt{AC} - \sqrt{BD}), \\ \alpha' = \frac{1}{2}(\sqrt{BA} - \sqrt{CD}), & \gamma' = \frac{1}{2}(\sqrt{BC} + \sqrt{AD}), \\ \alpha'' = \frac{1}{2}(\sqrt{CA} + \sqrt{BD}), & \beta'' = \frac{1}{2}(\sqrt{CB} - \sqrt{AD}). \end{cases}$$

Nach der früheren Bemerkung führt die Aenderung der Vorzeichen von α, β', γ'' zu den entsprechenden Formeln für symmetrische Systeme. Setzen wir demgemäss zur Abkürzung:

$$18) \begin{cases} 1 - \alpha + \beta' + \gamma'' = A_1, \\ 1 + \alpha - \beta' + \gamma'' = B_1, \\ 1 + \alpha + \beta' - \gamma'' = C_1, \\ 1 - \alpha - \beta' - \gamma'' = D_1, \end{cases}$$

so gelten für symmetrische Coordinatensysteme die Formeln:

$$19) \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}(\sqrt{A_1 B_1} + \sqrt{C_1 D_1}), & \gamma = \frac{1}{2}(\sqrt{A_1 C_1} - \sqrt{B_1 D_1}), \\ \alpha' = \frac{1}{2}(\sqrt{B_1 A_1} - \sqrt{C_1 D_1}), & \gamma' = \frac{1}{2}(\sqrt{B_1 C_1} + \sqrt{A_1 D_1}), \\ \alpha'' = \frac{1}{2}(\sqrt{C_1 A_1} + \sqrt{B_1 D_1}), & \beta'' = \frac{1}{2}(\sqrt{C_1 B_1} - \sqrt{A_1 D_1}). \end{cases}$$

Hinsichtlich der Realität der sechs Grössen β, γ, α', γ', α'', β'' bemerken wir noch Folgendes. In den Gleichungen 18) kommen alle Combinationen zu je zweien ans A, B, C, D vor; besitzen nun irgend zwei dieser Grössen entgegengesetzte Vorzeichen, so wird eine der Unbekannten β, γ, α', γ', α'', β'' imaginär, mithin das betreffende Coordinatensystem unmöglich. Zur Realität der verlangten Transformation gehört also, dass die Grössen A, B, C, D dasselbe Vorzeichen haben, und zwar kann dieses nur das positive Zeichen sein, weil $A + B + C + D = +4$ ist; dabei bleibt aber die Möglichkeit, dass die eine oder andere der genannten Grössen verschwindet. Die Bedingung für die Realität der ersten Transformation besteht also darin, dass keine der Grössen A, B, C, D negativ ist. Eine ähnliche Bemerkung gilt für die zweite Transformation mittelst der in 18) und 19) angegebenen Werthe.

§. 26.

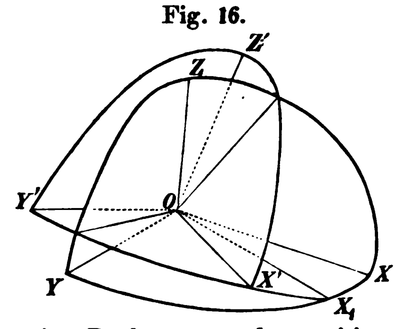
Anderes Verfahren zur Transformation rechtwinkliger Systeme.

Die Coordinatenverwandlung nach den im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln hat in manchen Fällen, bei denen es

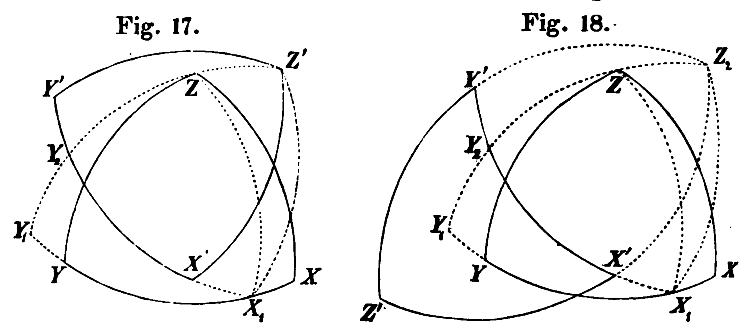
icht auf eine sehr symmetrische Rechnung ankommt, die Unbequemlichkeit, dass ausser den gegebenen drei Grössen (α, β', γ'') noch zehn andere (A, B, C, D, β, γ, α', γ', α'', β'') im Auge behalten werden müssen, und es ist daher nicht überflüssig, ein anderes Formelnsystem kennen zu lernen, worin ausser den primitiven und secundären Coordinaten nur noch drei Winkel vorkommen, welche die Lage des neuen Coordinatensystems gegen das ursprüngliche feststellen.

Die Ebene $x'y'$ schneidet die Ebene xy in einer Geraden, die wir OX_1 nennen wollen und deren Lage durch den Winkel XOX_1 bestimmt wird, den sie mit der positiven Seite der x-Achse einschliesst. Wir bezeichnen diesen Winkel mit ψ und zählen denselben, von OX ausgehend, im Sinne derjenigen (directen) Drehung, mittelst welcher die positive Seite der x-Achse durch 90^0 hindurch in die positive Seite der y-Achse übergeführt werden kann. Ferner sei ϑ der Neigungswinkel der $x'y'$-Ebene gegen die xy-Ebene; er möge in demselben Sinne genommen werden, wie eine Drehung von der positiven Seite der y-Achse nach der positiven Seite der z-Achse, so dass also in dem Falle, wo OX_1 mit OX identisch wäre, die Drehung um ϑ bis zur Coïncidenz der Ebene xy mit der Ebene $x'y'$ in gleicher Richtung mit der Drehung geschehen würde, welche OY in OZ überführt. Endlich bezeichne φ den Winkel zwischen OX_1 und der positiven Seite der x'-Achse; die Drehungsrichtung von φ sei dieselbe, wie von ψ, so dass also in dem Falle $\vartheta = 0$ der Winkel φ als Fortsetzung von ψ erscheinen würde ($\angle XOX' = \psi + \varphi$ für $\vartheta = 0$). Durch die Winkel ψ, ϑ, φ ist die Lage der positiven Seite OX' der x'-Achse bestimmt; die positive Seite OY' der y'-Achse liege von OX' aus nach derselben Gegend des Raumes hin, wie OY von OX aus gerechnet. Was endlich die Achse der z' betrifft, so erstreckt sich bei zwei homologen Systemen ihre positive Seite OZ' nach derselben Gegend des Raumes wie OZ, bei symmetrischen Systemen nach der entgegengesetzten Seite.

Fig. 16.



Aus diesen Bestimmungen erkennt man leicht, dass sich das primitive System durch drei auf einander folgende Drehungen in das secundäre überführen lässt; man hat erstens das primitive System in directem Sinne um die Achse der z zu drehen, bis OX mit OX_1 zusammenfällt, mittelst einer zweiten directen Drehung um die Gerade OX_1 bringt man die Ebenen xy und $x'y'$ zur Coïncidenz, zugleich fällt OZ mit OZ' oder mit der entgegengesetzten Seite von OZ' zusammen, jenachdem die Systeme homolog oder symmetrisch sind; mittelst einer dritten directen Drehung um die gemeinschaftliche z-Achse bringt man endlich OX_1 nach OX' und zugleich die beiden Systeme entweder zur Congruenz oder zur symmetrisch entgegengesetzten Lage. Diese Bewegungen werden durch die sphärischen Dreiecke anschaulich, welche entstehen, wenn man aus dem gemeinschaftlichen Coordinatenanfange O als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $= 1$ eine Kugelfläche beschreibt und die Coordinatenebenen erweitert, bis sie die Fläche in grössten Kreisen schneiden. Ist nämlich XYZ das dem primitiven Co-



ordinatensysteme entsprechende sphärische Dreieck, $X'Y'Z'$ der Repräsentant des secundären Systemes und X_1 der Durchschnitt von XY mit $X'Y'$, so ist $XX_1 = \psi$, $\angle YX_1X' = \vartheta$, $X_1X' = \varphi$; nach der ersten Drehung hat das Dreieck XYZ die Lage $X_1Y_1Z_1$, nach der zweiten entweder die Lage X_1Y_2Z', oder bei stattfindender Symmetrie die Lage $X_1Y_2Z_2$, nach der dritten Drehung ist es entweder mit $X'Y'Z'$ zusammengefallen oder ihm symmetrisch entgegengesetzt.

Die genannten Bewegungen lassen sich analytisch mittelst des bekannten Satzes verfolgen, dass zwischen den primitiven und secundären rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes uv in der Ebene die Gleichungen

$$u = u' \cos\omega - v' \sin\omega, \qquad v = u' \sin\omega + v' \cos\omega$$

statt finden, in denen ω den Winkel bezeichnet, um welchen das primitive System uv in directem Sinne gedreht werden muss, damit die positive Richtung der u-Achse mit der positiven Richtung der u'-Achse und ebenso die positive Seite der v-Achse mit der positiven Seite der v'-Achse zusammenfalle. Bei der ersten Drehung bleiben die z ungeändert, weil OZ die feste Drehungsachse war; dagegen haben wir, wenn die Coordinaten in Beziehung auf die Achsen OX_1 und OY_1 mit x_1 und y_1 bezeichnet werden

$$1) \quad x = x_1 \cos\psi - y_1 \sin\psi, \quad y = x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi;$$

nach der zweiten Drehung haben die Coordinatenachsen die Lagen OX_1, OY_2, OZ', wobei wir homologe Systeme voraussetzen; hier ändern sich die x_1 nicht, dagegen verwandeln sich y_1 und z in y_2 und z'; demnach ist

$$2) \quad y_1 = y_2 \cos\vartheta - z' \sin\vartheta, \quad z = y_2 \sin\vartheta + z' \cos\vartheta;$$

bei der dritten Drehung bleiben die z' ungestört, dagegen geht x_1 in x' und y_2 in y' über, dies giebt:

$$3) \quad x_1 = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \quad y_2 = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi.$$

Für symmetrische Systeme würden die Gleichungen von ähnlicher Form sein und sich nur dadurch unterscheiden, dass $-z'$ an der Stelle von z' stünde. Nach Elimination von x_1, y_1, y_2 erhalten wir nun folgende Formeln zur Coordinatenverwandlung

$$4) \quad \left\{ \begin{aligned} x = {} & x' (\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\vartheta) \\ & - y' (\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \cos\vartheta) \\ & \pm z' \sin\psi \sin\vartheta, \\ y = {} & x' (\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta) \\ & - y' (\sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta) \\ & \mp z' \cos\psi \sin\vartheta, \\ z = {} & x' \sin\varphi \sin\vartheta + y' \cos\varphi \sin\vartheta \pm z' \cos\vartheta; \end{aligned} \right.$$

darin beziehen sich die oberen Vorzeichen auf homologe, die unteren auf symmetrische Coordinatensysteme.

Durch Vergleichung der Formeln 4) mit den früheren Formeln 7) oder 1) in §. 25 ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos(x'x) = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\vartheta, \\ \beta &= \cos(y'x) = -\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\vartheta, \\ \gamma &= \cos(z'x) = \pm \sin\psi \sin\vartheta; \\ \alpha' &= \cos(x'y) = \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta, \\ \beta' &= \cos(y'y) = -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta, \\ \gamma' &= \cos(z'y) = \mp \cos\psi \sin\vartheta; \end{aligned}$$

$$\alpha'' = \cos(x'z) = \sin\varphi \sin\vartheta,$$
$$\beta'' = \cos(y'z) = \cos\varphi \sin\vartheta,$$
$$\gamma'' = \cos(z'z) = \pm \cos\vartheta.$$

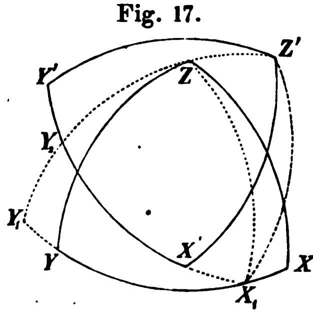


Fig. 17.

Man kann diese Relationen auch mittelst der sphärischen Trigonometrie erhalten, wie wir kurz an zwei homologen Systemen mit Rücksicht auf die vorhin benutzte Figur nachweisen wollen. In dem Dreiecke XX_1X' kennt man $XX_1 = \psi$, $X_1X' = \varphi$, $\angle XX_1X' = 180^0 - \vartheta$, mithin ist nach der Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie

$$\cos(X'X) = \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \cos(180^0 - \vartheta);$$

in dem Dreiecke XX_1Y' findet sich aus $XX_1 = \psi$, $X_1Y' = 90^0 + \varphi$, $\angle XX_1Y' = 180^0 - \vartheta$,

$$\cos(Y'X) = \cos(90^0 + \varphi)\cos\psi + \sin(90^0 + \varphi)\sin\psi \cos(180^0 - \vartheta);$$

im Dreiecke XX_1Z' ist $XX_1 = \psi$, $X_1Z' = 90^0$, $\angle XX_1Z' = 90^0 - \vartheta$, mithin

$$\cos(Z'X) = \cos 90^0 \cos\psi + \sin 90^0 \sin\psi \cos(90^0 - \vartheta).$$

Von dem Dreiecke $X_1X'Y$ kennt man $X_1X' = \varphi$, $X_1Y = 90^0 - \psi$, $\angle YX_1X' = \vartheta$, man hat folglich

$$\cos(X'Y) = \cos\varphi \cos(90^0 - \psi) + \sin\varphi \sin(90^0 - \psi)\cos\vartheta;$$

im Dreiecke X_1YY' ist $X_1Y' = 90^0 + \varphi$, $X_1Y = 90^0 - \psi$ und der eingeschlossene Winkel $= \vartheta$, also

$$\cos(Y'Y) = \cos(90^0 + \varphi)\cos(90^0 - \psi) + \sin(90^0 + \varphi)\sin(90^0 - \psi)\cos\vartheta;$$

das Dreieck X_1YZ' enthält $X_1Z' = 90^0$, $X_1Y = 90^0 - \psi$ und $\angle YX_1Z' = 90^0 + \vartheta$ und giebt

$$\cos(Z'Y) = \cos 90^0 \cos(90^0 - \psi) + \sin 90^0 \sin(90^0 - \psi)\cos(90^0 + \vartheta).$$

Weil ferner aus naheliegenden Gründen $\angle X_1Z'X' = \varphi$ und $ZZ' = \vartheta$ ist, so hat man in dem Dreiecke $X'Z'Z$ die bekannten Stücke $ZZ' = \vartheta$, $X'Z' = 90^0$, $\angle X'Z'Z = 90 - \varphi$, mithin

$$\cos(X'Z) = \cos\vartheta \cos 90^0 + \sin\vartheta \sin 90^0 \cos(90^0 - \varphi);$$

im Dreiecke $Y'Z'Z$ kennt man $Y'Z' = 90^0$, $ZZ' = \vartheta$, $\angle Y'Z'Z = \angle X'Z'X_1 = \varphi$, folglich ist

$$\cos(Y'Z) = \cos\vartheta \cos 90^0 + \sin\vartheta \sin 90^0 \cos\varphi;$$

endlich hat man unmittelbar wegen $Z'Z = \vartheta$

$$\cos(Z'Z) = \cos\vartheta.$$

Diese Formeln stimmen mit den vorigen für $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots \gamma''$ überein, doch würde der Nachweis ihrer Allgemeingiltigkeit ein näheres und umständliches Eingehen auf alle möglichen Combinationen spitzer und stumpfer φ, ψ, ϑ erfordern, während die erste Herleitung von selbst völlig allgemein ist.

Durch Substitution der Werthe von $\alpha, \beta, \ldots \gamma''$ in die Gleichungen 10) des vorigen Paragraphen ergeben sich die folgenden Formeln:

$$5) \left\{ \begin{aligned} x' &= x\,(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \\ &\quad + y\,(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta) \\ &\quad + z\sin\varphi\sin\vartheta, \\ y' &= -x\,(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \\ &\qquad - y\,(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta) \\ &\qquad + z\cos\varphi\sin\vartheta, \\ z' &= \pm(x\sin\psi\sin\vartheta - y\cos\psi\sin\vartheta + z\cos\vartheta), \end{aligned} \right.$$

welche den Uebergang vom secundären zu dem primitiven Systeme vermitteln.

Wir erwähnen endlich noch einige besonders häufig vorkommende Specialfälle der Gleichungen 4). Wenn die Durchschnittslinie OX_1 der Ebenen xy und $x'y'$ zugleich die x-Achse ist, so hat man $\psi = 0$, mithin

$$6) \left\{ \begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y &= x'\sin\varphi\cos\vartheta + y'\cos\varphi\cos\vartheta \mp z'\sin\vartheta, \\ z &= x'\sin\varphi\sin\vartheta + y'\cos\varphi\sin\vartheta \pm z'\cos\vartheta. \end{aligned} \right.$$

Wird die Linie OX_1 zur Achse der x' genommen, so giebt dies $\varphi = 0$, also

$$7) \left\{ \begin{aligned} x &= x'\cos\psi - y'\sin\psi\cos\vartheta \pm z'\sin\psi\sin\vartheta, \\ y &= x'\sin\psi + y'\cos\psi\cos\vartheta \mp z'\cos\psi\sin\vartheta, \\ z &= y'\sin\vartheta \pm z'\cos\vartheta. \end{aligned} \right.$$

Von diesen Formeln wird oft in dem noch specielleren Falle Gebrauch gemacht, wo sämmtliche Punkte des secundären Systemes in einer Ebene liegen, welche man zur $x'y'$-Ebene wählt; es ist dann $z' = 0$, mithin

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\psi - y'\sin\psi\cos\vartheta, \\ y &= x'\sin\psi + y'\cos\psi\cos\vartheta, \\ z &= y'\sin\vartheta; \end{aligned}$$

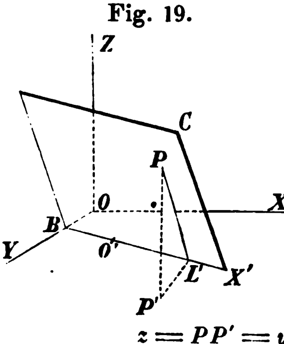
haben beide Systeme nicht denselben Coordinatenanfang, so bezeichne man die ebenen Coordinaten von O' mit a und b und setze dann $x - a$ für x, sowie $y - b$ für y, wobei aber nicht zu über-

sehen ist, dass a und b der primitiven Gleichung von OX' genügen müssen; man hat jetzt:

$$8)\quad \begin{cases} x = a + x' \cos\psi - y' \cos\vartheta \sin\psi \\ y = b + x' \sin\psi + y' \cos\vartheta \cos\psi \\ z = y' \sin\vartheta. \end{cases}$$

Dieselben Formeln können auch unabhängig von dem Vorigen durch eine einfache geometrische Betrachtung gefunden werden.

Fig. 19.



Ist nämlich BX' die Horizontalspur der Ebene BC, in welcher ein Punkt P liegt, der Winkel zwischen OX und BX' gleich ψ, der Neigungswinkel der Ebene BC gegen die Ebene xy gleich ϑ, ferner $O'X'$ der positive Theil der x'-Achse mit O' als Anfang der neuen rechtwinkligen Coordinaten, so hat man in der ersten Figur $O'L' = x'$, $L'P = y'$,

$$z = PP' = y' \sin\vartheta, \qquad L'P' = y' \cos\vartheta.$$

Fig. 20.

Ferner ist in der zweiten Figur, welche die Horizontalprojection der ersten darstellt, $\angle O'L'Q = \angle L'P'R = \psi$ und

$$x - a = L'Q - L'R = x' \cos\psi - L'P'.\sin\psi,$$
$$y - b = O'Q + RP' = x' \sin\psi + L'P'.\cos\psi,$$

woraus man vermöge des Werthes von $L'P'$ die obigen Formeln erhält. Sind die Winkel ψ und ϑ nicht unmittelbar gegeben und ist dagegen nur die Gleichung der Ebene BC bekannt, so bedarf es erst der Ermittelung von $\cos\psi$, $\sin\psi$, $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$. Sie geschieht auf folgende Weise. Die Gleichung der Ebene sei

$$9)\qquad Ax + By + Cz = D,$$

mithin die Gleichung ihrer Horizontalspur:

$$Ax + By = D \text{ oder } y = -\frac{A}{B}x + \frac{D}{B};$$

man hat nun erstlich

$$\tan\psi = -\frac{A}{B}$$

folglich, wenn das Wurzelzeichen im absoluten Sinne genommen und A stets als positiv angesehen wird,

$$\cos\psi = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \sin\psi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

ferner hat man für den Neigungswinkel ϑ

$$\cos\vartheta = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \sin\vartheta = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A^2+B^2+C^2}},$$

mithin durch Substitution der vier angegebenen Werthe

$$10)\quad \begin{cases} x = a - \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,x' - \dfrac{AC}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}}\,y', \\ y = b + \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,x' - \dfrac{BC}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}}\,y', \\ z = \dfrac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,y', \end{cases}$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass immer die Gleichung

$$11)\qquad Aa + Bb = D$$

erfüllt sein muss. Nicht selten wählt man zum neuen Coordinatenanfang O' den Fusspunkt des Perpendikels vom ursprünglichen Coordinatenanfang O auf die Horizontalspur BX' der gegebenen Ebene; für diesen Fall sind die Werthe von a und b

$$12)\qquad a = \frac{AD}{A^2+B^2}, \qquad b = \frac{BD}{A^2+B^2}.$$

Die Formeln 10) vermitteln analytisch dieselbe Operation, welche in der descriptiven Geometrie als Umlegung einer Ebene in die Horizontalebene bekannt ist.

Fünftes Capitel.

Die Cylinderflächen.

---

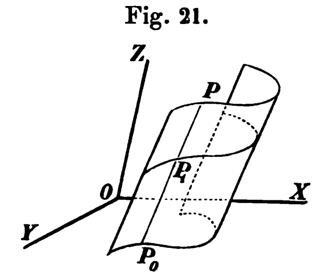
§. 27.

Entstehung und Gleichung der Cylinderflächen.

Wenn eine Gerade so bewegt wird, dass sie einer bestimmten Richtung parallel bleibt und gleichzeitig eine gegebene einfach oder doppelt gekrümmte Linie fortwährend schneidet, so entsteht eine Fläche, die im Allgemeinen eine Cylinderfläche genannt wird; die bewegliche Gerade heisst ihre Erzeugungslinie und die Curve, an welcher letztere hingleitet, die Directrix oder Leitlinie der Fläche. Durch die Richtung der erzeugenden Geraden und durch die Directrix ist die Natur der Fläche völlig bestimmt und man kann daher die Aufgabe stellen, aus jenen Daten die Gleichung der Cylinderfläche abzuleiten.

Wir betrachten zunächst den zwar specielleren aber sehr gewöhnlichen Fall, wo die Directrix eine ebene krumme Linie ist, und nehmen ihre Ebene zur Coordinatenebene xy. Die Directrix lässt sich dann als die stetige Folge der xy-Spuren aller erzeugenden Geraden, d. h. als xy-Spur der Fläche selbst ansehen. Man hat nun erstens für jeden Punkt P einer zwar veränderlichen, aber einer bestimmten Richtung parallelen Geraden die Gleichungen

Fig. 21.



$$1) \qquad x = Az + x_0, \qquad y = Bz + y_0,$$

worin A und B die constanten Richtungscoefficienten, x_0 und y_0 die veränderlichen Coordinaten der xy-Spur der erzeugenden Geraden darstellen; weil ferner die genannte Spur (P_0) auf der

gebenen Directrix liegen soll, so müssen x_0 und y_0 einer gebenen Gleichung, nämlich der Gleichung der Directrix, genügen, elche durch

$$2)\qquad F(x_0, y_0) = 0$$

rgestellt werden möge. Aus den vorhandenen drei Gleichungen giebt sich eine einzige Gleichung zwischen x, y, z, nämlich die eichung der Cylinderfläche, wenn man x_0 und y_0 eliminirt; das sultat dieser Elimination kann in der Form

$$3)\qquad F(x - Az, y - Bz) = 0$$

rgestellt werden.

Ist zweitens die Directrix eine doppelt gekrümmte Curve, so issen zwei ihrer Projectionen gegeben sein; nehmen wir hierzu e Projectionen auf die xz und yz-Ebene, so haben wir zwei leichungen von den Formen

$$4)\qquad \varphi(x, z) = 0, \qquad \psi(y, z) = 0.$$

ie erzeugende Gerade, deren Gleichungen wiederum

$$5)\qquad x = Az + x_0, \qquad y = Bz + y_0$$

in mögen, schneidet der Voraussetzung zufolge die Directrix in nem Punkte, dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1 heissen mögen und r welche die vier Gleichungen

$$6)\qquad \begin{cases} x_1 = Az_1 + x_0, & y_1 = Bz_1 + y_0, \\ \varphi(x_1, z_1) = 0, & \psi(y_1, z_1) = 0, \end{cases}$$

sammen gelten. Durch Elimination von x_1, y_1, z_1 folgt hieraus ne Gleichung zwischen x_0 und y_0, d. h. die Gleichung von der y-Spur der Fläche. Bezeichnen wir diese Gleichung durch

$$7)\qquad F(x_0, y_0) = 0,$$

ist jetzt die Sache wie vorhin und es ergiebt sich wiederum

$$8)\qquad F(x - Az, y - Bz) = 0$$

s Gleichung der Cylinderfläche.

Beispielsweise erwähnen wir diejenige Cylinderfläche, deren irectrix irgend eine Curve zweiten Grades ist; als Gleichung der itlinie haben wir in diesem Falle

$$9)\qquad \alpha x_0^2 + \beta y_0^2 + 2\gamma x_0 y_0 + 2\delta x_0 + 2\varepsilon y_0 + \varkappa = 0$$

thin als Gleichung der entsprechenden Cylinderfläche zweiten ades

$$10)\qquad \begin{cases} \alpha(x - Az)^2 + \beta(y - Bz)^2 + 2\gamma(x - Az)(y - Bz) \\ \quad + 2\delta(x - Az) + 2\varepsilon(y - Bz) + \varkappa = 0. \end{cases}$$

Am einfachsten gestaltet sich die in Nr. 8) entwickelte allmeine Gleichung der Cylinderfläche in dem Falle, wo die

z-Achse parallel zur Richtung der erzeugenden Geraden gelegt wird; man hat dann $A = B = 0$, folglich

$$11) \qquad F(x, y) = 0, \quad (z \text{ beliebig})$$

diese Gleichung unterscheidet sich im Wesentlichen nicht von jener der ebenen Directrix; in der That erhellt auch unmittelbar von selbst, dass unter der gemachten Voraussetzung jeder Punkt auf der Cylinderfläche liegt, dessen xy-Spur der Directrix angehört und dessen z beliebig ist.

Schnitte der Cylinderflächen. Unter den verschiedenen Lagen, die eine Ebene gegen eine Cylinderfläche haben kann, sind folgende hervorzuheben. Die Ebene kann erstens parallel zur xy-Ebene sein; man hätte dann in Nr. 11) dem z einen constanten Werth zu ertheilen, da aber z in der Gleichung selber nicht vorkommt, so bleibt letztere dadurch ungeändert, d. h. alle Parallelschnitte der Cylinderfläche sind congruent, was auch geometrisch unmittelbar erhellt. Die Ebene kann zweitens parallel zur Richtung der erzeugenden Geraden, also der z-Achse parallel sein; ihre Gleichung lautet unter dieser Voraussetzung

$$12) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (z \text{ beliebig})$$

und wenn wir sie mit der Gleichung 11) zusammenhalten, so bekommen wir diejenigen Punkte, welche die Ebene mit der Cylinderfläche gemein hat. Dabei bleibt z immer beliebig und es besteht daher die Reihenfolge der gemeinsamen Punkte jedenfalls in einer oder mehreren Geraden, deren xy-Spuren durch die Gleichungen 11) und 12) oder die nicht wesentlich davon verschiedenen

$$F(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1$$

bestimmt werden. Schneiden sich die durch vorstehende Gleichungen ausgedrückten Spuren der Cylinderfläche und der Ebene in einer Partie von Punkten, so schneidet die Ebene die Cylinderfläche in eben so viel Geraden, welche der Richtung der Fläche parallel sind; berühren sich jene Spuren in einem Punkte, so berüht die Ebene die Cylinderfläche längs einer Geraden, haben endlich jene Spuren keinen Punkt gemein, so liegt die Ebene völlig ausserhalb der Cylinderfläche. Eine ganz beliebige Ebene, deren Gleichung

$$13) \qquad A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$$

sein möge, schneidet im Allgemeinen die Cylinderfläche in einer

krummen Linie. Die Projectionen der letzteren erhält man dadurch, dass man die Gleichung 13) mit der Gleichung der Cylinderfläche zusammen nimmt und eine der Coordinaten x, y, z eliminirt; die Elimination von z giebt die Gleichung der xy-Projection der Durchschnittslinie, die Elimination von y liefert die Gleichung der xz-Projection, die Elimination von x die Gleichung der yz-Projection. Will man dagegen, wie es in vielen Fällen wünschenswerth ist, die Gleichung der ebenen Durchschnittslinie selber haben, so bedarf es einer Transformation der Coordinaten, und zwar wählt man dabei die schneidende Ebene zur Ebene der neuen xy, wie dies in den Formeln 8) bis 12) in §. 26 geschehen ist; setzt man die für x, y, z dort angegebenen Werthe in die Gleichung der Cylinderfläche ein, so erhält man augenblicklich eine Gleichung zwischen den neuen ebenen Coordinaten der Durchschnittslinie, d. h. die Gleichung der letzteren. Hiernach findet man z. B. sehr leicht, dass jeder Schnitt einer Cylinderfläche zweiten Grades aus einer Curve zweiten Grades besteht.

Berührungsebenen, Tangenten und Normalen der Cylinderflächen. In dem Vorigen liegt bereits ein Mittel zur Auffindung derjenigen Ebene, welche eine gegebene Cylinderfläche in einem gegebenen Punkte P berührt. Man zieht nämlich die durch P gehende erzeugende Gerade, legt durch ihre xy-Spur eine Tangente an die gleichnamige Spur der Fläche und construirt die Ebene, welche jene Erzeugungslinie und diese Tangente enthält; die hiermit bestimmte Ebene berührt die Cylinderfläche längs jener erzeugenden Geraden. Jede durch den Berührungspunkt der Tangentialebene gehende in dieser Ebene selbst liegende Gerade heisst eine Tangente der Cylinderfläche; die auf der Berührungsebene im Berührungspunkte errichtete Senkrechte nennt man die Normale der Fläche im Punkte P.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wollen wir den elliptischen Cylinder genauer betrachten.

§. 28.

Der elliptische Cylinder.

Durchschneidet man einen beliebigen elliptischen Cylinder mittelst einer auf der Richtung der erzeugenden Geraden senkrechten Ebene, so ist die entstehende Durchschnittslinie eine geschlossene Curve zweiten Gerades, d. h. eine Ellipse, und es kann

daher jeder schiefe elliptische Cylinder auch als gerader elliptischer Cylinder angesehen werden. Denken wir uns diesen senkrechten Querschnitt als Directrix der Fläche, nennen a die grosse, b die kleine Halbachse der Ellipse, und beziehen die Fläche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen x-Achse mit a und dessen y-Achse mit b zusammenfällt, so ist die Gleichung der Fläche

$$1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad (z \text{ beliebig}).$$

Durch den Anfangspunkt der Coordinaten legen wir ferner eine Ebene, deren Horizontalspur mit der x-Achse den Winkel ψ einschliessen und deren Neigungswinkel gegen die xy-Ebene $=\vartheta$ sein möge; ihr Durchschnitt mit der Fläche ist dann eine Curve, deren Gleichung in ebenen Coordinaten durch die Substitutionen

$$x = x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta,$$
$$y = x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta,$$
$$z = y' \sin\vartheta,$$

erhalten wird. Es ergiebt sich auf diese Weise

$$\left(\frac{\cos^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\psi}{b^2}\right)x'^2 + 2\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\cos\psi\sin\psi\cos\vartheta\,.\,x'y'$$
$$+\left(\frac{\sin^2\psi}{a^2}+\frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta\,.\,y'^2=1$$

also im Allgemeinen immer eine Ellipse. Von Interesse ist dabei die Untersuchung, ob die fragliche Ellipse nicht unter Umständen zu einem Kreise werden könnte, in welchem Falle die Gleichung zu der Form

$$\frac{1}{r^2}x'^2+\frac{1}{r^2}y'^2=1$$

gelangen müsste. Hierzu würden nun, da $a>b$ und $\cos\vartheta$ im Allgemeinen von Null verschieden ist, die folgenden Bedingungen erforderlich sein

$$\cos\psi\sin\psi=0,$$
$$\frac{\cos^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\psi}{b^2}=\left(\frac{\sin^2\psi}{a^2}+\frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta=\frac{1}{r^2};$$

hieraus folgt entweder

$$\cos\psi=0 \text{ mithin } \sin\psi=1 \text{ und } \cos^2\vartheta=\frac{a^2}{b^2},$$

oder

$$\sin\psi=0 \quad ,, \quad \cos\psi=1 \quad ,, \quad \cos^2\vartheta=\frac{b^2}{a^2}.$$

Die erste dieser Gleichungen ist wegen $\frac{a}{b} > 1$ unmöglich, dagegen liefert die andere zwei Beantwortungen der Frage, nämlich

$$\cos\vartheta = +\frac{b}{a} \text{ und } \cos\vartheta = -\frac{b}{a}.$$

Jeder elliptische Cylinder lässt sich also auf zwei verschiedene Arten in Kreisen durchschneiden und kann daher auf doppelte Weise als schiefer Kreiscylinder betrachtet werden. Bemerkenswerth ist dabei, dass der Neigungswinkel der Kreisebene gegen die xy-Ebene mit dem Winkel übereinkommt, unter welchem die Excentricität der Ellipse vom Endpunkte der kleinen Halbachse aus gesehen erscheint.

Nehmen wir die Ebene eines der Kreisschnitte als neue xy-Ebene und den Mittelpunkt des Kreises zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, so ist die Gleichung der Horizontalspur, die wir jetzt auch als Directrix betrachten können,

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2;$$

wir bezeichnen ferner mit

$$x = Az \text{ und } y = Bz$$

die Gleichungen derjenigen Geraden, welche durch den Kreismittelpunkt parallel zu den erzeugenden Geraden liegt (der sogenannten Cylinderachse) und haben jetzt als Gleichung des schiefen Kreiscylinders oder des ursprünglich elliptischen Cylinders

$$2)\qquad (x - Az)^2 + (y - Bz)^2 = r^2.$$

Um die Natur des Durchschnittes beurtheilen zu können, welchen irgend eine Ebene

$$3)\qquad A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$$

mit dem vorigen Cylinder bildet, erörtern wir zuerst den Fall, wo die genannte Ebene zur Berührungsebene wird. Hierzu gehört erstens, dass die Ebene parallel zur Richtung der erzeugenden Geraden (oder der Cylinderachse) liegt, was durch die Bedingungsgleichung

$$4)\qquad AA_1 + BB_1 + C_1 = 0$$

ausgedrückt wird; zweitens ist erforderlich, dass die Horizontalspur der Ebene die Horizontalspur der Cylinderfläche berühre; die Gleichungen der beiden genannten Spuren sind

$$Ax + By = D, \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

und die Bedingung der tangentialen Lage der Geraden gegen den Kreis wird durch die Gleichung

5) $$(A_1^2 + B_1^2) r^2 = D_1^2$$

ausgedrückt, wie man u. A. durch die Bemerkung finden kann, dass die Entfernung der Geraden vom Coordinatenanfange gleich dem Radius des Kreises sein muss. Sind nun die Bedingungen 4) und 5) gleichzeitig erfüllt, so berührt die Ebene den Cylinder längs einer Geraden; ist nur die erste, nicht aber die zweite Bedingung erfüllt, so hat die Ebene mit der Cylinderfläche entweder zwei oder gar keine Gerade gemein; ist endlich auch die Bedingung 4) nicht erfüllt, so schneidet die Ebene die Cylinderfläche in einer Ellipse, die im speciellen Falle auch zu einem Kreise werden kann.

Die Gleichungen 4) und 5) dienen zur Lösung der Aufgabe, ‚durch einen gegebenen Punkt $x_1 y_1 z_1$ eine Berührungsebene an die Cylinderfläche zu legen‘. Nennen wir

$$A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 \zeta = D_1$$

oder kürzer

6) $$L\xi + M\eta + N\zeta = 1$$

die Gleichung der gesuchten Ebene, so haben wir erstens als Bedingung, dass sie durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ geht

$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = 1,$$

ferner als Bedingungen der Berührung mit der Fläche

$$AL + BM + N = 0$$
$$(L^2 + M^2) r^2 = 1.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergeben sich die Werthe

$$L = \frac{r(x_1 - Az_1) \pm (y_1 - Bz_1)\sqrt{(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2 - r^2}}{r[(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2]}$$

$$M = \frac{r(y_1 - Bz_1) \mp (x_1 - Az_1)\sqrt{(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2 - r^2}}{r[(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2]}$$

$$N = -(AL + BM).$$

Man erkennt hieraus, dass keine Berührungsebene möglich ist, wenn

$$(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2 < r^2$$

d. h. wenn sich der Punkt $x_1 y_1 z_1$ innerhalb des von der Cylinderfläche umschlossenen Raumes befindet, dass zweitens eine einzige Tangentialebene existirt, wenn

$$(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2 = r^2,$$

in welchem Falle der Punkt $x_1 y_1 z_1$ auf der Cylinderfläche selber liegt, und dass drittens zwei verschiedene Berührungsebenen möglich sind, wenn

$$(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2 > r^2,$$

d. h., wenn der Punkt $x_1 y_1 z_1$ sich in dem von der Fläche ausgeschlossenen Raume befindet. Schreiben wir im zweiten Falle einfach x, y, z für x_1, y_1, z_1, so sind die obigen Werthe

$$L = \frac{x - Az}{r^2}, \quad M = \frac{y - Bz}{r^2}, \quad N = -\frac{A(x - Az) + B(y - Bz)}{r^2}$$

und mithin lautet die Gleichung der Berührungsebene

$$7) \quad (x - Az)\xi + (y - Bz)\eta - [A(x - Az) + B(y - Bz)]\zeta = r^2,$$

wobei nicht zu übersehen ist, dass hier x, y, z unveränderlich sind, wenn ξ, η, ζ sich ändern.

Als Gleichungen derjenigen Geraden, welche die Berührungsebene im Punkte xyz senkrecht schneidet, findet man noch

$$8) \begin{cases} [A(x - Az) + B(y - Bz)](\xi - x) + (x - Az)(\zeta - z) = 0, \\ [A(x - Az) + B(y - Bz)](\eta - y) + (y - Bz)(\zeta - z) = 0; \end{cases}$$

dies sind die Gleichungen der im Punkte xyz auf der Cylinderfläche errichteten Normalen.

Sechstes Capitel.

Die Kegelflächen.

---

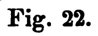
§. 29.

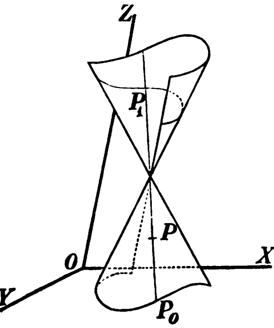
Entstehung und Gleichung der Kegelflächen.

Wenn eine Gerade so bewegt wird, dass sie einerseits immer durch einen bestimmten festen Punkt geht und andererseits eine gegebene einfach oder doppelt gekrümmte Linie fortwährend schneidet, so entsteht eine sogenannte Kegelfläche; der feste Punkt heisst der Mittelpunkt, die bewegliche Gerade die Erzeugungslinie und die feste Curve die Directrix oder Leitlinie der Fläche. Man muss sich dabei die erzeugende Gerade in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung vorstellen und es hat dies zur Folge, dass jede Kegelfläche aus zwei unendlichen symmetrisch gleichen Theilen besteht, die sich im Mittelpunkte vereinigen. Lässt man den Mittelpunkt der Fläche unendlich weit von der Directrix wegrücken, so degenerirt die Kegelfläche in eine Cylinderfläche und es kann daher diese als specieller Fall von jener gelten.

Wie aus der Entstehungsweise der Kegelfläche hervorgeht, ist letztere bestimmt, sobald der Mittelpunkt und die Directrix ihrer Lage nach gegeben sind; dies giebt Veranlassung zu der Aufgabe, aus den genannten Daten die Gleichung der Kegelfläche herzuleiten.

Wir betrachten zunächst den zwar speciellen, aber sehr gewöhnlichen Fall, wo die Directrix eine ebene Curve ist; ihre Ebene nehmen wir zur Ebene xy und bezeichnen die Coordinaten des Mittelpunktes mit f, g, h. Die Gleichungen irgend einer durch den Punkt fgh gehenden Geraden können jetzt unter der Form


Fig. 22.



$$x - f = M(z-h), \qquad y - g = N(z-h)$$

largestellt werden und dabei sind die Coordinaten x_0 und y_0 ihrer xy-Spur durch die Formeln

$$x_0 - f = -Mh, \qquad y_0 - g = -Nh$$

estimmt. Die Elimination von M und N giebt

$$1) \quad x - f = -\frac{x_0 - f}{h}(z-h), \quad y - g = -\frac{y_0 - g}{h}(z-h)$$

s Gleichungen der Geraden, welche die Punkte fgh und $x_0 y_0$ rbindet. Soll diese Gerade mit der erzeugenden Geraden (in gend einer ihrer Lagen gedacht) identisch sein, so muss der unkt $x_0 y_0$ der Directrix angehören, deren Gleichung durch

$$2) \qquad F(x_0, y_0) = 0$$

rgestellt werden möge. Nach Elimination von x_0 und y_0 aus n Gleichungen 1) und 2) ergiebt sich nun eine einzige Gleichung rischen x, y, z, nämlich

$$3) \qquad F\left(\frac{fz - hx}{z-h}, \frac{gz - hy}{z-h}\right) = 0$$

id diese ist die Gleichung der Kegelfläche.

Eine doppelt gekrümmte Directrix stellen wir durch zwei leichungen dar, indem wir sie auf die Ebenen xz und yz proirt denken; die betreffenden Gleichungen mögen sein

$$4) \qquad \varphi(x, z) = 0, \qquad \psi(y, z) = 0.$$

en Gleichungen der erzeugenden Geraden geben wir wieder die orm

$$x - f = -\frac{x_0 - f}{h}(z-h), \qquad y - g = -\frac{y_0 - g}{h}(z-h)$$

id nennen $x_1 y_1 z_1$ den Punkt, in welchem sie die Directrix schneit. Für die Coordinaten dieses Punktes gelten zusammen die leichungen

$$5) \quad \begin{cases} x_1 - f = -\dfrac{x_0 - f}{h}(z_1 - h), & y_1 - g = -\dfrac{y_0 - g}{h}(z_1 - h), \\ \varphi(x_1, z_1) = 0, & \psi(x_1, z_1) = 0; \end{cases}$$

iminirt man aus ihnen x_1, y_1, z_1, so bleibt eine Gleichung zwihen x_0 und y_0 übrig, d. h. die Gleichung der xy-Spur der äche. Bezeichnen wir die so entstandene Gleichung mit

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

ist die Sache ganz wie vorhin und es ergiebt sich wiederum

$$F\left(\frac{fz - hx}{z-h}, \frac{gz - hy}{z-h}\right) = 0$$

s Gleichung der Kegelfläche.

Um die Rechnung zu vereinfachen, kann man zunächst die z-Achse durch den Mittelpunkt der Fläche legen, es ist dann $f = g = 0$, folglich

$$F\left(\frac{hx}{h-z}, \frac{hy}{h-z}\right) = 0;$$

verschiebt man nachher den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt, indem man z für $h - z$ setzt, so wird noch einfacher

$$F\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0.$$

Beispielsweise betrachten wir den schiefen Kreiskegel. Das Coordinatensystem sei rechtwinklig, r der Halbmesser der Directrix, die Coordinaten des Kreismittelpunktes mögen p und q heissen, der Mittelpunkt des Kegels liege auf der z-Achse, die Directrix in der xy-Ebene; die Gleichung der Leitlinie ist in diesem Falle

$$(x_0 - p)^2 + (y_0 - q)^2 = r^2,$$

mithin die Gleichung der Kegelfläche

$$\left(\frac{hx}{h-z} - p\right)^2 + \left(\frac{hy}{h-z} - q\right)^2 = r^2.$$

Nimmt man den Mittelpunkt der Fläche zum Coordinatenanfang, so dass nun die Directrix in der Entfernung h parallel zur neuen xy-Ebene liegt, so ist noch einfacher

$$\left(\frac{hx}{z} - p\right)^2 + \left(\frac{hy}{z} - q\right)^2 = r^2$$

die Gleichung der Fläche.

S c h n i t t e d e r K e g e l f l ä c h e. Bei der Erörterung der verschiedenen Lagen einer Ebene gegen eine Kegelfläche unterscheiden wir die beiden Hauptfälle, ob die Ebene durch den Mittelpunkt der Kegelfläche geht oder nicht. Findet das Erste statt, so geben die xy-Spuren der Fläche und der Ebene ein leichtes Mittel an die Hand, um die Natur des Durchschnittes beider Gebilde kennen zu lernen. Es kann nämlich die Spur der Ebene die Spur der Fläche entweder in gewissen Punkten schneiden, oder in einem Punkte berühren, oder keinen Punkt mit ihr gemein haben; im ersten Falle schneidet die Ebene die Fläche in eben so viel erzeugenden Geraden, im zweiten Falle berührt die Ebene die Fläche längs einer erzeugenden Geraden, im dritten Falle hat die Ebene ausser dem Mittelpunkte der Kegelfläche keinen weiteren Punkt mit letzterer gemein. Wenn dagegen die Ebene nicht

durch den Mittelpunkt der Kegelfläche geht, so wird sie diese im Allgemeinen in irgend einer krummen Linie schneiden. Die Projectionen der letzteren findet man dadurch, dass man die Gleichung der Kegelfläche mit der Gleichung der Ebene verbindet und eine der Coordinaten x, y, z eliminirt; die Elimination von z giebt die Gleichung der xy-Projection der Durchschnittslinie, die Elimination von y liefert die Gleichung xz-Projection, die Elimination von x die Gleichung der yz-Projection. Will man die Gleichung der ebenen Durchschnittslinie selber haben, so bedarf es einer Transformation der Coordinaten, und zwar wählt man dabei die schneidende Ebene zur Ebene der neuen xy, wie dies in den Formeln 8) bis 12) in §. 26 angegeben ist. Nach diesen Bemerkungen findet man z. B. leicht, dass der Schnitt jeder Kegelfläche, deren Directrix eine Curve zweiten Grades ist, wiederum eine Linie desselben Grades darstellt.

Berührungsebenen, Tangenten und Normalen der Kegelflächen. In dem Vorigen liegt bereits das Mittel zur Construction derjenigen Ebene, welche eine gegebene Kegelfläche in einem bestimmten Punkte P berührt. Man zieht nämlich die durch P gehende erzeugende Gerade, legt durch ihre xy-Spur eine Tangente an die gleichnamige Spur der Fläche und construirt die Ebene, welche jene Erzeugungslinie und diese Tangente enthält; die hiermit bestimmte Ebene berührt die Kegelfläche längs der genannten erzeugenden Geraden. Jede durch den Berührungspunkt gehende in dieser Ebene liegende Gerade heisst eine Tangente der Fläche; die auf der Berührungsebene im Berührungspunkte errichtete Senkrechte nennt man die Normale der Fläche in diesem Punkte.

§. 30.

Der elliptische Kegel.

Durchschneidet man einen elliptischen Kegel mittelst einer Ebene, welche auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Directrix und der Fläche senkrecht steht, also normal zur sogenannten Kegelachse ist, so bildet die Schnittcurve eine geschlossene Linie zweiten Grades, d. h. eine Ellipse. Diese nehmen wir als neue Directrix; ihre grössere Halbachse möge a, die kleinere b, die Entfernung des Kegelmittelpunktes von der Directrix soll c

heissen, die Coordinatenachsen der x, y, z legen wir der Reihe nach in a, b, c und haben so als Gleichung der Directrix

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,$$

ferner als Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$x=-\frac{x_0}{c}(z-c), \qquad y=-\frac{y_0}{c}(z-c),$$

mithin als Gleichung der elliptischen Kegelfläche

$$1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{(z-c)^2}{c^2}.$$

Noch einfacher gestaltet sich das Resultat, wenn wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Fläche verlegen; die Directrix liegt dann in der Entfernung c parallel zur xy-Ebene und hat

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad z=c$$

zur Gleichung; für die Gleichung der Fläche erhalten wir

$$2) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{z}{c}\right)^2.$$

Der Durchschnitt der Fläche mit der xz-Ebene besteht aus zwei Geraden, deren Gleichungen lauten

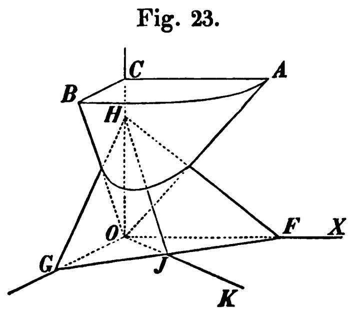
$$y=0, \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2=\left(\frac{z}{c}\right)^2;$$

der Durchschnitt der Fläche mit der yz-Ebene besteht gleichfalls aus zwei durch die Gleichungen

$$x=0, \qquad \left(\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{z}{c}\right)^2$$

bestimmten Geraden. Man erkennt hieraus die geometrische Bedeutung der Verhältnisse $\frac{c}{a}$ und $\frac{c}{b}$; es ist nämlich $\frac{c}{a}$ die Cotangente des Winkels AOZ, welchen die xz-Spur der Fläche mit der z-Achse einschliesst, ebenso $\frac{c}{b}$ die Cotangente des Winkels BOZ zwischen der yz-Spur der Fläche und derselben Achse. Bezeichnen wir die genannten Winkel mit α und β, so können wir der Gleichung 2) die Form

Fig. 23.



3) $$x^2 \cot^2 \alpha + y^2 \cot^2 \beta = z^2$$

ertheilen, welche in manchen Fällen bequemer ist.

Eine durch die Gleichung

4) $$Ax + By + Cz = D$$

charakterisirte Ebene schneidet die Kegelfläche in einer Curve, deren Horizontalprojection durch Elimination von z gefunden wird; die betreffende Gleichung lautet

5) $$\left(\frac{C^2}{a^2} - \frac{A^2}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{C^2}{b^2} - \frac{B^2}{c^2}\right)y^2 - 2\frac{AB}{C^2}xy$$
$$+ 2\frac{AD}{c^2}x + 2\frac{BD}{c^2}y - \frac{D^2}{c^2} = 0;$$

man erkennt hieraus, dass die Horizontalprojection des Schnittes, mithin auch letzterer selbst, eine Linie zweiten Grades ist. Setzen wir zunächst $D \gtrless 0$ voraus, in welchem Falle die Ebene nicht durch den Kegelmittelpunkt (Coordinatenanfang) geht, so entscheidet sich die Natur des Durchschnittes nach der bekannten Regel, dass die Gleichung

$$A_1 x^2 + B_1 y^2 + 2C_1 xy + 2D_1 x + 2E_1 y + F_1 = 0$$

eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel charakterisirt, jenachdem der Ausdruck

$$C_1^2 - A_1 B_1$$

negativ, positiv oder gleich Null ist. Durch Anwendung auf die Gleichung 5) folgt der Satz: der Durchschnitt der Ebene mit der Kegelfläche ist

eine Ellipse für $A^2a^2 + B^2b^2 < C^2c^2$,
„ Hyperbel „ $A^2a^2 + B^2b^2 > C^2c^2$,
„ Parabel „ $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2c^2$,

immer $D \gtrless 0$ vorausgesetzt. — Lassen wir zweitens D in Null übergehen, so reducirt sich im ersten Falle die Ellipse auf einen blossen Punkt und die Ebene hat dann mit der Kegelfläche nur den Kegelmittelpunkt gemein; im zweiten Falle degenerirt die Hyperbel zu zwei Geraden, im dritten Falle verwandelt sich die Parabel in eine Gerade und die Ebene berührt die Kegelfläche längs dieser Geraden. Die letzteren Resultate können leicht mittelst der Directrix verificirt werden. Der Durchschnitt der Ebene

$$Ax + By + Cz = 0$$

mit der Ebene der Directrix ist nämlich für $z = 0$

$$Ax + By + Cc = 0$$

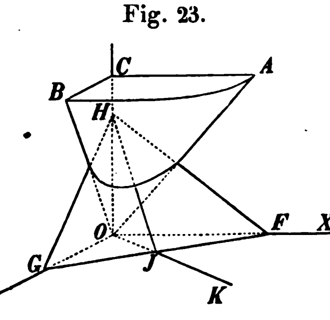
d. h. eine Gerade; diese hat mit der Directrix

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

keinen Punkt gemein, wenn $A^2a^2+B^2b^2<C^2c^2$; sie schneidet dieselbe in zwei Punkten, wenn $A^2a^2+B^2b^2>C^2c^2$, sie berührt die Directrix, wenn $A^2a^2+B^2b^2=C^2c^2$; hieraus folgen unmittelbar die angegebenen Eigenschaften der Ebene.

Um die Gleichung der Durchschnittslinie selber zu erhalten, nehmen wir die Schnittebene FGH zur Ebene $x'y'$ eines neuen Coordinatensystemes; die Strecke OG, welche die Ebene von der y-Achse abschneidet, heisse g, der Anfangspunkt der neuen Coordinaten sei G, ferner GF die Achse der positiven x', $\angle GFO = \psi$ und der Neigungswinkel HJK der Ebene gegen die xy-Ebene $= \vartheta$. Wir haben jetzt nach den Formeln 8) in §. 26

Fig. 23.



$$\begin{aligned} x &= \qquad x'\cos\psi - y'\sin\psi\cos\vartheta, \\ y &= g + x'\sin\psi + y'\cos\psi\cos\vartheta, \\ z &= \qquad y'\sin\vartheta \end{aligned}$$

mithin durch Substitution in die Gleichung 2) und bei gehöriger Anordnung

$$6)\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\cos^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\psi}{b^2}\right)x'^2+\left\{\left(\frac{\sin^2\psi}{a^2}+\frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta-\frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right\}y'^2 \\ &\qquad +2\,\frac{(a^2-b^2)\sin\psi\cos\psi\cos\vartheta}{a^2b^2}\,x'y' \\ &\qquad +2\,\frac{g\sin\psi}{b^2}\,x'+2\,\frac{g\cos\psi\cos\vartheta}{b^2}\,y'+\frac{g^2}{b^2}=0. \end{aligned}\right.$$

Hieraus lassen sich nach bekannten Methoden die Achsen des Schnittes ihrer Lage und Grösse nach bestimmen, wobei wir nicht weiter verweilen wollen. Von Interesse ist nur noch die Frage, ob die durch Nr. 6) dargestellte Curve nicht unter Umständen zu einem Kreise werden kann. Hierzu würden die Bedingungen

$$7)\qquad \frac{\cos^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\psi}{b^2}=\left(\frac{\sin^2\psi}{a^2}+\frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta-\frac{\sin^2\vartheta}{c^2},$$

$$8)\qquad (a^2-b^2)\cos\vartheta\cos\psi\sin\psi=0$$

gehören, von denen die letzte wegen der Voraussetzund $a>b$ nur durch

$$\vartheta = 90^0 \text{ oder } \psi = 90^0 \text{ oder } \psi = 0^0$$

erfüllbar ist. Für $\vartheta = 90^0$ liefert die Gleichung 7)

$$\left(\frac{\cos\psi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\psi}{b}\right)^2 = -\frac{1}{c^2}$$

also ein unmögliches Resultat; für $\psi = 90^0$ wird aus Nr. 7)

$$\frac{1}{b^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2} \text{ oder } \sin\vartheta = \frac{c\sqrt{b^2-a^2}}{b\sqrt{a^2+c^2}},$$

mithin ϑ imaginär (wegen $b < a$); endlich für $\psi = 0$ ergiebt sich aus Nr. 7)

$$9)\quad \frac{1}{a^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{b^2} - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2} \text{ oder } \sin\vartheta = \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Giebt man dem für $\sin\vartheta$ erhaltenen Werthe die Form

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

so erscheint $\sin\vartheta$ als Product zweier ächten Brüche, mithin ist der Werth von $\sin\vartheta$ ein ächter Bruch, folglich ϑ immer möglich und zwar zweideutig, weil man dafür eben so wohl einen spitzen, als einen stumpfen Winkel nehmen kann. Demnach wird der elliptische Kegel durch zwei Systeme von Ebenen in Kreisen geschnitten; alle diese Ebenen sind der x-Achse parallel und bilden mit der xy-Ebene gleiche Winkel entweder nach der positiven oder nach der negativen Seite der z hin. Stellt man die Gleichung einer der x-Achse parallelen Ebene in der Form

$$10)\quad By + Cz = D$$

dar, so bestimmt sich ihr Neigungswinkel gegen die xy-Ebene durch die Formel

$$\cos^2\vartheta = \frac{C^2}{B^2+C^2} \text{ oder } \sin^2\vartheta = \frac{B^2}{B^2+C^2};$$

durch Substitution des letzteren Ausdrucks folgt aus Nr. 9), dass die Ebene 10) die Kegelfläche in einem Kreise schneidet, wenn die Bedingung

$$11)\quad \frac{B^2}{C^2} = \frac{c^2(a^2-b^2)}{b^2(a^2+c^2)}$$

erfüllt ist.

Wir lösen endlich noch die Aufgabe, „durch einen gegebenen Punkt $x_1 y_1 z_1$ eine Berührungsebene an die elliptische Kegelfläche zu legen‘. Da die gesuchte Ebene jedenfalls durch den Mittelpunkt der Fläche gehen muss, so ist ihre Gleichung von der Form

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0;$$

ferner haben wir, weil diese Ebene durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ gehen soll

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0,$$

endlich wegen der verlangten Berührung

$$A^2 a^2 + B^2 b^2 = C^2 c^2.$$

Einfacher werden diese Gleichungen, wenn wir

$$\frac{A}{C} = M, \qquad \frac{B}{C} = N$$

setzen; die Gleichung der Berührungsebene ist dann

$$12) \qquad M\xi + N\eta + \zeta = 0$$

und darin gelten für M und N die Bedingungen

$$Mx_1 + Ny_1 + z_1 = 0$$

$$M^2 a^2 + N^2 b^2 = c^2.$$

Aus diesen Gleichungen findet sich

$$M = \frac{-b^2 x_1 z_1 \pm y_1 \sqrt{b^2 c^2 x_1^2 + a^2 c^2 y_1^2 - a^2 b^2 z_1^2}}{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2},$$

$$N = \frac{-a^2 y_1 z_1 \mp x_1 \sqrt{b^2 c^2 x_1^2 + a^2 c^2 y_1^2 - a^2 b^2 z_1^2}}{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}.$$

Demnach sind zwei berührende Ebenen, eine Tangentialebene, oder keine derartige Ebene möglich, jenachdem

$$b^2 c^2 x_1^2 + a^2 c^2 y_1^2 \gtreqless a^2 b^2 z_1^2$$

oder

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 \gtreqless \left(\frac{z_1}{c}\right)^2,$$

d. h. jenachdem der Punkt $x_1 y_1 z_1$ ausserhalb, auf oder innerhalb des von der Kegelfläche umschlossenen Raumes liegt. Schreiben wir im zweiten Falle x, y, z für x_1, y_1, z_1, so ist

$$-\frac{c^2 x}{a^2 z}\xi - \frac{c^2 y}{b^2 z}\eta + \zeta = 0$$

oder symmetrischer

$$13) \qquad \frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta = \frac{z}{c^2}\zeta$$

die Gleichung der durch den Punkt xyz der Kegelfläche gehenden Berührungsebene.

Hieraus findet man leicht

$$14) \quad \xi - x = -\frac{c^2 x}{a^2 z}(\zeta - z), \quad \eta - y = -\frac{c^2 y}{b^2 z}(\zeta - z)$$

als Gleichungen der im Punkte xyz auf der Kegelfläche errichteten Normalen.

§. 31.

Der elliptische Kegel als schiefer Kreiskegel.

Nimmt man irgend einen Kreisschnitt des elliptischen Kegels als neue Directrix, so kann der elliptische Kegel auch als schiefer Kreiskegel angesehen werden, wodurch die Formeln eine andere Gestalt bekommen. Die Ebene eines Kreisschnittes wählen wir zur xy-Ebene eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystemes, dessen Anfang im Mittelpunkte des Kreisschnittes liegen möge; die Gleichung der Directrix, welche gleichzeitig die Horizontalspur des Kegels bildet, ist jetzt

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2.$$

Bezeichnen wir ferner mit a, b, c die Coordinaten der Kegelspitze, so sind die Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$x - a = -\frac{x_0 - a}{c}(z - c), \quad y - b = -\frac{y_0 - b}{c}(z - c);$$

durch Elimination von x_0 und y_0 ergiebt sich

$$1) \qquad (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = r^2 (z - c)^2$$

als Gleichung der Kegelfläche.

Ihr Durchschnitt mit einer beliebigen durch die Gleichung

$$2) \qquad Ax + By + Cz = D$$

repräsentirten Ebene ist eine Linie zweiten Grades, deren Horizontalprojection sich durch Elimination von z aus den Gleichungen beider Flächen bestimmt; die Gleichung der erwähnten Horizontalprojection ist von der Form

$$3) \qquad A_1 x^2 + B_1 y^2 + 2 C_1 xy + 2 D_1 x + 2 E_1 y + F_1 = 0$$

und darin

$$A_1 = (Aa + Cc)^2 + A^2 (b^2 - r^2),$$
$$B_1 = (Bb + Cc)^2 + B^2 (a^2 - r^2),$$
$$C_1 = (Aa + Cc) Ba + (Bb + Cc) Ab - ABr^2.$$

Vermöge dieser Werthe erhält man nach gehöriger Reduction *)

---

*) Bezeichnet man nämlich zur Abkürzung $Aa + Cc$ mit α und $Bb + Cc$ mit β, so findet sich zunächst

$$C_1^2 - A_1 B_1 = r^2 [A^2 (\beta - Bb)^2 + B^2 (\alpha - Aa)^2] - (\alpha\beta - ABab)^2$$

welcher Ausdruck nach Substitution der Werthe von α und β die oben erwähnte Form annimmt.

$$C_1^2 - A_1 B_1 = (A^2 + B^2) r^2 - (Aa + Bb + Cc)^2$$

und hieraus ergiebt sich, dass der Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, jenachdem

$$4) \qquad r^2 \lesseqgtr \frac{(Aa + Bb + Cc)^2}{A^2 + B^2}.$$

Die geometrische Bedeutung hiervon wird auf folgende Weise sichtbar. Durch den Mittelpunkt der Kegelfläche legen wir parallel zur schneidenden Ebene eine Hilfsebene; die Gleichung der letzteren ist

$$A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0$$

und die Gleichung ihrer Horizontalspur ($z = 0$)

$$Ax + By = Aa + Bb + Cc.$$

Für die Entfernung p dieser Geraden vom Coordinatenanfange ergiebt sich

$$p^2 = \frac{(Aa + Bb + Cc)^2}{A^2 + B^2};$$

demnach ist der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem (im absoluten Sinne) $r < p$, $r = p$ oder $r > p$ ist, d. h. jenachdem die Horizontalspur der Hilfsebene ausserhalb der Directrix liegt, sie berührt oder schneidet.

Geht die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt der Kegelfläche, ist also

$$5) \qquad Aa + Bb + Cc = D,$$

so wird die im ersten der in Nr. 4) genannten Fälle, d. h. die für

$$r^2 < \frac{D^2}{A^2 + B^2}$$

entstehende Ellipse zu einem Punkte, die für

$$r^2 = \frac{D^2}{A^2 + B^2}$$

vorhandene Parabel degenerirt in eine Gerade, längs welcher die Ebene den Kegel berührt, endlich degenerirt die der Bedingung

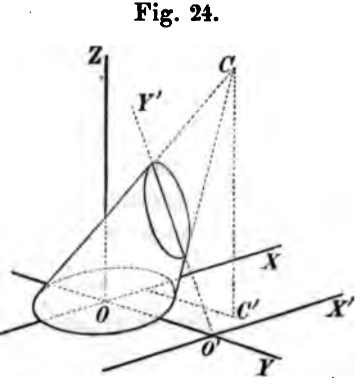
$$r^2 > \frac{D^2}{A^2 + B^2}$$

entsprechende Hyperbel in zwei durch den Mittelpunkt der Fläche gehende Gerade.

Um die Gleichung des Kegelschnittes in möglichst einfacher Form zu erhalten, legen wir die bisher beliebige x-Achse parallel zur Horizontalspur der schneidenden Ebene, so dass die y-Achse mit der Senkrechten vom Coordinatenanfange auf jene Spur zu-

sammenfällt; den Fusspunkt dieses Perpendikels nehmen wir zum Anfangspunkte eines neuen rechtwinkligen Systemes, dessen x'-Achse die Horizontalspur der Schnittebene ist, wobei die positiven x' in derselben Richtung wie die positiven x gezählt werden mögen; die y'-Achse legen wir in die Schnittebene und ihre positive Seite nach der positiven Seite der z-Achse zu; endlich sei k der Abstand des neuen von dem früheren Coordinatenanfange und ϑ der Neigungswinkel der $x'y'$-Ebene gegen die xy-Ebene, d. h. der Winkel zwischen den Richtungen der positiven y und y'. Zufolge dieser Bestimmungen geschieht der Uebergang von dem ursprünglichen zu dem jetzigen Coordinatensysteme mittelst der Substitutionen (Nr. 8 in §. 26 für $\psi = 0$)

Fig. 24.



$$x = x', \qquad y = k + y' \cos\vartheta, \qquad z = y' \sin\vartheta;$$

die Gleichung 1) erhält jetzt die Form

$$6) \quad A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

und darin ist

$$A' = c^2, \quad B' = (a^2 - r^2)\sin^2\vartheta + (b\sin\vartheta - c\cos\vartheta)^2,$$
$$C' = -ac\sin\vartheta, \quad D' = 0,$$
$$E' = c\,[r^2\sin^2\vartheta - k(b\sin\vartheta - c\cos\vartheta)], \quad F' = c^2(k^2 - r^2).$$

Hieraus folgt

$$C'^2 - A'B' = c^2\,[r^2\sin^2\vartheta - (b\sin\vartheta - c\cos\vartheta)^2]$$

und dieser Werth giebt zu erkennen, dass der Schnitt zu einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel wird, jenachdem

$$r^2 \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} (b - c\cot\vartheta)^2$$

ausfällt. Dieses Resultat stimmt, wie leicht zu sehen ist, mit dem vorhin erhaltenen überein.

Soll der Kegelschnitt zu einem Kreise werden, so müssen die Bedingungen $A' = B'$ und $C' = 0$, d. h.

$$c^2 = (a^2 - r^2)\sin^2\vartheta + (b\sin\vartheta - c\cos\vartheta)^2,$$
$$ac\sin\vartheta = 0,$$

erfüllt sein. Die zweite dieser Gleichungen wird durch $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = 180^0$ erfüllt, doch giebt dies nichts Anderes, als eine zur

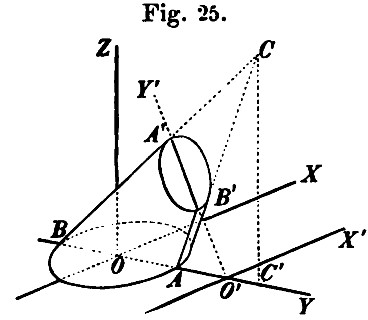


Fig. 25.

Directrix parallele Ebene; da ferner c nicht $= 0$ sein kann, weil sonst die Kegelfläche zu einer Ebene degeneriren würde, so bleibt nur noch $a = 0$ übrig, wodurch gesagt ist, dass der Anfangspunkt des neuen Coordinatensystemes mit dem Mittelpunkte der Kegelfläche in einer und derselben auf der Directrixebene senkrechten Ebene liegen muss. Die erste der Bedingungsgleichungen wird jetzt

$$c^2 = -r^2 \sin^2 \vartheta + (b \sin \vartheta - c \cos \vartheta)^2$$

und liefert, wenn $\sin \vartheta$ und $\cos \vartheta$ durch $\tan \vartheta$ ausgedrückt werden

$$7) \qquad \tan \vartheta = \frac{2bc}{b^2 - c^2 - r^2}.$$

Die geometrische Bedeutung hiervon ergiebt sich, wenn man die beiden Winkel α und $\beta < \alpha$ in Rechnung bringt, welche die yz-Spuren AC und BC der Kegelfläche mit der y-Achse einschliessen; man hat nämlich

$$\tan \alpha = \frac{c}{b-r}, \qquad \tan \beta = \frac{c}{b+r}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2bc}{b^2 - c^2 - r^2},$$

folglich $\alpha + \beta = \vartheta = \angle YO'A'$. Die yz-Spur der Schnittebene liegt demnach so, dass $\angle CB'A' = \angle CBA$ ist; der hiermit bestimmte Kreisschnitt des schiefen Kegels heisst dessen **Wechselschnitt**.

Soll durch einen gegebenen Punkt $x_1 y_1 z_1$ eine berührende Ebene an einen Kreiskegel gelegt werden, so bezeichne man die Gleichung der gesuchten Ebene vorläufig mit

$$8) \qquad L\xi + M\eta + N\zeta = 1;$$

dass sie den gegebenen Punkt $x_1 y_1 z_1$ enthalten muss, wird ausgedrückt durch

$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = 1,$$

die Berührung der verlangten Ebene mit der Fläche liefert ferner die Bedingungen

$$La + Mb + Nc = 1, \qquad r^2 = \frac{1}{L^2 + M^2}.$$

Eliminirt man N aus den beiden ersten Bedingungsgleichungen, so hat man

$$(az_1 - cx_1)L + (bz_1 - cy_1)M = z_1 - c,$$

$$L^2 + M^2 = \frac{1}{r^2},$$

und daraus finden sich die folgenden Werthe von L und M, in denen zur Abkürzung

$$az_1 - cx_1 = u, \qquad bz_1 - cy_1 = v$$

gesetzt worden ist:

$$L = \frac{ru(z_1 - c) \pm v\sqrt{u^2 + v^2 - r^2(z_1 - c)^2}}{r(u^2 + v^2)},$$

$$M = \frac{rv(z_1 - c) \mp u\sqrt{u^2 + v^2 - r^2(z_1 - c)^2}}{r(u^2 + v^2)},$$

$$N = \frac{1 - aL - bM}{c}.$$

Demnach hat die Aufgabe zwei Auflösungen, eine oder keine Auflösung, jenachdem

$$u^2 + v^2 \gtreqless r^2(z_1 - c)^2$$

d. h. jenachdem der Punkt $x_1 y_1 z_1$ ausserhalb des von der Kegelfläche umschlossenen Raumes, auf der Fläche oder innerhalb jenes Raumes liegt. Im zweiten Falle, wo wir x, y, z für x_1, y_1, z_1 schreiben, lautet die Gleichung der Berührungsebene bei vollständiger Entwickelung

$$9) \quad cu\xi + cv\eta + [r^2(z - c) - au - bv]\zeta = cr^2(z - c).$$

Hieraus ergeben sich noch die Gleichungen

$$10) \quad \begin{cases} \xi - x = \dfrac{cu}{r^2(z - c) - au - bv}(\zeta - z) \\[2ex] \eta - y = \dfrac{cv}{r^2(z - c) - au - bv}(\zeta - z) \end{cases}$$

als Gleichungen der durch den Punkt xyz der Kegelfläche gehenden Normalen.

Siebentes Capitel.

Die Umdrehungsflächen.

§. 32.

Entstehung und Gleichung der Umdrehungsflächen.

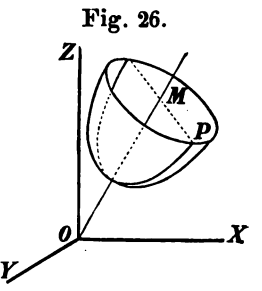
Denkt man sich irgend eine einfach oder doppelt gekrümmte Linie mit einer ihrer Lage nach bestimmten Geraden verbunden, so ist immer eine solche drehende Bewegung der Curve möglich, dass jeder ihrer Punkte einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt auf der festen Geraden liegt; die rotirende Curve erzeugt bei dieser Bewegung eine Fläche, welche eine Rotations- oder Umdrehungsfläche genannt wird; die unveränderliche Gerade heisst ihre Achse.

Aus dieser Entstehung der Fläche geht unmittelbar hervor, dass alle auf der Drehungsachse senkrechten Schnitte der Fläche Kreise sind, deren Halbmesser im Allgemeinen verschieden ausfallen, jenachdem die Schnitte durch verschiedene Punkte der Achse gelegt werden. Diese Kreise werden die Parallelkreise der Fläche genannt. Ferner ist leicht einzusehen, dass die Fläche von allen Ebenen, welche die Drehungsachse in sich enthält, in congruenten Curven geschnitten wird; diese Linien einfacher Krümmung, durch deren Drehung um die Achse gleichfalls die Rotationsfläche erzeugt werden kann, heissen die Meridiane der Fläche.

Um die allgemeine Form kennen zu lernen, unter welcher die Gleichung einer Umdrehungsfläche enthalten ist, denken wir uns durch einen beliebigen Punkt der Drehungsachse ein rechtwinkliges Coordinatensystem gelegt und nennen α, β, γ die Richtungswinkel der Drehungsachse; ferner sei durch einen beliebigen

Punkt xyz der Fläche ein Parallelkreis gelegt, q dessen Halbmesser und p der Abstand seines Mittelpunktes vom Coordinatenanfang. Die Geraden $OM = p$ und $MP = q$ lassen sich nun als die ebenen rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Meridiancurve betrachten und es existirt daher zwischen p und q eine Gleichung von der Form

Fig. 26.



$$1)\qquad q = f(p),$$

oder, wenn statt q der Radiusvector $OP = r$ in Rechnung gebracht wird,

$$\sqrt{r^2 - p^2} = f(p);$$

daraus folgt

$$2)\qquad r^2 = p^2 + [f(p)]^2$$

welche Gleichung überhaupt unter der Form

$$3)\qquad r^2 = F(p)$$

enthalten ist. Durch Substitution der bekannten Werthe

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$p = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma$$

ergiebt sich nun als Gleichung der Rotationsfläche

$$4)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = F(x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma).$$

Geht die Drehungsachse nicht durch den Coordinatenanfang, sondern durch einen Punkt abc, so bedarf es nur einer Verschiebung des Coordinatensystemes nach diesem Punkte; man erhält dann

$$5)\quad \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \\ = F[(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma] \end{cases}$$

als allgemeinste Gleichung der Rotationsflächen.

Am einfachsten gestaltet sich diese Gleichung, wenn man eine der Coordinatenachsen mit der Drehungsachse zusammenfallen lässt; gewöhnlich wählt man hierzu entweder die x-Achse oder die z-Achse. Im ersten Falle ist $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 90^0$, mithin nach Nr. 4)

$$x^2 + y^2 + z^2 = F(x),$$

welcher Gleichung auch die Form

$$y^2 + z^2 = \Phi(x)$$

ertheilt werden kann; im zweiten Falle ergiebt sich analog

$$x^2 + y^2 + z^2 = F(z)$$

oder

$$x^2 + y^2 = \Psi(z).$$

Diese Entwickelungen liefern unmittelbar die Gleichung der Rotationsfläche, wenn die Gleichung des Meridianes $[q = f(p)]$ bekannt ist, was namentlich in dem Falle statt findet, wo die rotirende Curve eine einfach gekrümmte ist und ihre Ebene die Drehungsachse enthält. Finden diese Umstände nicht gleichzeitig statt, so hat man den folgenden Weg einzuschlagen, wobei der Einfachheit wegen vorausgesetzt ist, dass die z-Achse mit der Drehungsachse zusammenfällt. Bei der primitiven Lage der rotirenden Curve mögen die Coordinaten irgend eines ihrer Punkte mit x_0, y_0, z_0 bezeichnet werden, die Projectionen der Curve auf die beiden Verticalebenen sind dann bestimmt durch zwei Gleichungen von den Formen

6) $$x_0 = \varphi(z_0), \qquad y_0 = \psi(z_0);$$

dreht sich nun die Curve um die z-Achse, so erhält der Punkt $x_0 y_0 z_0$ eine andere Lage, und zwar mögen x, y, z seine neuen Coordinaten in dem Falle heissen, wo die Drehung den Winkel ω von der positiven Seite der x-Achse nach der positiven Seite der y-Achse hin durchlaufen hat. Man kann diesen Winkel in der Horizontalprojection sichtbar machen, wenn man die einander gleichen Vectoren der Punkte $x_0 y_0$ und xy zieht, ω ist dann der Winkel zwischen beiden Vectoren. Aus sehr einfachen Gründen hat man

$$x_0 = x \cos\omega + y \sin\omega, \quad y_0 = -x \sin\omega + y \cos\omega, \quad z_0 = z,$$

mithin nach Nr. 6)

7) $$x \cos\omega + y \sin\omega = \varphi(z), \qquad -x \sin\omega + y \cos\omega = \psi(z);$$

dies sind die Gleichungen der rotirenden Curve in irgend einer ihrer Lagen, wobei der Winkel ω das Intervall von 0^0 bis 360^0 zu durchlaufen hat, wenn alle möglichen Lagen der Curve zum Vorschein kommen sollen. Die Elimination von ω giebt

8) $$x^2 + y^2 = [\varphi(z)]^2 + [\psi(z)]^2,$$

als Gleichung der erzeugten Rotationsfläche.

Beispiele hierzu liefern die Curven zweiten Grades, deren entsprechende Flächen in den Fällen sehr einfache Gleichungen erhalten, wo die Drehung um eine der Hauptachsen vor sich geht. Denken wir uns die Ebene xz als die Ebene der in ihrer ursprünglichen Lage befindlichen rotirenden Curve, so haben wir für eine durch den Coordinatenanfang gehende Gerade

$$x_0 = \frac{a}{c} z_0, \qquad y_0 = 0,$$

mithin für die entstandene Kegelfläche

9) $$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{c}\,z\right)^2 \text{ oder } \frac{x^2+y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2};$$

dasselbe Resultat ergiebt sich aus der Gleichung 2) in §. 30, wenn man den dort erwähnten elliptischen Kegel für $b = a$ zu einem geraden Kreiskegel werden lässt.

Die Gleichungen einer in der Ebene xz befindlichen Ellipse sind

$$x_0 = a\sqrt{1 - \left(\frac{z_0}{c}\right)^2}, \qquad y_0 = 0,$$

wobei die Achsen der Ellipse zu Coordinatenachsen genommen sind; die Gleichung der erzeugten Umdrehungsfläche, des sogenannten Rotationsellipsoides, ist folglich

$$x^2 + y^2 = a^2\left[1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2\right]$$

oder bei besserer Anordnung

10) $$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Hierbei müssen wir die Fälle $a > c$, $a < c$ und $a = c$ unterscheiden. Im ersten Falle ist die Drehung um die kleinere Halbachse vor sich gegangen und das Ellipsoid heisst in diesem Falle ein abgeplattetes; im zweiten Falle ist die Drehungsachse die grössere Halbachse und das Ellipsoid ein gestrecktes; im letzten Falle wird die rotirende Curve zu einem Kreise, mithin das Rotationsellipsoid zu einer Kugelfläche; die Gleichung der letzteren pflegt man gewöhnlich unter der Form

11) $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

darzustellen, wobei $r = c = a$ den constanten Halbmesser bedeutet.

Für eine Hyperbel, deren Hauptachse $2a$ mit der x-Achse und deren Nebenachse $2c$ mit der z-Achse zusammenfällt, hat man

$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c}\right)^2 = 1 \text{ oder } x_0 = a\sqrt{1 + \left(\frac{z_0}{c}\right)^2}, \quad y_0 = 0;$$

mithin als Gleichung der erzeugten Umdrehungsfläche

$$x^2 + y^2 = a^2\left[1 + \left(\frac{z}{c}\right)^2\right]$$

oder

12) $$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Diese Fläche heisst das einfache Rotationshyperboloid. Ist dagegen c die Haupt- und a die Nebenhalbachse der Meridiancurve, so gelten für sie die Gleichungen

$$\left(\frac{z_0}{c}\right)^2 - \left(\frac{x_0}{a}\right)^2 = 1 \text{ oder } x_0 = a\sqrt{\left(\frac{z_0}{c}\right)^2 - 1}, \quad y_0 = 0,$$

und daraus ergiebt sich als Gleichung der Umdrehungsfläche

13) $$-\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

letztere heisst das getheilte Rotationshyperboloid, weil sie aus zwei getrennten Stücken besteht.

Für eine Parabel, deren Achse mit der Drehungsachse und deren Scheitel mit dem Coordinatenanfang zusammenfällt, hat man

$$x_0 = \sqrt{2kz_0}, \qquad y_0 = 0,$$

wobei k den Halbparameter der Parabel bezeichnet; die entsprechende Umdrehungsfläche hat zur Gleichung

14) $$x^2 + y^2 = 2kz$$

und heisst das Rotationsparaboloid. Giebt man der Parabel die umgekehrte Lage, so dass ihre Achse mit der x-Achse zusammenfällt, so findet sich

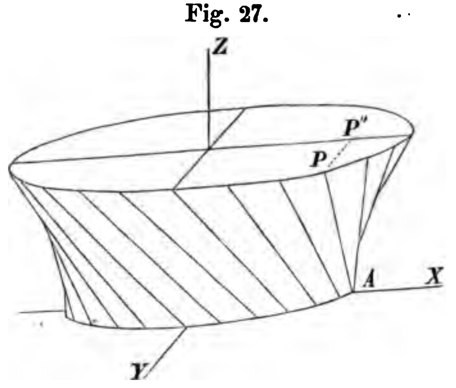
$$z_0 = \sqrt{2kx_0} \text{ oder } x_0 = \frac{z_0^2}{2k}, \qquad y_0 = 0,$$

und

$$x^2 + y^2 = \frac{z^4}{4k^2}.$$

Während die Gleichungen der vorigen Umdrehungsflächen von demselben (zweiten) Grade waren, wie die ihrer Meridiancurven, findet bei der letzten Fläche diese Uebereinstimmung nicht mehr statt; sie führt deshalb keinen besonderen Namen.

Fig. 27.



Um ein Beispiel für den Fall zu haben, wo die rotirende Curve nicht in einer Ebene mit der Drehungsachse liegt, denken wir uns von zwei sich kreuzenden Geraden die eine um die andere herumgedreht. Die feste Gerade sei wieder die z-Achse, die kürzeste Entfernung beider Geraden, in der ursprünglichen Lage der letzteren genommen, sei der Richtung nach zusammenfallend mit der x-Achse und der Grösse

nach $= a$, endlich heisse γ der constante Neigungswinkel $PAP' = 90^0 - \angle PAP''$ der beweglichen Geraden gegen die xy-Ebene. Die Gleichungen der rotirenden Geraden sind jetzt bei deren primitiver Lage

$$x_0 = a, \qquad y_0 = z_0 \cot \gamma,$$

mithin lautet die Gleichung der erzeugten Fläche

$$x^2 + y^2 = a^2 + z^2 \cot^2 \gamma,$$

oder besser

$$15) \qquad \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{(a \tan \gamma)^2} = 1.$$

Der Vergleich mit Nr. 12) führt zu dem bemerkenswerthen Resultate, dass die entstandene Umdrehungsfläche ein einfaches Rotationshyperboloid ist, welches die kürzeste Entfernung a beider Geraden zur Haupthalbachse und $a \tan \gamma$ zur Nebenachse hat. Daraus folgt auch umgekehrt, dass sich auf jedem einfachen Rotationshyperboloide unendlich viel gerade Linien ziehen lassen; jede solche Gerade steht senkrecht auf irgend einem Halbmesser des kleinsten Parallelkreises und ist gegen die Ebene des letzteren um einen Winkel γ geneigt, der sich durch die Formel $\tan \gamma = \frac{c}{a}$ bestimmt.

§. 33.

Schnitte, Berührungsebenen und Normalen der Rotationsflächen.

I. Das Verfahren zur Bestimmung des Durchschnittes einer Umdrehungsfläche mit einer Ebene oder beliebigen anderen Fläche ist im Allgemeinen das nämliche, wie bei den schon besprochenen Gattungen von Flächen; eliminirt man nämlich aus den Gleichungen der sich schneidenden Flächen das eine Mal z, das andere Mal y, so erhält man im ersten Falle die Gleichung der xy-Projection, im anderen Falle die Gleichung der xz-Projection des Durchschnittes. Bei einem ebenen Schnitte kann auch eine Transformation der Coordinaten vorgenommen werden, welche die Gleichung des Durchschnittes selber kennen lehrt. Ein Paar nicht zu gewöhnliche Beispiele hierzu sind folgende.

Durchschnitt einer Kugel mit einem elliptischen Kegel. Beschreibt man aus dem Mittelpunkte eines elliptischen oder schiefen Kreiskegels eine Kugelfläche, so ist der Durchschnitt

beider Flächen ein sogenannter sphärischer Kegelschnitt (sphärische Ellipse), für dessen Punkte die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \text{ und } x^2 \cot^2 \alpha + y^2 \cot^2 \beta - z^2 = 0$$

zusammen gelten (Nr. 11 in §. 32 und Nr. 3 in §. 30). Als Gleichung der Horizontalprojection findet sich hieraus

$$\frac{x^2}{(r \sin \alpha)^2} + \frac{y^2}{(r \sin \beta)^2} = 1;$$

letztere ist folglich eine Ellipse mit den Halbachsen $a' = r \sin \alpha$ und $b' = r \sin \beta$. Die Verticalprojection hat zur Gleichung

$$\frac{x^2}{\dfrac{r^2 \cot^2 \beta}{\cot^2 \beta - \cot^2 \alpha}} + \frac{z^2}{(r \cos \beta)^2} = 1,$$

und ist, $\alpha > \beta$ vorausgesetzt, eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a'' = \frac{r \cot \beta}{\sqrt{\cot^2 \beta - \cot^2 \alpha}}, \qquad c'' = r \cos \beta.$$

Die Projection auf die Ebene yz bestimmt sich durch die Gleichung

$$-\frac{y^2}{\dfrac{r^2 \cot^2 \alpha}{\cot^2 \beta - \cot^2 \alpha}} + \frac{z^2}{(r \cos \alpha)^2} = 1,$$

und ist eine Hyperbel, deren Haupthalbachse $c''' = r \cos \alpha$ in der Richtung der z liegt und deren Nebenhalbachse

$$b''' = \frac{r \cot \alpha}{\sqrt{\cot^2 \beta - \cot^2 \alpha}}$$

ist. In der Figur sind die drei Projectionsebenen auf die in §. 2 erwähnte Weise aus einander gelegt; OA und OB sind die Verticalspuren des elliptischen Kegels, welche mit der z-Achse die Winkel $AOC = \alpha$ und $BOC = \beta$ bilden, OC ist der Kugelhalbmesser, $OA' = a'$, $OB' = b'$, $OC'' = c''$, $OC''' = c'''$; die in der Figur nicht angegebenen Halbachsen a'' und b''' finden sich leicht aus der Bemerkung, dass die Verticalellipse durch den Punkt A und die Hyperbel durch den Punkt B gehen muss.

Fig. 28.

Durchschnitt eines Rotationsparaboloides und eines elliptischen Kegels. Unter der Voraussetzung, dass die Achsen beider Flächen zusammenfallen, sind die Gleichungen der letzteren

$$x^2 + y^2 = 2kz, \qquad x^2 \cot^2\alpha + y^2 \cot^2\beta = z^2.$$

Die Horizontalprojection des Durchschnittes hat die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = (2k \cot\alpha)^2 x^2 + (2k \cot\beta)^2 y^2$$

und ist die sogenannte Fusspunktencurve einer aus den Halbachsen $a' = 2k \cot\alpha$, $b' = 2k \cot\beta$ construirten Ellipse. Als Gleichung der Verticalprojection des Durchschnittes ergiebt sich

$$(\cot^2\beta - \cot^2\alpha)x^2 + (z - k\cot^2\beta)^2 = k^2 \cot^4\beta;$$

sie bedeutet eine Ellipse, deren Halbachsen

$$a'' = \frac{k\cot^2\beta}{\sqrt{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}}, \qquad c'' = k\cot^2\beta$$

sind und deren Mittelpunkt in der Höhe $k\cot^2\beta$ über dem Coordinatenanfange auf der z-Achse liegt. Die Gleichung der seitlichen Verticalprojection lautet

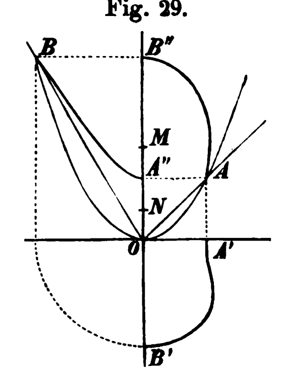
$$(z - k\cot^2\alpha)^2 - (\cot^2\beta - \cot^2\alpha)y^2 = k^2\cot^4\alpha;$$

ihr entspricht eine aus den Halbachsen

$$c''' = k\cot^2\alpha, \qquad b''' = \frac{k\cot^2\alpha}{\sqrt{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}}$$

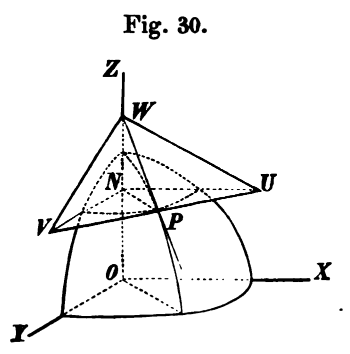
construirte Hyperbel, deren Mittelpunkt in der Höhe $k\cot^2\alpha$ über dem Coordinatenanfange auf der z-Achse liegt. In der Figur ist $OA' = a'$, $OB' = b'$, $OB'' = 2c''$ und der Mittelpunkt M dieser Linie der Mittelpunkt der Verticalellipse; die Haupthalbachse a'' der lezteren lässt sich leicht mittelst der Bemerkung finden, dass die Ellipse durch den Punkt A geht. Ferner ist $OA'' = 2c'''$ und die Mitte N dieser Linie der Mittelpunkt der Hyperbel; die Nebenhalbachse der letzteren kann leicht aus a'' hergeleitet werden. Man wird übrigens, wenn es auf eine Zeichnung ankommt, am zweckmässigsten zuerst die beiden Verticalprojectionen construiren und aus diesen die Horizontalprojection ableiten.

Fig. 29.



II. Legt man durch einen gegebenen Punkt P einer Rotationsfläche einen Parallelkreis und einen Meridian, construirt man ferner die beiden Geraden, welche jene zwei ebenen Curven in P berühren, und legt endlich durch diese sich schneidenden Tangenten eine Ebene, so heisst letztere eine Berührungsebene der Fläche und P ihr Berührungspunkt. Ihre Gleichung wird am

Fig. 30.



kürzesten auf folgende Weise gefunden. Der Mittelpunkt des durch P gelegten Parallelkreises sei N, sein Halbmesser ist dann $NP = \sqrt{x^2 + y^2}$, und wenn man in P an den Kreis eine Tangente legt, so schneidet letztere die Ebene xz in einem Punkte U, dessen Coordinaten

$$\frac{x^2 + y^2}{x}, \quad 0, \quad z$$

sind; dieselbe Tangente schneidet die yz-Ebene in einem durch die Coordinaten

$$0, \quad \frac{x^2 + y^2}{y}, \quad z$$

bestimmten Punkte V. Ferner sei ONP der durch den Punkt P geführte Meridianschnitt, PW die im Punkte P an den Meridian gelegte Tangente und $OW = t$ das von letzterer auf der z-Achse abgeschnittene Stück; die Strecke t ist immer bekannt und aus der bekannten Meridiangleichung leicht zu finden. Legen wir nun durch den Punkt W, dessen Coordinaten $0, 0, t$ sind, und durch die Punkte U, V eine Ebene, so finden wir als Gleichung derselben

$$1) \qquad x\xi + y\eta + \frac{x^2 + y^2}{t - z}\zeta = \frac{x^2 + y^2}{t - z}t;$$

hiermit ist die Berührungsebene im Punkte xyz soweit bestimmt, dass es in jedem individuellen Falle nur noch der Substitution des Werthes von t bedarf.

Hieraus ergeben sich auch die Gleichungen der den Verticalprojectionen einer im Punkte xyz auf der Berührungsebene errichteten Senkrechten, nämlich

$$2) \quad \xi - x = \frac{x(t - z)}{x^2 + y^2}(\zeta - z), \qquad \eta - y = \frac{y(t - z)}{x^2 + y^2}(\zeta - z);$$

dies sind die Gleichungen der Normalen im Punkte xyz.

Als Beispiel diene das Rotationsellipsoid; jeder Meridian desselben ist eine aus den Halbachsen a und c construirte Ellipse, und nach einem bekannten Satze schneidet die Tangente im Punkte P von der z-Achse die Strecke $t = \frac{c^2}{z}$ ab. Hieraus folgt

$$\frac{x^2+y^2}{t-z}=\frac{x^2+y^2}{c^2-z^2}\,z$$

oder vermöge der Gleichung der Fläche (Nr. 10 in §. 32)

$$\frac{x^2+y^2}{t-z}=\frac{a^2}{c^2}\,z;$$

demnach lautet die Gleichung der Berührungsebene

$$x\xi+y\eta+\frac{a^2}{c^2}\,z\zeta=a^2$$

oder in besserer Form

$$3)\qquad \frac{x}{a^2}\,\xi+\frac{y}{a^2}\,\eta+\frac{z}{c^2}\,\zeta=1.$$

Die Gleichungen der Normale sind

$$4)\qquad \xi-x=\frac{c^2x}{a^2z}(\zeta-z),\qquad \eta-y=\frac{c^2y}{a^2z}(\zeta-z).$$

Wir unterlassen die weitere Ausführung dieser Betrachtungen, weil die hauptsächlichsten der vorhin erwähnten Rotationsflächen nur specielle Fälle von allgemeineren Flächen sind, mit deren Untersuchung sich die nächsten Capitel beschäftigen.

Achtes Capitel.

Die Flächen zweiten Grades.

---

§. 34.

Discussion der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiten Grades.

In den drei letzten Capiteln kamen mehrere Flächen vor, deren Gleichungen vom zweiten Grade sind, doch blieb dabei unentschieden, ob mit jenen Flächen die ganze Reihe der möglichen Flächen zweiten Grades bereits erschöpft ist oder nicht; das Letztere würde namentlich dann der Fall sein, wenn Flächen zweiten Grades existiren sollten, die weder Cylinder-, noch Kegel-, noch Umdrehungsflächen sind. Um hierüber zu entscheiden, betrachten wir die allgemeinste Gleichung zweiten Grades zwischen drei Coordinaten, nämlich

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$$
$$+ 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0,$$

und untersuchen, welche verschiedenen Flächen dieselbe repräsentirt. Wir werden dabei im Allgemeinen denselben Weg einschlagen, den die analytische Geometrie bei der Discussion der Gleichung zweiten Grades zwischen zwei Coordinaten zu befolgen pflegt.

Aus der Lehre von der Transformation der Coordinaten ist bekannt, dass der Grad einer Flächengleichung bei dem Uebergange zu einem neuen Coordinatensysteme ungeändert bleibt; wäre demnach die Gleichung 1) auf ein beliebiges schiefwinkliges Coordinatensystem bezogen, so würde man diesem ein rechtwinkliges System der $x'y'z'$ substituiren können und eine neue Gleichung von der Form

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + 2D'x'y' + 2E'x'z' + 2F'y'z'$$
$$+ 2G'x' + 2H'y' + 2I'z' + K' = 0$$

erhalten. Letztere ist von ganz ähnlicher Zusammensetzung, wie die ursprüngliche Gleichung, wir brauchen daher unsere Discussion vorläufig nur auf den Fall zu beziehen, wo das zu Grunde liegende Coordinatensystem ein rechtwinkliges ist.

Irgend einen Punkt xyz der zu untersuchenden Fläche zweiten Grades verbinden wir mit einem beliebig im Raume gewählten Punkte $\xi\eta\zeta$ durch eine Gerade und bezeichnen mit r die Entfernung der Punkte xyz und $\xi\eta\zeta$, ferner durch α, β, γ die Winkel, welche r mit den senkrecht auf einander stehenden Coordinatenachsen der x, y und z bildet; für die Coordinaten x, y, z haben wir nun einerseits, weil der Punkt xyz auf der erwähnten Fläche liegt,

$$1)\quad \left\{ \begin{array}{l} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\ \quad + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0, \end{array} \right.$$

andererseits, weil der Punkt xyz zu der Geraden r gehört,

$$2)\quad x = r\cos\alpha + \xi, \quad y = r\cos\beta + \eta, \quad z = r\cos\gamma + \zeta.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung 1) erhält letztere die Form

$$3)\qquad sr^2 + 2mr + n = 0,$$

wobei s, m, n zur Abkürzung für folgende Ausdrücke dienen

$$s = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma$$
$$+ 2D\cos\alpha\cos\beta + 2E\cos\alpha\cos\gamma + 2F\cos\beta\cos\gamma$$

oder auch bei etwas anderer Anordnung

$$4)\quad \left\{ \begin{array}{l} s = (A\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma)\cos\alpha \\ \quad + (D\cos\alpha + B\cos\beta + F\cos\gamma)\cos\beta \\ \quad + (E\cos\alpha + F\cos\beta + C\cos\gamma)\cos\gamma, \end{array} \right.$$

$$5)\quad \left\{ \begin{array}{l} m = (A\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma)\,\xi \\ \quad + (D\cos\alpha + B\cos\beta + F\cos\gamma)\,\eta \\ \quad + (E\cos\alpha + F\cos\beta + C\cos\gamma)\,\zeta \\ \quad + G\cos\alpha + H\cos\beta + I\cos\gamma, \end{array} \right.$$

$$6)\quad \left\{ \begin{array}{l} n = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 \\ \quad + 2D\xi\eta + 2E\xi\zeta + 2F\eta\zeta \\ \quad + 2G\xi + 2H\eta + 2I\zeta + K. \end{array} \right.$$

Betrachtet man ξ, η, ζ und α, β, γ als gegebene Grössen, d. h. geometrisch, denkt man sich durch den Punkt $\xi\eta\zeta$ eine Gerade in bestimmter Richtung gezogen, so sind die Werthe von s, m und n

bekannt, unbekannt dagegen r, x, y, z, d. h. diejenigen Grössen, welche den Durchschnitt jener Geraden mit der Fläche bestimmen; in diesem Falle führt die Gleichung 3) zur Kenntniss von r und nachher geben die Gleichungen 2) die Coordinaten des Durchschnittes. Die Beachtung des Umstandes, dass die Gleichung 3) eine quadratische ist, mithin höchstens zwei reelle Wurzeln besitzt, liefert nun augenblicklich den Fundamentalsatz: eine gerade Linie kann mit einer Fläche zweiten Grades nicht mehr als zwei Punkte gemein haben.

Die erwähnten Werthe von r sind

$$r = \frac{-m + \sqrt{m^2 - ns}}{s} \quad \text{und} \quad r_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - ns}}{s};$$

sie fallen reell und verschieden aus, wenn $m^2 - ns$ positiv ist, die Gerade schneidet dann die Fläche in zwei Punkten, deren Verbindungslinie eine Sehne der Fläche bildet; für $m^2 - ns = 0$ folgt $r_1 = r$, die Sehne wird dann zu Null und die Gerade zur Tangente an der Fläche; ist endlich $m^2 - ns$ negativ, so liegt die Gerade ausserhalb der Fläche, ohne einen Punkt mit der letzteren gemein zu haben.

Ausser den genannten Hauptfällen bedarf noch ein specieller Fall näherer Untersuchung. Verbindet man zwei beliebige Punkte xyz und $x_1 y_1 z_1$ der Fläche durch eine Gerade und wählt auf letzterer den Punkt $\xi \eta \zeta$ willkürlich, so lassen sich daraus α, β, γ mittelst der Formeln

$$\cos\alpha = \frac{x - x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y - y_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z - z_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

ableiten und dann erhalten s, m, n von selbst solche Werthe, dass r und r_1 reell ausfallen; dies vorausgesetzt, kann man auch beurtheilen, welchen Werth m annehmen wird, wenn man den Punkt $\xi \eta \zeta$ auf die Mitte der Sehne legt. In diesem Falle sind nämlich r und r_1 gleich gross, aber von entgegengesetzten Vorzeichen und es muss folglich die für r angegebene Gleichung eine rein quadratische, d. h. $m = 0$ sein. Führen wir zur Abkürzung die Bezeichnungen ein

$$7)\quad \begin{cases} a = A\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma, \\ b = D\cos\alpha + B\cos\beta + F\cos\gamma, \\ c = E\cos\alpha + F\cos\beta + C\cos\gamma, \\ d = G\cos\alpha + H\cos\beta + I\cos\gamma, \end{cases}$$

) ist, vermöge des Werthes von m,

$$8)\qquad a\xi + b\eta + c\zeta + d = 0$$

ie Bedingung dafür, dass der Punkt $\xi\eta\zeta$ auf der Mitte der in der ichtung $\alpha\beta\gamma$ gezogenen Sehne liegt.

Lassen wir die einmal bestimmten Werthe von α, β, γ ungendert, während ξ, η, ζ sich ändern, so erhalten wir eine Schaar aralleler Sehnen und deren Mittelpunkte; für die Coordinaten der tzteren gilt fortwährend die Gleichung 3), sie repräsentirt also en geometrischen Ort jener Punkte. Letzterer ist aber, wie man amittelbar bemerkt, eine Ebene und man kann daher den wichgen Satz aussprechen: die Mittelpunkte aller parallelen ehnen einer Fläche zweiten Grades liegen in einer bene. Jede derartige Ebene mag eine Diametralebene der läche heissen.

Aus den Richtungswinkeln α, β, γ der parallelen Sehnen erben sich unmittelbar die Stellungswinkel der zugehörigen Diaetralebene, wenn man die Formeln 18) in §. 14 auf die Gleichung anwendet, wobei jene Stellungswinkel kurz mit α', β', γ' beichnet werden mögen; man erhält

$$9)\quad \begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \\ \cos\beta' = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \\ \cos\gamma' = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \end{cases}$$

erner lässt sich der Neigungswinkel ω der parallelen Sehnen gen ihre Diametralebene bestimmen; er ist nämlich das Complement des Winkels, welchen die parallelen Sehnen mit einer auf r Diametralebene errichteten Senkrechten einschliessen; zufolge eser Bemerkung hat man

$$\cos(90^0 - \omega) = \sin\omega$$
$$= \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$

i.

$$\sin\omega = \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

oder noch einfacher, wenn man sich an die Gleichungen 7) und 4) erinnert,

10) $$\sin\omega = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Von besonderem Interesse ist hier die Frage, ob die Richtung der parallelen Sehnen so gewählt werden könnte, dass die zugehörige Diametralebene senkrecht auf den Sehnen steht (man begreift im Voraus, dass eine solche Diametralebene sich besonders gut zu einer neuen Coordinatenebene eignen müsste), was unter den Bedingungen

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = s$$

$$\alpha' = \alpha, \qquad \beta' = \beta, \qquad \gamma' = \gamma$$

der Fall sein würde. Durch Substitution dieser Werthe verwandeln sich die Gleichungen 9) in die folgenden

11) $$\cos\alpha = \frac{a}{s}, \qquad \cos\beta = \frac{b}{s}, \qquad \cos\gamma = \frac{c}{s},$$

oder wegen $s = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma$

12) $$\begin{cases} (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\cos\alpha = a, \\ (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\cos\beta = b, \\ (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\cos\gamma = c. \end{cases}$$

Denkt man sich die Werthe von a, b, c eingesetzt, so enthalten die vorstehenden drei Gleichungen die drei Unbekannten α, β, γ, welche ausserdem noch an die vierte Bedingung

13) $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

gebunden sind. Gleichwohl ist das Problem der Bestimmung von α, β, γ desswegen noch nicht unmöglich, denn man kann sich auf folgende Weise überzeugen, dass die dritte der Gleichungen 12) eine blose Consequenz der beiden vorhergehenden und mithin überflüssig ist. Multiplicirt man die erste der Gleichungen 12) mit $\cos\alpha$, die zweite mit $\cos\beta$ und addirt, so wird

$$(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) = a\cos\alpha + b\cos\beta;$$

hier braucht man nur $\cos^2\alpha + \cos^2\beta$ durch $1 - \cos^2\gamma$ zu ersetzen, um nach gehöriger Hebung sofort die dritte Gleichung in 12) zu erhalten. Wollte man nun die Gleichungen 12) und 13) auf gewöhnliche Weise als drei Gleichungen mit drei Unbekannten ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) behandeln, so würde die Elimination von zweien der letzteren auf eine sehr complicirte Gleichung von hohem Grade führen, es ist daher besser, die obigen Gleichungen so zu betrachten, als ob sie vier Unbekannte, nämlich α, β, γ, s, enthielten, und

vor der Hand s zu entwickeln, woraus sich nachher α, β, γ leicht ableiten lassen.

Setzt man die Werthe von a, b, c in die Gleichungen 11) ein und vereinigt nach Wegschaffung der Brüche die gleichartigen Grössen, so gelangt man zu den folgenden drei Gleichungen

$$(A-s)\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma = 0,$$
$$D\cos\alpha + (B-s)\cos\beta + F\cos\gamma = 0,$$
$$E\cos\alpha + F\cos\beta + (C-s)\cos\gamma = 0;$$

die erste Gleichung dividiren wir durch DE und addiren beiderseits $\frac{\cos\alpha}{F}$; dies giebt

$$\frac{\cos\alpha}{F}+\frac{\cos\beta}{E}+\frac{\cos\gamma}{D}=\frac{\cos\alpha}{DE}\left(s-A+\frac{DE}{F}\right);$$

aus der zweiten Gleichung ziehen wir durch Division mit DF und Addition von $\frac{\cos\beta}{E}$:

$$\frac{\cos\alpha}{F}+\frac{\cos\beta}{E}+\frac{\cos\gamma}{D}=\frac{\cos\beta}{DF}\left(s-B+\frac{DF}{E}\right),$$

und durch ein ähnliches Verfahren aus der dritten Gleichung

$$\frac{\cos\alpha}{F}+\frac{\cos\beta}{E}+\frac{\cos\gamma}{D}=\frac{\cos\gamma}{EF}\left(s-C+\frac{EF}{D}\right).$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$14)\quad \left\{\begin{array}{l} L=A-\frac{DE}{F},\quad M=B-\frac{DF}{E},\quad N=C-\frac{EF}{D},\\ \qquad S=\frac{\cos\alpha}{F}+\frac{\cos\beta}{E}+\frac{\cos\gamma}{D}, \end{array}\right.$$

wo L, M, N bekannte Grössen sind, S dagegen unbekannt ist; wir haben jetzt nach dem Vorigen

$$15)\quad S=\frac{\cos\alpha}{DE}(s-L),\quad S=\frac{\cos\beta}{DF}(s-M),\quad S=\frac{\cos\gamma}{EF}(s-N)$$

oder

$$16)\quad \cos\alpha=\frac{DES}{s-L},\quad \cos\beta=\frac{DFS}{s-M},\quad \cos\gamma=\frac{EFS}{s-N}.$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich zwei andere bilden, welche unmittelbar die Auflösung unseres Problemes liefern; man erhält nämlich einerseits, wenn man die obigen Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in die Formel 13) einsetzt und die entstehende Gleichung auf S reducirt,

$$17)\quad S=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{DE}{s-L}\right)^2+\left(\frac{DF}{s-M}\right)^2+\left(\frac{EF}{s-N}\right)^2}};$$

dividirt man ferner die erste der Gleichungen 16) durch F, die zweite durch E, die dritte durch D und addirt die Quotienten, so ergiebt sich auf der linken Seite wieder S und es ist demnach

$$S = \frac{DE}{F}\frac{S}{s-L} + \frac{DF}{E}\frac{S}{s-M} + \frac{EF}{D}\frac{S}{s-N}$$

oder

$$18)\quad S\left(1 - \frac{DE}{F}\frac{1}{s-L} - \frac{DF}{E}\frac{1}{s-M} - \frac{EF}{D}\frac{1}{s-N}\right) = 0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt sowohl durch $S = 0$, als durch

$$19)\quad 1 - \frac{DE}{F}\frac{1}{s-L} - \frac{DF}{E}\frac{1}{s-M} - \frac{EF}{D}\frac{1}{s-N} = 0;$$

im ersten Falle müsste nach Nr. 15) entweder $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 0$ sein, was der Gleichung 13) widerspricht, oder es müsste gleichzeitig $s = L$, $s = M$, $s = N$ werden, was nur unter der besonderen Voraussetzung, dass L, M, N gleiche Werthe haben, geschehen könnte; versparen wir einstweilen die Untersuchung dieses Specialfalles, so ist im Allgemeinen S von Null verschieden, mithin bleibt noch die Bedingung 19) zu erfüllen. Diese enthält die einzige Unbekannte s; hat man deren Werth durch Auflösung der Gleichung ermittelt, so findet sich S aus Formel 17), nachher dienen die Gleichungen 16) zur Bestimmung der Winkel α, β, γ. Man erkennt hieraus, dass die Frage nach der Möglichkeit einer senkrechten Lage der parallelen Sehnen gegen die ihnen entsprechende Diametralebene in letzter Instanz auf die Frage nach den reellen Wurzeln der Gleichung 19) zurückkommt; letztere bedarf deshalb einer genaueren Untersuchung.

§. 35.

Fortsetzung.

Durch Multiplication mit dem Producte der Differenzen $s-L$, $s-M$ und $s-N$ erhält die Gleichung 18) die Form

$$(s-L)(s-M)(s-N) - \frac{DE}{F}(s-M)(s-N)$$
$$- \frac{DF}{E}(s-L)(s-N) - \frac{EF}{D}(s-L)(s-M) = 0\,{}^{*})$$

und nach Division mit DEF

*) Führt man die angedeuteten Multiplicationen aus und setzt nachher die für L, M, N angegebenen Werthe ein, so kann man die obige Gleichung auch in die folgende verwandeln

$$20)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(s-L)(s-M)(s-N)}{DEF}\\ -\dfrac{(s-L)(s-M)}{D^2}-\dfrac{(s-L)(s-N)}{E^2}-\dfrac{(s-M)(s-N)}{F^2}=0.\end{array}\right.$$

Diese Gleichung ist vom dritten Grade, und da jede cubische Gleichung mindestens eine reelle Wurzel besitzt, so folgt daraus, dass es in jeder Fläche zweiten Grades wenigstens eine Schaar paralleler Sehnen giebt, die von ihrer zugehörigen Diametralebene normal halbirt werden. Um aber zu entscheiden, ob die beiden übrigen Wurzeln reell oder imaginär sind, betrachten wir die Gleichung

$$21)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(s-L)(s-M)(s-N)}{DEF}\\ -\dfrac{(s-L)(s-M)}{D^2}-\dfrac{(s-L)(s-N)}{E^2}-\dfrac{(s-M)(s-N)}{F^2}=t,\end{array}\right.$$

denken uns darin s und t als veränderliche Grössen und fragen, wie viel es reelle Werthe von s giebt, für welche t verschwindet. Diese Frage lässt sich auch unter einen geometrischen Gesichtspunkt bringen, wenn man s als Abscisse, t als Ordinate eines Punktes in der Ebene und die Gleichung 21) als Gleichung einer ebenen krummen Linie betrachtet; man hat dann zu untersuchen, wie viele Punkte diese Curve (eine Parabel dritten Grades) mit der Abscissenachse gemein hat. Dies geschieht auf folgende Weise.

Das Product DEF kann eben so wohl positiv, als negativ sein, im ersten Falle möge dessen reciproker Werth mit $+\varkappa$, im zweiten Falle mit $-\varkappa$ bezeichnet werden, so dass $\varkappa$ in beiden Fällen den absoluten Werth von $\dfrac{1}{DEF}$ ausdrückt. Die Grössen L, M, N sind im Allgemeinen von einander verschieden, es giebt also unter ihnen eine kleinste, eine mittlere und eine grösste, und um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir annehmen, dass $L<M<N$, mithin jede der Differenzen $L-M$, $L-N$, $M-N$ negativ sei; diese Voraussetzung beeinträchtigt übrigens die All-

---

$$(s-A)(s-B)(s-C)$$
$$-D^2(s-C)-E^2(s-B)-F^2(s-A)-2DEF=0.$$

Diese einfache Form der ursprünglichen Gleichung würde in dem Falle bequem sein, wo es sich bei numerisch gegebenen A, B, ... F um den Zahlenwerth von s handelte, dagegen gestattet sie keine so leichte Entscheidung der Frage nach der Anzahl der reellen Wurzeln.

gemeinheit der Untersuchung nicht, denn man wird bald bemerken, dass die nachherigen Erörterungen ganz gleichförmig auf jede andere Rangordnung der Grössen L, M, N passen. Der Gleichung 20) geben wir zunächst die Form

22)
$$t = (s-L)(s-M)(s-N)\left\{\pm \varkappa - \frac{1}{D^2(s-N)} - \frac{1}{E^2(s-M)} - \frac{1}{F^2(s-L)}\right\}$$

und denken uns s als unendlich wachsende negative Zahl; die Quotienten

$$\frac{1}{s-L}, \quad \frac{1}{s-M}, \quad \frac{1}{s-N}$$

haben in diesem Falle die Null zur Grenze, und das Product

$$(s-L)(s-M)(s-N)$$

erhält einen unendlich wachsenden, aber negativen Werth, weil bei hinreichend grossen negativen s jeder einzelne Factor desselben negativ wird. Wir drücken dies kurz durch die Formel aus:

$$\text{für } s = -\infty \text{ wird } t = (-\infty)(\pm \varkappa) = \mp \infty.$$

Nehmen wir zweitens $s = L$, so giebt die Gleichung 21) unmittelbar

$$t = -\frac{(L-M)(L-N)}{F^2}$$

d. h., wenn man sich an das über die Differenzen $L - M$ und $L - N$ Gesagte erinnert,

für $s = L$ wird t negativ.

Daran schliessen sich ferner die Bemerkungen

$$\text{für } s = M \text{ wird } t = -\frac{(M-L)(M-N)}{E^2} \text{ d. h. positiv,}$$

$$\text{,, } s = N \text{ ,, } t = -\frac{(N-L)(N-M)}{D^2} \text{ d. h. negativ.}$$

Wir denken uns zuletzt s als unendlich wachsende positive Zahl und benutzen dabei wieder die Form 22); auch in diesem Falle haben die dort erwähnten Quotienten die Null zur Grenze, dagegen wächst das Product $(s-L)(s-M)(s-N)$ ins positiv Unendliche, d. h.

$$\text{für } s = +\infty \text{ wird } t = (+\infty)(\pm \varkappa) = \pm \infty.$$

Nach diesen Ergebnissen kann man sich leicht ein Bild von dem Verlaufe der in Rede stehenden Curve entwerfen; für ein positives DEF hat sie die in Fig. 31 angedeutete Gestalt, für ein

$$20)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(s-L)(s-M)(s-N)}{DEF}\\ -\dfrac{(s-L)(s-M)}{D^2}-\dfrac{(s-L)(s-N)}{E^2}-\dfrac{(s-M)(s-N)}{F^2}=0.\end{array}\right.$$

Diese Gleichung ist vom dritten Grade, und da jede cubische Gleichung mindestens eine reelle Wurzel besitzt, so folgt daraus, dass es in jeder Fläche zweiten Grades wenigstens eine Schaar paralleler Sehnen giebt, die von ihrer zugehörigen Diametralebene normal halbirt werden. Um aber zu entscheiden, ob die beiden übrigen Wurzeln reell oder imaginär sind, betrachten wir die Gleichung

$$21)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(s-L)(s-M)(s-N)}{DEF}\\ -\dfrac{(s-L)(s-M)}{D^2}-\dfrac{(s-L)(s-N)}{E^2}-\dfrac{(s-M)(s-N)}{F^2}=t,\end{array}\right.$$

denken uns darin s und t als veränderliche Grössen und fragen, wie viel es reelle Werthe von s giebt, für welche t verschwindet. Diese Frage lässt sich auch unter einen geometrischen Gesichtspunkt bringen, wenn man s als Abscisse, t als Ordinate eines Punktes in der Ebene und die Gleichung 21) als Gleichung einer ebenen krummen Linie betrachtet; man hat dann zu untersuchen, wie viele Punkte diese Curve (eine Parabel dritten Grades) mit der Abscissenachse gemein hat. Dies geschieht auf folgende Weise.

Das Product DEF kann eben so wohl positiv, als negativ sein, im ersten Falle möge dessen reciproker Werth mit $+\varkappa$, im zweiten Falle mit $-\varkappa$ bezeichnet werden, so dass $\varkappa$ in beiden Fällen den absoluten Werth von $\dfrac{1}{DEF}$ ausdrückt. Die Grössen L, M, N sind im Allgemeinen von einander verschieden, es giebt also unter ihnen eine kleinste, eine mittlere und eine grösste, und um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir annehmen, dass $L<M<N$, mithin jede der Differenzen $L-M$, $L-N$, $M-N$ negativ sei; diese Voraussetzung beeinträchtigt übrigens die All-

---

$$(s-A)(s-B)(s-C)$$
$$-D^2(s-C)-E^2(s-B)-F^2(s-A)-2DEF=0.$$

Diese einfache Form der ursprünglichen Gleichung würde in dem Falle bequem sein, wo es sich bei numerisch gegebenen $A, B, \ldots. F$ um den Zahlenwerth von s handelte, dagegen gestattet sie keine so leichte Entscheidung der Frage nach der Anzahl der reellen Wurzeln.

$$\frac{DE}{F}\frac{1}{s_1-L}+\frac{DF}{E}\frac{1}{s_1-M}+\frac{EF}{D}\frac{1}{s_1-N}=1,$$
$$\frac{DE}{F}\frac{1}{s_2-L}+\frac{DF}{E}\frac{1}{s_2-M}+\frac{EF}{D}\frac{1}{s_2-N}=1,$$
$$\frac{DE}{F}\frac{1}{s_3-L}+\frac{DF}{E}\frac{1}{s_3-M}+\frac{EF}{D}\frac{1}{s_3-N}=1.$$

Durch Subtraction der zweiten von der ersten Gleichung und nachherige Multiplication mit DEF folgt

$$(s_2-s_1)\left\{\frac{D^2E^2}{(s_1-L)(s_2-L)}+\frac{D^2F^2}{(s_1-M)(s_2-M)}+\frac{E^2F^2}{(s_1-N)(s_2-N)}\right\}=0,$$

da s_2-s_1 von Null verschieden ist, so muss der Inhalt der Parenthese $=0$ sein; auf analoge Weise kann man die erste der vorigen Gleichungen mit der dritten, sowie die zweite mit der dritten verbinden, was zusammen die folgenden Beziehungen giebt:

$$23)\quad\begin{cases}\dfrac{D^2E^2}{(s_1-L)(s_2-L)}+\dfrac{D^2F^2}{(s_1-M)(s_2-M)}+\dfrac{E^2F^2}{(s_1-N)(s_2-N)}=0,\\[2ex]\dfrac{D^2E^2}{(s_1-L)(s_3-L)}+\dfrac{D^2F^2}{(s_1-M)(s_3-M)}+\dfrac{E^2F^2}{(s_1-N)(s_3-N)}=0,\\[2ex]\dfrac{D^2E^2}{(s_2-L)(s_3-L)}+\dfrac{D^2F^2}{(s_2-M)(s_3-M)}+\dfrac{E^2F^2}{(s_2-N)(s_3-N)}=0.\end{cases}$$

Die Winkel, welche die Hauptrichtungen mit den Achsen einschliessen, bestimmen sich Nr. 16), nämlich

$$\cos\alpha_1=\frac{DES_1}{s_1-L},\quad \cos\beta_1=\frac{DFS_1}{s_1-M},\quad \cos\gamma_1=\frac{EFS_1}{s_1-N},$$
$$\cos\alpha_2=\frac{DES_2}{s_2-L},\quad \cos\beta_2=\frac{DFS_2}{s_2-M},\quad \cos\gamma_2=\frac{EFS_2}{s_2-N},$$
$$\cos\alpha_3=\frac{DES_3}{s_3-L},\quad \cos\beta_3=\frac{DFS_3}{s_3-M},\quad \cos\gamma_3=\frac{EFS_3}{s_3-N},$$

und daraus sind die Winkel zwischen den Hauptrichtungen selber leicht abzuleiten. Bezeichnen wir die gesuchten Winkel mit (r_1r_2), (r_1r_3), (r_2r_3), so ist

$$\cos(r_1r_2)=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2,$$
$$\cos(r_1r_3)=\cos\alpha_1\cos\alpha_3+\cos\beta_1\cos\beta_3+\cos\gamma_1\cos\gamma_3,$$
$$\cos(r_2r_3)=\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3;$$

nach Substitution der angegebenen Cosinuswerthe vereinfachen sich diese Ausdrücke sehr, sobald man die Gleichungen 23) beachtet; es bleibt nämlich

$$\cos(r_1r_2)=0,\qquad \cos(r_1r_3)=0,\qquad \cos(r_2r_3)=0,$$

d. h. $\quad\angle(r_1r_2)=\angle(r_1r_3)=\angle(r_2r_3)=90^0.$

Daraus folgt augenblicklich der schöne Satz: die drei Hauptebenen einer Fläche zweiten Grades stehen senkrecht auf einander.

Die vorige Untersuchung, die wir bisher völlig allgemein gehalten haben, kann in speciellen Fällen, namentlich wenn mehrere der Grössen $A, B, C, D \ldots K, L, M, N$ einander gleich werden, einige Modificationen erleiden; so verdient z. B. der Fall $L = M = N$ besondere Aufmerksamkeit. Vermöge der Bedeutung von L, M, N ist dann

$$A = M + \frac{DE}{F}, \qquad B = M + \frac{DF}{E}, \qquad C = M + \frac{EF}{D},$$

mithin nach Nr. 7)

$$a = \left(M + \frac{DE}{F}\right) \cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma$$
$$= M\cos\alpha + DE\left(\frac{\cos\alpha}{F} + \frac{\cos\beta}{E} + \frac{\cos\gamma}{D}\right);$$

für die eingeklammerte Summe schreiben wir, wie früher, S und entwickeln auf gleiche Weise b und c; dies giebt

$$a = M\cos\alpha + DES, \quad b = M\cos\beta + DFS, \quad c = M\cos\gamma + EFS;$$

$$\begin{aligned} s &= a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma \\ &= M(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \\ &\quad + S(DE\cos\alpha + DF\cos\beta + EF\cos\gamma) \\ &= M + DEFS^2. \end{aligned}$$

Von den aufzulösenden drei Gleichungen

$$\begin{aligned} (A - s)\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma &= 0, \\ D\cos\alpha + (B - s)\cos\beta + F\cos\gamma &= 0, \\ E\cos\alpha + F\cos\beta + (C - s)\cos\gamma &= 0, \end{aligned}$$

verwandelt sich die erste nach Substitution der Werthe von A und s in

$$\left(\frac{DE}{F} - DEFS^2\right)\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma = 0$$

oder durch Division mit DE

$$\frac{\cos\alpha}{F} + \frac{\cos\beta}{E} + \frac{\cos\gamma}{D} - FS^2\cos\alpha = 0$$

d. i.

$$S - FS^2\cos\alpha = 0.$$

Behandelt man die übrigen Gleichungen auf dieselbe Weise, so hat man überhaupt folgende Relationen

$$(1 - FS\cos\alpha)S = 0, \quad (1 - ES\cos\beta)S = 0, \quad (1 - DS\cos\gamma)S = 0;$$

diesen Gleichungen kann man auf zweierlei Weise genügen, entweder durch

$$24)\qquad \cos\alpha=\frac{1}{FS},\quad \cos\beta=\frac{1}{ES},\quad \cos\gamma=\frac{1}{DS},$$

oder durch

$$25)\qquad S=0.$$

Aus den Gleichungen 24) ergiebt sich, indem man quadrirt und addirt

$$1=\left(\frac{1}{F^2}+\frac{1}{E^2}+\frac{1}{D^2}\right)\frac{1}{S^2}$$

oder

$$26)\qquad S=\frac{\sqrt{D^2E^2+D^2F^2+E^2F^2}}{DEF},$$

wodurch S, mithin nach Nr. 24) auch α, β, γ gefunden sind. Diese Auflösung stimmt mit derjenigen überein, welche die Formeln 18), 17) und 16) liefern, wenn man beachtet, dass die Gleichung 18) für $L=M=N$ nur vom ersten Grade ist. Ausserdem genügen der Aufgabe auch alle die Winkel, für welche die Gleichung 25) besteht; zum Unterschiede von den vorigen Winkeln mögen dieselben mit α', β', γ' bezeichnet werden, es gilt dann für sie die Gleichung

$$\frac{\cos\alpha'}{F}+\frac{\cos\beta'}{E}+\frac{\cos\gamma'}{D}=0.$$

Diese Bedingung kann auf unendlich viele Arten befriedigt werden, und zwar ist dieselbe wegen

$$\frac{1}{F}=S\cos\alpha,\quad \frac{1}{E}=S\cos\beta,\quad \frac{1}{D}=S\cos\gamma,$$

einerlei mit

$$S(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')=0.$$

Da S nicht verschwindet, so muss der Parentheseninhalt gleich Null sein und es folgt daraus, dass nicht nur die zuerst bestimmte Richtung $\alpha\beta\gamma$, sondern auch jede darauf senkrechte Richtung $\alpha'\beta'\gamma'$ eine Hauptrichtung ist. Dieser besondere Fall tritt übrigens bei Rotationsflächen zweiten Grades ein, wie wir kurz zeigen wollen. Ist

$$q^2=2hp+kp^2$$

die Scheitelgleichung eines Meridians für die rechtwinkligen Coordinaten p und q, sind ferner λ, μ, ν die Richtungswinkel der Drehungsachse, so lautet nach §. 32 die Gleichung der Rotationsfläche

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$
$$=[(x-a)\cos\lambda+(y-b)\cos\mu+(z-c)\cos\nu]^2$$
$$+2h[(x-a)\cos\lambda+(y-b)\cos\mu+(z-c)\cos\nu]$$
$$+k[(x-a)\cos\lambda+(y-b)\cos\mu+(z-c)\cos\nu]^2$$

und nachdem man sie auf die normale Form einer Flächengleichung zweiten Grades gebracht hat, ist

$$A=(1+k)\cos^2\lambda-1,$$
$$B=(1+k)\cos^2\mu-1,$$
$$C=(1+k)\cos^2\nu-1,$$
$$D=(1+k)\cos\lambda\cos\mu,$$
$$E=(1+k)\cos\lambda\cos\nu,$$
$$F=(1+k)\cos\mu\cos\nu.$$

In der That hat man vermöge dieser Werthe

$$A-\frac{DE}{F}=B-\frac{DF}{E}=C-\frac{EF}{D}=-1$$

d. h.

$$L=M=N;$$

ferner ergiebt sich mittelst der Formeln 26) und 24)

$$\cos\alpha=\cos\lambda,\qquad \cos\beta=\cos\mu,\qquad \cos\gamma=\cos\nu;$$

wie vorauszusehen war, ist hier die Richtung der Drehungsachse die erste Hauptrichtung, ausserdem sind noch alle zu letzterer senkrechten Richtungen gleichfalls Hauptrichtungen, was geometrisch unmittelbar erhellt.

Wäre endlich noch specieller $A=B=C$ und $D=E=F=0$, so würden a, b, c die Werthe

$$a=A\cos\alpha,\qquad b=A\cos\beta,\qquad c=A\cos\gamma$$

erhalten, woraus weiter folgt

$$s=A=B=C.$$

Die Gleichungen

$$(A-s)\cos\alpha+D\cos\beta+E\cos\gamma=0,$$
$$D\cos\alpha+(B-s)\cos\beta+F\cos\gamma=0,$$
$$E\cos\alpha+F\cos\beta+(C-s)\cos\gamma=0,$$

werden jetzt von allen beliebigen α, β, γ erfüllt, d. h. jede Richtung kann als Hauptrichtung angesehen werden. Dieser Fall tritt bei der Kugelfläche ein, deren allgemeine Gleichung

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

durch Auflösung der Quadrate und Multiplication mit einem beliebigen Factor A leicht auf die vorausgesetzte Form zu bringen ist.

§. 36.

Schluss.

Nachdem wir die Ueberzeugung gewonnen haben, dass für jede Fläche zweiten Grades drei auf einander senkrechte Hauptebenen angegeben werden können, liegt es sehr nahe, dieselben zu Coordinatenebenen zu wählen. Dabei ist aber ein Umstand zu beachten; die Realität jener Ebenen schliesst die Möglichkeit nicht aus, dass ihr Durchschnittspunkt ins Unendliche falle und man kann daher nicht ohne Weiteres den Durchschnitt aller drei Hauptebenen zum Coordinatenanfang machen*). Wir nehmen daher einstweilen nur zwei Hauptebenen zu Coordinatenebenen und legen den Coordinatenanfang beliebig auf den geradlinigen Durchschnitt derselben, so dass die dritte Coordinatenebene der dritten Hauptebene parallel liegt. Ist nun in dem neuen rechtwinkligen Coordinatensysteme, dessen Coordinaten x', y', z' heissen mögen, die Ebene $y'z'$ eine Hauptebene, so muss jeder in dieser Ebene liegende Punkt $y'z'$ der Mittelpunkt einer darauf senkrechten (zur x'-Achse) parallelen Sehne sein, d. h. jedem Coordinatenpaare $y'z'$ müssen zwei gleich grosse und dem Zeichen nach entgegengesetzte x' entsprechen. Hieraus folgt, dass die transformirte Gleichung, welche die Form

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + 2D'x'y' + 2E'x'z' + 2F'y'z' + 2G'x' + 2H'y' + 2I'z' + K' = 0$$

besitzen würde, rein quadratisch in Beziehung auf x' sein muss; sie lautet daher

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + 2F'y'z' + 2H'y' + 2I'z' + K' = 0.$$

Ist zweitens die Coordinatenebene $x'z'$ eine Hauptebene, so entsprechen jedem willkürlich gewählten Coordinatenpaare $x'z'$ zwei gleiche und entgegengesetzte y', es verschwinden daher auch die Coefficienten aller mit der ersten Potenz von y' behafteten Glieder, d. h. die Gleichung jeder Fläche zweiten Grades kann auf die Form

$$27) \qquad A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + 2I'z' + K' = 0$$

gebracht werden.

---

*) In der analytischen Geometrie der Ebene kommt ein ähnlicher Fall vor. Die Parabel besitzt nämlich so, wie die Ellipse und die Hyperbel, zwei auf einander senkrechte Hauptdiameter, deren Durchschnitt (der Mittelpunkt der Curve) im Unendlichen liegt und eben desswegen nicht zum Coordinatenanfang taugt.

Eine weitere Vereinfachung entsteht dadurch, dass man den Anfangspunkt der Coordinaten auf der z-Achse um die Strecke $\frac{I'}{C'}$ verschiebt; setzt man nämlich

$$x' = x'', \qquad y' = y'', \qquad z' = z'' - \frac{I'}{C'},$$

so verwandelt sich die obige Gleichung in

$$28) \qquad A'x''^2 + B'y''^2 + C'z''^2 + \frac{I'^2}{C'} + K' = 0,$$

wobei man die beiden unveränderlichen Grössen zusammen mit einem einzigen Buchstaben bezeichnen könnte.

Die soeben ausgeführte Verschiebung des Coordinatenanfangs ist in dem Falle $C' = 0$ unthunlich, weil dann $\frac{I'}{C'}$ entweder unendlich oder keine bestimmte Grösse wäre; für diesen Fall, in welchem also statt Nr. 27)

$$29) \qquad A'x'^2 + B'y'^2 + 2I'z' + K' = 0$$

zu schreiben ist, dient eine andere durch die Substitutionen

$$x' = x'', \qquad y' = y'', \qquad z' = z'' - \frac{K'}{2I'}$$

angezeigte Coordinatenänderung; sie giebt

$$30) \qquad A'x''^2 + B'y''^2 + 2I'z'' = 0.$$

Auch diese Transformation ist unausführbar für $I' = 0$; man hätte dann statt der Gleichung 29)

$$A'x'^2 + B'y'^2 + K' = 0,$$

wodurch eine gerade Cylinderfläche charakterisirt wird; da übrigens die vorstehende Form bereits in der Form 28) enthalten ist, so giebt sie keine Veranlassung zu einer neuen Umwandlung. Bei Unterdrückung der nicht mehr nöthigen Accente haben wir nun folgendes Theorem: *Wenn man zwei Hauptebenen einer Fläche zweiten Grades zu den Coordinatenebenen der xz und yz nimmt, so lässt sich die Gleichung der Fläche auf die eine oder andere der beiden Formen*

$$31) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = K$$

$$32) \qquad Ax^2 + By^2 = 2Iz$$

zurückführen; die Flächen zweiten Grades zerfallen daher in zwei verschiedene Arten, jenachdem ihre Gleichungen der einen oder der anderen Form angehören.

Den geometrischen Unterschied zwischen beiden Gattungen von Flächen erkennt man auf folgende Weise. Zieht man durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine ganz beliebige Gerade, deren Richtungswinkel φ, ψ, χ heissen mögen, so gelten für jeden Punkt xyz derselben die Gleichungen

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \cos \psi, \qquad z = r \cos \chi$$

durch deren Substitution in Nr. 31) der Radiusvector r des Durchschnittes von der Geraden mit der Fläche bestimmt wird; die resultirende Gleichung ist eine rein quadratische und giebt folglich zwei gleich grosse und entgegengesetzte Werthe von r. Demnach halbirt der Anfangspunkt der Coordinaten alle durch ihn gelegten Sehnen der Fläche, ist also der **Mittelpunkt** der Fläche und zugleich der Durchschnitt der Hauptebenen, weil die Gleichung 31) auch in Beziehung auf z rein quadratisch ist. Umgekehrt verhält es sich mit der Gleichung 32); dass hier der Coordinatenanfang nicht der Mittelpunkt der Fläche ist, erkennt man augenblicklich aus der quadratischen Gleichung für r, in welcher der Coefficient von r nicht verschwindet; dass aber auch kein anderer Punkt uvw den Mittelpunkt bildet, zeigt die allgemeinere Substitution

$$x = u + r \cos \varphi, \quad y = v + r \cos \psi, \quad z = w + r \cos \chi.$$

Diese führt zur Gleichung

$$(A \cos^2 \varphi + B \cos^2 \psi)\, r^2 + 2\,(A\, u \cos \varphi + B\, v \cos \psi - I \cos \chi)\, r \\ + A\, u^2 + B\, v^2 - 2 I w = 0$$

und hier müsste für alle φ, ψ, χ

$$A\, u \cos \varphi + B\, v \cos \psi - I \cos \chi = 0$$

sein, was aus naheliegenden Gründen unmöglich ist.

Ferner ist für die zweite Gattung von Flächen die Ebene xy keine Hauptebene, letztere liegt vielmehr in unendlicher Entfernung von dieser, wie sich gleich ergiebt, wenn man eine Schaar von Sehnen parallel zur z-Achse legt. **Die erste Art von Flächen zweiten Grades umfasst demnach die centralen Flächen, die zweite die nichtcentralen Flächen.**

Endlich würde noch zu entscheiden sein, wie viel individuelle Flächen zweiten Grades in jeder einzelnen Gattung enthalten sind; hierzu bedarf es nur einer Untersuchung über die verschiedenen möglichen Vorzeichen, welche die Grössen A, B, C, D, K, I in den Gleichungen 31) und 32) haben können.

a. Unter der Voraussetzung, dass keine der Grössen A, B, C, K verschwindet, können wir die Gleichung 31) durch K dividiren und es sei dann

$$\frac{A}{K} = \pm \frac{1}{a^2}, \quad \frac{B}{K} = \pm \frac{1}{b^2}, \quad \frac{C}{K} = \pm \frac{1}{c^2};$$

bilden wir nun alle möglichen Combinationen der Vorzeichen, so entstehen folgende acht Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad +\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Diesen entsprechen aber nicht acht verschiedene Flächen, namentlich sind die Flächen ihrer Natur nach identisch, deren Gleichungen in einer Gruppe beisammen stehen. Schreibt man z. B. in der zweiten Gleichung derjenigen Gruppe, welche zwei positive Zeichen neben einem negativen enthält, x_1, z_1, y_1 für x, y, z und a_1, c_1, b_1 für a, b, c, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{z_1^2}{c_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1$$

und wird dadurch identisch mit der ersten Gleichung derselben Gruppe; beide Flächen unterscheiden sich daher nicht der Art sondern nur der Lage nach, und auf gleiche Weise kann die Gleichheit der übrigen in einer Gruppe befindlichen Flächen nachgewiesen werden. Ausserdem ist noch zu beachten, dass die letzte der vorigen Gleichungen keinen geometrischen Sinn hat, weil die Summe mehrerer negativen Zahlen nicht $= + 1$ sein kann. Demnach bleiben nur die drei Gleichungen

$$33) \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\[2ex] -\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \end{cases}$$

als Repräsentanten von drei wirklich verschiedenen Flächen übrig. Ist zweitens $K = 0$, so setzen wir

$$A = \pm \frac{1}{a^2}, \quad B = \pm \frac{1}{b^2}, \quad C = \pm \frac{1}{c^2}$$

und erhalten durch Combination der Vorzeichen die Formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Die beiden Gleichungen der ersten Gruppe sind identisch (wie die blose Multiplication mit -1 zeigt) und repräsentiren keine Fläche, sondern nur einen Punkt, weil ihnen auf keine andere Weise als durch $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ genügt werden kann. Die beiden Gleichungen der zweiten Gruppe charakterisiren gleichfalls eine und dieselbe Fläche, nämlich den elliptischen Kegel. Uebrigens ist diese Fläche implicite bereits in der zweiten Gleichung von Nr. 33) enthalten; setzt man nämlich in letzterer $a = \delta a'$, $b = \delta b'$, $c = \delta c'$, so wird

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = \delta^2$$

und hieraus wird für $\delta = 0$ die Gleichung der Kegelfläche.

Wenn nicht K, aber einer der Coefficienten B, C, etwa C verschwindet, so repräsentirt die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 = K$$

im Allgemeinen eine Cylinderfläche, deren erzeugende Gerade der z-Achse parallel ist. Die nämliche Gleichung erscheint auch als specieller Fall einer der Gleichungen 33), wenn man c (oder b oder a) unendlich gross werden lässt. Für $K = 0$ wird daraus entweder ein blosser Punkt (bei gleichen Vorzeichen von A und B) oder ein Complex von zwei zur z-Achse parallelen sich schneidenden Ebenen (bei entgegengesetzten Vorzeichen von A und B). Verschwinden zwei der Coefficienten A, B, C, etwa die beiden ersten, so repräsentirt die Gleichung

$$Cz^2 = K$$

bei positiven $\frac{K}{C}$ zwei zur xy-Ebene parallele Ebenen, die für $K = 0$ zusammenfallen, für ein negatives $\frac{K}{C}$ hört die Gleichung auf, geometrisch bedeutsam zu sein.

c. Um in ähnlicher Weise die Flächen zweiter Art zu discutiren, setzen wir zunächst voraus, dass keine der Grössen A, B, I verschwinde; nach Division mit I sei

$$\frac{A}{I} = \pm \frac{1}{a}, \qquad \frac{B}{I} = \pm \frac{1}{b},$$

und jede der Grössen a und b an sich positiv. Die Combination der Vorzeichen liefert folgende vier Gleichungen

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z, \qquad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z,$$

$$-\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z, \qquad -\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z.$$

Hier können wiederum die in einer Gruppe beisammen stehenden Gleichungen zur Identität gebracht werden und zwar dadurch, dass man der z-Achse die entgegengesetzte Lage giebt, d. h. $z = -z'$ setzt; demnach bleiben nur die zwei durch die Gleichungen

$$34) \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} = 2z, \\ \dfrac{x^2}{a} - \dfrac{y^2}{b} = 2z, \end{cases}$$

repräsentirten Flächen als reell verschiedene übrig.

Für $I = 0$ reducirt sich die Gleichung 32) auf

$$Ax^2 + By^2 = 0,$$

wovon die geometrische Bedeutung bereits angegeben wurde. Verschwindet einer der Coefficienten A und B, etwa der letztere, so repräsentirt die Gleichung

$$Ax^2 = 2Iz$$

einen parabolischen Cylinder, dessen erzeugende Gerade der y-Achse parallel ist; für $I = 0$ degenerirt derselbe zur yz-Ebene, für $A = 0$ zur xy-Ebene.

Schliessen wir nun alle die speciellen Fälle aus, in denen eine Fläche zweiten Grades zu einem Kegel, Cylinder oder zu einem ebenen Gebilde wird, so haben wir als Gesammtresultat der ganzen Discussion den Satz: die Flächen zweiten Grades zerfallen in fünf besondere Flächen, von denen drei einen Mittelpunkt und die übrigen keinen Mittelpunkt besitzen.

Wir untersuchen jetzt diese individuellen Flächen der Reihe nach einzeln.

§. 37.

Das Ellipsoid.

Die erste von den centralen Flächen zweiten Grades wird nach Nr. 33) durch die Gleichung

$$1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

charakterisirt, mittelst deren man leicht Auskunft über ihre Gestalt erlangen kann. Um zunächst die Spuren oder sogenannten Hauptschnitte der Fläche kennen zu lernen, setzen wir der Reihe nach $z=0$, $y=0$, $x=0$, und erhalten dem entsprechend

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

diese Gleichungen geben zu erkennen, dass alle drei Hauptschnitte Ellipsen sind, und zwar besitzt der Schnitt mit der xy-Ebene die Halbachsen a und b, der xz-Schnitt die Halbachsen a und c, endlich der yz-Schnitt die Halbachsen b und c. Legt man ferner in der Höhe h über der xy-Ebene eine zu dieser parallele Ebene, d. h. nimmt man z unveränderlich $= h$, so schneidet letztere Ebene die Fläche in einer Linie, welche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}=1$$

oder

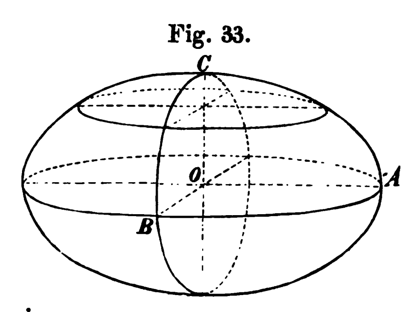
$$\left(\frac{x}{\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}}\right)^2=1$$

zur Gleichung hat; der Durchschnitt ist folglich eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}\quad\text{und}\quad \frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}.$$

Ihre grössten Werthe erhalten dieselben für $h=0$, bei wachsenden h nehmen sie ab, reduciren sich für $h=c$ auf Null (in welchem Falle der Querschnitt zu einem Punkte wird) und werden endlich imaginär für $h>c$. Man kann sich demnach die Fläche durch die Peripherie einer veränderlichen Ellipse erzeugt denken, wenn letztere parallel zur xy-Ebene verschoben wird und gleichzeitig ihre Scheitel auf zwei festen Ellipsen fortrücken, deren eine in der xz-Ebene aus den Halbachsen $OA=a$, $OC=c$, und deren andere in der yz-Ebene aus den Halbachsen $OB=b$, $OC=c$

Fig. 33.



construirt ist. Die Linien a, b, c nennt man die Halbachsen der Fläche und letztere ein dreiachsiges Ellipsoid. Für $b = a > c$ verwandelt sich dasselbe in das abgeplattete Rotationsellipsoid mit c als Drehungsachse, für $c = b < a$ in das durch Drehung um die x-Achse entstandene gestreckte Rotationsellipsoid; für $a > b$ und $c = \infty$ geht das dreiachsige Ellipsoid in einen elliptischen Cylinder über, dessen Normalquerschnitt die Halbachsen a und b besitzt.

Eine beliebige Ebene, deren Gleichung

$$2)\qquad Ax + By + Cz = D$$

schneidet das Ellipsoid in einer krummen Linie, für welche die Gleichung der Horizontalprojection durch Elimination von z aus den Gleichungen 1) und 2) bestimmt wird; das Resultat dieser leichten Rechnung ist von der Form

$$3)\qquad A_1 x^2 + B_1 y^2 + 2 C_1 xy + 2 D_1 x + 2 E_1 y + F_1 = 0,$$

worin A_1, B_1 ... F_1 folgende Werthe besitzen

$$A_1 = \frac{A^2}{c^2} + \frac{C^2}{a^2}, \qquad B_1 = \frac{B^2}{c^2} + \frac{C^2}{b^2}, \qquad C_1 = \frac{AB}{c^2},$$

$$D_1 = -\frac{AD}{c^2}, \qquad E_1 = -\frac{BD}{c^2}, \qquad F_1 = \frac{D^2}{c^2} - C^2.$$

Dem zufolge ist

$$C_1^2 - A_1 B_1 = -\frac{A^2 a^2 + B^2 b^2 + C^2 c^2}{a^2 b^2 c^2} C^2$$

und da der Ausdruck rechter Hand, mithin auch $C_1^2 - A_1 B_1$, jederzeit negativ bleibt, so charakterisirt die Gleichung 3) im Allgemeinen eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Coordinaten

$$4)\qquad x_0 = \frac{B_1 D_1 - C_1 E_1}{C_1^2 - A_1 B_1}, \qquad y_0 = \frac{A_1 E_1 - C_1 D_1}{C_1^2 - A_1 B_1}$$

besitzt. Die Halbachsen dieser Ellipse sind nach einem bekannten Satze reell, wenn der Ausdruck

$$5)\qquad A_1 E_1^2 + B_1 D_1^2 + (C_1^2 - A_1 B_1) F_1 - 2 C_1 D_1 E_1$$

positiv ist; hat der vorstehende Ausdruck den Werth Null, so verschwinden die Halbachsen der Ellipse und es reducirt sich die Curve auf ihren durch die Gleichungen 4) bestimmten Mittelpunkt;

ist endlich der erwähnte Ausdruck negativ, so werden die Halbachsen der Ellipse imaginär und die Gleichung 3) verliert ihre geometrische Bedeutung. Vermöge der Werthe von $A_1, B_1, C_1 \dots F_1$ geben die Formeln 4)

$$x_0 = \frac{ADa^2}{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}, \qquad y_0 = \frac{BDb^2}{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}$$

als ebene Coordinaten des Mittelpunktes der Schnittprojection; die Coordinaten des Mittelpunktes der Schnittellipse selber sind die nämlichen x_0, y_0 und das ihnen vermöge der Gleichung 2) entsprechende

$$z_0 = \frac{CDc^2}{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}.$$

Ferner wird der in Nr. 5) verzeichnete Ausdruck gleich dem folgenden

$$\frac{C^4}{a^2b^2c^2}(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 - D^2),$$

dessen Vorzeichen lediglich von dem Inhalte der Parenthese abhängt. Unter Rücksicht auf den Umstand, dass die Schnittcurve immer derselben Natur wie ihre Projection sein muss, haben wir als Gesammtresultat der vorigen Erörterungen den Satz: wenn der Ausdruck

$$6) \qquad \varDelta = A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 - D^2$$

einen positiven Werth erhält, so schneidet die Ebene 2) das Ellipsoid 1) in einer Ellipse, deren Mittelpunkt durch die Coordinaten

$$x_0 = \frac{ADa^2}{D^2 + \varDelta}, \qquad y_0 = \frac{BDb^2}{D^2 + \varDelta}, \qquad z_0 = \frac{CDc^2}{D^2 + \varDelta}$$

bestimmt ist; für $\varDelta = 0$ hat die Ebene mit der Fläche nur den einen durch die Coordinaten

$$x_0 = \frac{Aa^2}{D}, \qquad y_0 = \frac{Bb^2}{D}, \qquad z_0 = \frac{Cc^2}{D}$$

bestimmten Punkt gemein; bei negativen $\varDelta$ besitzen beide Flächen keinen gemeinschaftlichen Punkt.

Von Interesse ist noch die Frage, ob es solche Lagen der schneidenden Ebene giebt, dass die entstehenden Schnittellipsen auch bei dem dreiachsigen Ellipsoid zu Kreisen werden, wie dies bei den Rotationsellipsoiden der Fall ist. Um hinsichtlich der Achsenverhältnisse eine bestimmte Vorstellung zu haben, setzen wir $a > b > c$ voraus, worin keine Beeinträchtigung der Allgemeinheit liegt, weil es jederzeit frei steht, die grösste der Halbachsen zur x-Achse, die mittlere zur y-Achse und die kleinste zur

z-Achse zu wählen. Wir schneiden ferner das Ellipsoid durch eine Ebene, deren Horizontalspur mit der x-Achse den Winkel ψ einschliesst und deren Neigungswinkel gegen die xy-Ebene ϑ heissen möge. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der x-Achse sei der Anfangspunkt eines neuen Coordinatensystems und seine Entfernung vom Mittelpunkte des Ellipsoides $= k$; die Horizontalspur der Ebene nehmen wir zur Achse der x' und senkrecht darauf die Achse der y' in der Ebene selbst. Die Gleichung des Durchschnittes beider Flächen ergiebt sich nun aus Nr. 1) durch Substitution der Werthe (§. 28, Nr. 8)

$$\begin{aligned} x &= k + x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta \\ y &= \phantom{k + {}} x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta \\ z &= \phantom{k + x' \sin\psi + {}} y' \sin\vartheta \end{aligned}$$

und zwar ist das Resultat von der Form

$$7) \quad A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,$$

worin A', B', C', auf die es nur ankommt, folgende Werthe haben

$$A' = \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}, \quad B' = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2},$$

$$C' = \frac{(a^2 - b^2)\cos\psi \sin\psi \cos\vartheta}{a^2 b^2}.$$

Die Gleichung 7) repräsentirt einen Kreis, wenn die Bedingungen $C' = 0$ und $A' = B'$ gleichzeitig erfüllt sind; die erste giebt entweder

$$\cos\vartheta = 0 \quad \text{oder} \quad \sin\psi = 0 \quad \text{oder} \quad \cos\psi = 0;$$

die zweite Bedingung

$$8) \quad \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2} = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}$$

liefert im Falle $\cos\vartheta = 0$ für $\cos\psi$ den (wegen $b < a$) unmöglichen Werth

$$\cos\psi = \frac{a\sqrt{b^2 - c^2}}{c\sqrt{b^2 - a^2}};$$

der zweite Fall $\sin\psi = 0$ führt zu dem Ausdrucke

$$\sin\vartheta = \frac{c\sqrt{b^2 - a^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}},$$

welcher gleichfalls imaginär ist; für $\cos\psi = 0$ endlich erhält man aus Nr. 8)

$$9) \quad \sin\vartheta = \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{b\sqrt{a^2 - c^2}} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Der rechter Hand stehende Ausdruck ist reell und jederzeit < 1, weil er als Product zweier ächten Brüche dargestellt werden konnte. Die Formel 9) giebt für ϑ zwei verschiedene Werthe, es existiren daher im Allgemeinen zwei verschiedene Systeme paralleler Ebenen, welche das Ellipsoid in Kreisen schneiden; wegen $\psi = 90^0$ stehen alle derartigen Ebenen senkrecht auf der xz-Ebene, d. h. auf der Ebene der grössten und kleinsten Achse, ihre Gleichungen (oder auch die ihrer xz-Spuren) haben die gemeinschaftliche Form

$$z = (x - k)\tan\vartheta$$

d. h. zufolge des Werthes von $\tan\vartheta$

$$c\sqrt{a^2 - b^2}\,(x - k) \pm a\sqrt{b^2 - c^2}\,.\,z = 0$$

oder

$$10)\qquad c\sqrt{a^2 - b^2}\,.\,x \pm a\sqrt{b^2 - c^2}\,.\,z = ck\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Die Schnitte sind reell, so lange

$$\varDelta = c^2\left\{a^2(a^2 - c^2) - (a^2 - b^2)\,k^2\right\}$$

positiv ist, d. h. so lange

$$k^2 < \frac{a^2(a^2 - c^2)}{a^2 - b^2}$$

bleibt; sie werden für

$$k^2 = \frac{a^2(a^2 - c^2)}{a^2 - b^2}$$

zu Punkten, deren Coordinaten sind:

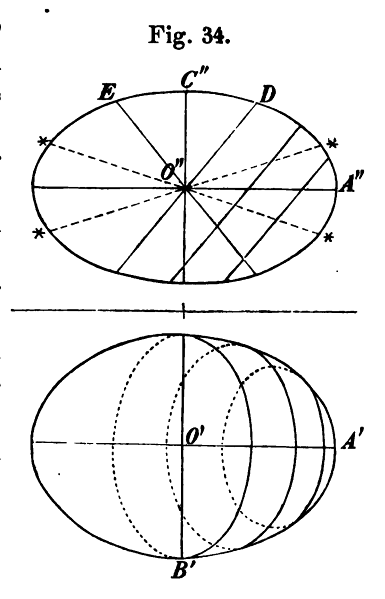
$$\pm\frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}},\qquad 0,\qquad \pm\frac{c\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}},$$

wobei alle Combinationen der Vorzeichen gelten; endlich hören die Kreisschnitte auf, zu existiren, wenn k^2 die angegebene Grösse überschreitet. Die vier erwähnten Punkte, welche als Kreise mit annullirten Halbmessern zu betrachten sind, pflegt man die vier Kreispunkte des Ellipsoides zu nennen.

Diese Ergebnisse sind übrigens leicht graphisch darzustellen, wenn man die Fläche auf zwei den Coordinatenebenen xy und xz parallele Ebenen projicirt; in der Horizontalprojection hat man die beiden Halbachsen $O'A' = a$, $O'B' = b$, in der Verticalprojection die Halbachsen $O''A'' = a$, $O''C'' = c$; beschreibt man aus O'' mit b als Halbmesser einen Kreis, welcher die Verticalellipse u. A. in D schneidet, so ist

$$\sin A''O''D = \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{b\sqrt{a^2 - c^2}}$$

Fig. 34.



mithin ϑ entweder $= \angle A''O''D$ oder gleich dessen Nebenwinkel $A''O''E$. Alle auf der Ebene der Verticalprojection (Bildebene) senkrechten und zu $O''D$ oder $O''E$ parallelen Ebenen schneiden das Ellipsoid in Kreisen (drei derselben sind in der Figur angegeben und erscheinen in der Horizontalprojection als Ellipsen); die Halbmesser der Kreise werden um so kleiner, je weiter sich die Schnitte vom Mittelpunkte der Fläche entfernen, und gehen zuletzt in Null über. Die Mittelpunkte aller erwähnten Kreise liegen auf denjenigen Durchmessern der Verticalellipse, welche entweder zur Sehnenrichtung OD oder zur Richtung OE gehören, die Endpunkte der Durchmesser sind die vier Kreispunkte der Fläche und in der Figur durch Asterisken bezeichnet.

Wir betrachten endlich den Fall, wo die Ebene nur einen Punkt mit der Fläche gemein hat, d. h. letztere in diesem Punkte berührt, und lösen die hieran sich knüpfende Aufgabe, ‚durch einen gegebenen Punkt xyz des Ellipsoides eine Tangentialebene an letzteres zu legen‘. Nennen wir

$$14)\qquad A\xi + B\eta + C\zeta = D$$

die Gleichung der gesuchten Ebene, so müssen nach dem Vorigen die Bedingungen

$$A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 = D^2,$$
$$x = \frac{Aa^2}{D}, \qquad y = \frac{Bb^2}{D}, \qquad z = \frac{Cc^2}{D}$$

erfüllt sein; aus den letzten Gleichungen folgen die Werthe

$$A = \frac{Dx}{a^2}, \qquad B = \frac{Dy}{b^2}, \qquad C = \frac{Dz}{c^2};$$

welche der ersten Bedingung genügen, weil der Punkt xyz, vermöge der gemachten Voraussetzung, auf der Fläche liegt. Nach Substitution der Werthe von A, B, C erhalten wir aus Nr. 11)

$$12) \qquad \frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta + \frac{z}{c^2}\zeta = 1$$

als Gleichung der Berührungsebene am Punkte xyz; ihre Spuren schneiden von den Coordinatenachsen die Strecken $\frac{a^2}{x}$, $\frac{b^2}{y}$, $\frac{c^2}{z}$ ab und sind hiernach sehr leicht zu construiren.

Eine auf der Berührungsebene im Berührungspunkte errichtete Senkrechte hat die Gleichungen

$$13) \qquad \eta - y = \frac{a^2 y}{b^2 x}(\xi - x), \qquad \zeta - z = \frac{a^2 z}{c^2 x}(\xi - x),$$

womit die durch den Punkt xyz gehende **Normale** der Fläche bestimmt ist.

§. 38.

Das einfache Hyperboloid.

Setzt man in der Gleichung der zweiten centralen Fläche

$$1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

der Reihe nach $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, so erhält man als Gleichungen der Spuren oder Hauptschnitte:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

demgemäss ist der Hauptschnitt mit der xy-Ebene eine aus den Halbachsen a und b gebildete Ellipse, die sogenannte **Kehlellipse**, der xz-Schnitt ist eine Hyperbel, welche a zur Haupt- und c zur Nebenhalbachse hat, der yz-Schnitt ist gleichfalls eine Hyperbel mit der Haupthalbachse b und der Nebenhalbachse c. Für eine in der Höhe h parallel zur xy-Ebene gelegte Ebene hat z den constanten Werth $z = h$ und es ist folglich die Gleichung ihres Schnittes mit der Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 1$$

oder

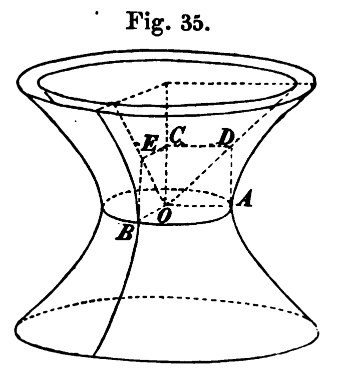
$$\left(\frac{x}{\frac{a}{c}\sqrt{c^2 + h^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{b}{c}\sqrt{c^2 + h^2}}\right)^2 = 1;$$

der Schnitt ist folglich eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2 + h^2} \quad \text{und} \quad \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + h^2}.$$

Letztere erhalten für $h=0$ ihre kleinsten Werthe und wachsen mit h gleichzeitig ins Unendliche. Demzufolge kann man sich die Fläche durch die Peripherie einer veränderlichen Ellipse erzeugt denken, wenn letztere parallel zur xy-Ebene verschoben wird und ihre Scheitel auf zwei festen Hyperbeln fortrücken, deren eine in der xz-Ebene aus den Halbachsen $OA=CD=a$, $OC=AD=c$, und deren andere in der yz-Ebene aus den Halbachsen $OB=CE=b$, $OC=BE=c$ construirt ist, wobei c für beide Hyperbeln als Nebenhalbachse dient. Die Linien a, b, c nennt man die Halbachsen der Fläche und letztere ein **dreiachsiges Hyperboloid.** Für $b=a$ verwandelt sich dasselbe in das einfache Rotationshyperboloid, für $a>b$ und $c=\infty$ geht es in denselben elliptischen Cylinder über wie unter gleichen Umständen das dreiachsige Ellipsoid. Endlich ist noch die Veränderung zu erwähnen, welche die Fläche in dem Falle erleidet, wo die Asymptotenwinkel $AOD=\alpha'$ und $BOD=\beta'$ constant bleiben aber die Halbachsen bis zu Null vermindert werden; giebt man der Gleichung 1) für diesen Zweck die Form

Fig. 35.



$$x^2 \tan^2 \alpha' + y^2 \tan^2 \beta' - z^2 = c^2$$

und lässt nachher c in Null übergehen, so bleibt

$$x^2 \tan^2 \alpha' + y^2 \tan^2 \beta' - z^2 = 0$$

als Gleichung der resultirenden Fläche; diese ist ein elliptischer Kegel, wie schon in §. 36, I. bemerkt wurde. Die Gleichung desselben kann auch in der Form

$$2) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

dargestellt werden und führt zu einer nahen Beziehung beider Flächen. Der in der Höhe $z=h$ parallel zur xy-Ebene gelegte Querschnitt des Kegels ist eine Ellipse mit den Halbachsen $\frac{ah}{c}$ und $\frac{bh}{c}$, mithin sind die Differenzen zwischen den Halbachsen der durch das Hyperboloid und durch den Kegel in gleicher Höhe gelegten Schnitte

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}-\frac{a}{c}h=\frac{ac}{\sqrt{c^2+h^2}+h},$$

$$\frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}-\frac{b}{c}h=\frac{bc}{\sqrt{c^2+h^2}+h};$$

für unendliche wachsende h haben beide Differenzen die Null zur Grenze d. h. je entfernter von der xy-Ebene eine Parallelebene zu dieser gelegt wird, destoweniger differiren die Querschnitte der beiden Flächen von einander. Zufolge dieser Eigenschaft heisst die durch Nr. 2) charakterisirte Fläche der Asymptotenkegel des einfachen Hyperboloides.

Eine beliebige Ebene, deren Gleichung

3) $$Ax+By+Cz=D$$

sein möge, schneidet das Hyperboloid in einer Linie zweiten Grades, für welche die Gleichung der Horizontalprojection durch Elimination von z gefunden wird; sie hat die Form

4) $$A_1x^2+B_1y^2+2C_1xy+2D_1x+2E_1y+F_1=0$$

und zwar ist

$$A_1=-\frac{A^2}{c^2}+\frac{C^2}{a^2},\quad B_1=-\frac{B^2}{c^2}+\frac{C^2}{b^2},\quad C_1=-\frac{AB}{c^2},$$

$$D_1=\frac{AD}{c^2},\quad E_1=\frac{BD}{c^2},\quad F_1=-\frac{D^2}{c^2}-C^2.$$

Hieraus ergeben sich die Werthe

$$C_1^2-A_1B_1=\frac{A^2a^2+B^2b^2-C^2c^2}{a^2b^2c^2}C^2,$$

$$A_1E_1^2+B_1D_1^2+(C_1^2-A_1B_1)F_1-2C_1D_1E_1$$
$$=\frac{-A^2a^2-B^2b^2+C^2c^2+D^2}{a^2b^2c^2}C^4,$$

mittelst deren Vorzeichen bekanntlich die Natur der betreffenden Liniez weiten Grades beurtheilt werden kann. Dabei sind folgende Fälle zu unterscheiden.

Ist $C_1^2-A_1B_1$ negativ also

$$A^2a^2+B^2b^2<C^2c^2,$$

so wird A_1 positiv*) und dasselbe gilt von dem Ausdrucke

$$\Delta=-A^2a^2-B^2b^2+C^2c^2+D^2;$$

die Gleichung 4) bedeutet in diesem Falle eine Ellipse, deren Mittelpunkt durch die Coordinaten

*) Diese Bemerkung ist desswegen nicht überflüssig, weil das zweite Unterscheidungszeichen für die Kegelschnitte ein positives A_1 voraussetzt.

$$\frac{ADa^2}{D^2-\Delta}, \quad \frac{BDb^2}{D^2-\Delta}$$

bestimmt wird.

Im zweiten Falle $C_1^2 - A_1 B_1 = 0$ oder

$$A^2 a^2 + B^2 b^2 = C^2 c^2$$

ist A_1 wiederum positiv und die Gleichung 4) repräsentirt eine Parabel, wenigstens so lange, als Δ nicht verschwindet d. h. $D \gtrless 0$ ist; für $D=0$ degenerirt die Parabel zu zwei parallelen Geraden, deren Gleichungen unmittelbar angegeben werden können. Die Gleichung 4) lautet nämlich für $D=0$

$$\frac{C^2c^2-A^2a^2}{a^2c^2}x^2+\frac{C^2c^2-B^2b^2}{b^2c^2}y^2-2\frac{AB}{c^2}xy-C^2=0$$

d. i. wegen der vorher erwähnten Bedingung

$$\frac{B^2b^2}{a^2c^2}x^2+\frac{A^2a^2}{b^2c^2}y^2-2\frac{AB}{c^2}xy=C^2.$$

oder

$$\left(\frac{Bb}{a}x-\frac{Aa}{b}y\right)^2=C^2c^2$$

woraus

$$\frac{Bb}{a}x-\frac{Aa}{b}y=\pm Cc.$$

Ist endlich drittens $C_1^2 - A_1 B_1$ positiv also

$$A^2a^2+B^2b^2>C^2c^2,$$

so bedeutet die Gleichung 4) im Allgemeinen eine Hyperbel, deren Mittelpunkt die Coordinaten

$$\frac{ADa^2}{D^2-\Delta}, \quad \frac{BDb^2}{D^2-\Delta}$$

besitzt. Für $\Delta=0$ reducirt sich dieselbe auf ihre Asymptoten, denn wenn man in Nr. 4) die für diesen Fall gültigen Werthe

$$A_1=\frac{B^2b^2-D^2}{a^2c^2}, \qquad B_1=\frac{A^2a^2-D^2}{b^2c^2}, \qquad F_1=-\frac{A^2a^2+B^2b^2}{c^2}$$

einsetzt, so erhält man

$$\left(\frac{Bb}{a}x-\frac{Aa}{b}y\right)^2-\left(\frac{D}{a}x-Aa\right)^2-\left(\frac{D}{b}y-Bb\right)^2=0,$$

oder für

$$x=\frac{Aa^2}{D}+x_1, \qquad y=\frac{Bb^2}{D}+y_1,$$

$$\left(\frac{Bb}{a}x_1-\frac{Aa}{b}y_1\right)^2-x_1^2-y_1^2=0;$$

diese Gleichung repräsentirt, wie ihre Reduction auf x_1 zeigt, zwei Gerade, welche den durch die Coordinaten

$$\frac{Aa^2}{D} \text{ und } \frac{Bb^2}{D}$$

bestimmten Punkt gemein haben. Diese Ergebnisse sind leicht auf den Schnitt selber zu übertragen und sehr gut in Worte zu fassen, wenn man den geometrischen Sinn der Unterscheidung $A^2a^2 + B^2b^2 \lesseqgtr C^2c^2$ berücksichtigt. Legt man nämlich durch den Coordinatenanfang parallel zur Schnittebene die Hilfsebene:

$$Ax + By + Cz = 0,$$

so kann letztere gegen den Asymptotenkegel drei verschiedene Lagen einnehmen; sie hat mit demselben entweder nur den Kegelmittelpunkt gemein, oder sie berührt ihn, oder sie schneidet ihn in zwei Geraden, und diese drei Fälle sind es, welche nach §. 30 den oben gemachten Unterscheidungen entsprechen. Hiernach lässt sich das Gesammtresultat der Untersuchung auf folgende Weise zusammenstellen: Um die Natur des Schnittes zu beurtheilen, den eine beliebige durch die Gleichung 3) ausgedrückte Ebene mit dem einfachen Hyperboloid bildet, lege man durch den Mittelpunkt der Fläche parallel zu dieser Ebene eine Hilfsebene; wenn letztere mit dem Asymptotenkegel nur den Mittelpunkt gemein hat, so ist der entstandene Schnitt eine Ellipse, deren Mittelpunkt durch die Coordinaten

$$x_0 = \frac{ADa^2}{D^2 - \varDelta}, \quad y_0 = \frac{BDb^2}{D^2 - \varDelta}, \quad z_0 = -\frac{CDc^2}{D^2 - \varDelta}$$

$$5) \qquad \varDelta = -A^2a^2 - B^2b^2 + C^2c^2 + D^2$$

bestimmt wird; wenn zweitens die Hilfsebene den Asymptotenkegel berührt, so ist der Schnitt eine Parabel, welche in dem speciellen Falle, wo die Hilfsebene mit der ursprünglichen Ebene identisch wird, zu einem System von zwei parallelen Geraden degenerirt; schneidet endlich die Hilfsebene den Asymptotenkegel in zwei Geraden, so ist der Schnitt der ersten Ebene mit der Fläche eine Hyperbel, deren Mittelpunktscoordinaten

$$x_0 = \frac{ADa^2}{D^2 - \varDelta}, \quad y_0 = \frac{BDb^2}{D^2 - \varDelta}, \quad z_0 = -\frac{CDc^2}{D^2 - \varDelta}$$

sind; dieser Punkt liegt ausserhalb des von der Fläche umschlossenen Raumes wenn

$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c}\right)^2 > 1$$

d. h. wenn Δ positiv ist, er liegt innerhalb desselben bei negativen Δ, endlich für $\Delta = 0$ befindet er sich auf der Fläche selbst, seine Coordinaten sind dann

$$x_0 = \frac{Aa^2}{D}, \qquad y_0 = \frac{Bb^2}{D}, \qquad z_0 = -\frac{Cc^2}{D},$$

und die Hyperbel wird in diesem Falle zu zwei durch diesen Punkt gehenden Geraden.

Von den hiermit erschöpften möglichen Lagen einer Ebene gegen das einfache Hyperboloid wollen wir einige noch etwas specieller betrachten.

Zunächst mag untersucht werden, ob der elliptische Schnitt der Fläche zu einem Kreise werden kann. Denken wir uns die Lage der schneidenden Ebene durch den Abschnitt k, welchen sie auf der y-Achse bildet, durch ihren Neigungswinkel ϑ gegen die xy-Ebene und durch den Winkel ψ bestimmt, welchen ihre Horizontalspur mit der x-Achse einschliesst, so haben wir zur Transformation der Coordinaten die Formeln

$$\begin{aligned} x &= \phantom{k+{}} x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta \\ y &= k + x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta, \\ z &= \phantom{k + x' \sin\psi + {}} y' \sin\vartheta, \end{aligned}$$

und zwar ist der Durchschnitt der Ebene mit der y-Achse der Anfang des neuen rechtwinkligen Coordinatensystemes der $x'y'$, sowie die Horizontalspur der Ebene dessen x'-Achse. Nach Substitution der obigen Ausdrücke erhalten wir aus Nr. 1) als Gleichung des Schnittes

$$A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

und zwar ist darin

$$A' = \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}, \qquad B' = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2},$$

$$C' = \frac{(a^2 - b^2)\sin\psi\cos\psi\cos\vartheta}{a^2 b^2}.$$

Dieser Schnitt wird zu einem Kreise wenn $A' = B'$ und zugleich $C' = 0$ ist. Die letztere Bedingung giebt entweder $\vartheta = 90^0$, oder $\psi = 90^0$, oder $\psi = 0^0$. Setzen wir voraus, dass $a > b$ sei, wodurch die Allgemeinheit insofern nicht beeinträchtigt wird, als es freisteht, die x-Achse durch die grössere der beiden Halbachsen a und b zu legen, so erhalten wir aus der ersten Bedingung

$$\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2} = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}$$

sowohl für $\vartheta = 90^0$ als für $\psi = 90^0$ unmögliche Resultate; dagegen giebt die Supposition $\psi = 0^0$

$$6)\qquad sin\,\vartheta = \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Der rechter Hand stehende Ausdruck ist immer reell und ein Produkt zweier ächten Brüche mithin < 1; daraus folgt, dass ein Kreisschnitt der Fläche bei zwei verschiedenen Neigungswinkeln, nämlich ϑ und $180^0 - \vartheta$, möglich ist. Die Ebenen aller derartigen Schnitte sind parallel und stehen wegen $\psi = 0^0$ senkrecht auf der yz-Ebene; mit Rücksicht auf die in §. 30 (S. 117) erhaltenen Resultate kann man überhaupt den bemerkenswerthen Satz aussprechen, dass alle Ebenen, welche den Asymptotenkegel in Kreisen schneiden, auch mit dem einfachen Hyperboloid kreisförmige Schnitte bilden. Die Gleichungen dieser Ebenen (oder auch die ihrer yz-Spuren) haben die gemeinschaftliche Form

$$z = (y-k)\, tan\,\vartheta$$

d. i. zufolge des Werthes von $tan\,\vartheta$

$$7)\qquad c\sqrt{a^2-b^2}\,(y-k) \pm b\sqrt{a^2+c^2}.\,z = 0.$$

Die Mittelpunkte der Kreisschnitte liegen auf zwei Durchmessern der aus den Halbachsen b und c construirten Hyperbel, diese Durchmesser schneiden aber die Curve nicht; das einfache Hyperboloid besitzt demnach keine Kreispunkte. Man kann diese Verhältnisse ebenso leicht wie bei dem Ellipsoid graphisch zur Anschauung bringen, wenn man die Fläche auf zwei Ebenen projicirt, von die eine der xy-Ebene und die andere der yz-Ebene parallel ist.

Aus dem Früheren ergab sich, dass ein einfaches Hyperboloid von einer Ebene in geraden Linien geschnitten werden kann, oder, was Dasselbe ist, dass sich auf der Fläche gerade Linien ziehen lassen; diese Eigenschaft, welche das Hyperboloid mit dem Kegel und Cylinder gemein hat, wollen wir direkt betrachten, indem wir die Bedingungen aufsuchen, unter welchen eine durch die Gleichungen ihrer beiden Verticalprojectionen

$$8)\qquad x = Mz + u, \qquad y = Nz + v$$

bestimmte Gerade auf der Fläche liegt. Diess würde nun der Fall sein, wenn alle den vorstehenden Gleichungen genügenden x, y, z ausserdem noch die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

befriedigen; nach Substitution der Werthe von x, y, z wird aus der letzteren Gleichung,

$$\left(\frac{M^2}{a^2}+\frac{N^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2+2\left(\frac{Mu}{a^2}+\frac{Nv}{b^2}\right)z+\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1,$$

und diese kann für alle z nur dann bestehen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{Mu}{a^2}+\frac{Nv}{b^2}=0, \qquad \frac{M^2}{a^2}+\frac{N^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0.$$

Von diesen Gleichungen sagt die erste, dass die Horizontalspur der verlangten Geraden auf der Horizontalspur der Fläche liegen muss, was geometrisch unmittelbar vorausgesehen werden konnte; denken wir uns diese Bedingung dadurch befriedigt, dass wir den Punkt uv willkührlich auf der Kehlellipse wählen, so enthalten die übrigen zwei Gleichungen die beiden Unbekannten M und N; als deren Werthe finden wir

$$M=\pm\frac{av}{bc}\frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}=\pm\frac{av}{bc},$$

$$N=\mp\frac{bu}{ac}\frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}=\mp\frac{bu}{ac},$$

wobei sich die Vorzeichen auf einander beziehen. Vermöge der Realität von M, N, u, v haben wir nun zwei Systeme von geraden Linien auf dem Hyperboloid; für irgend eine Gerade des ersten Systemes gelten die Gleichungen

$$9) \qquad x=+\frac{av}{bc}z+u, \qquad y=-\frac{bu}{ac}z+v,$$

und für jede Gerade des anderen Systemes:

$$10) \qquad x=-\frac{av}{bc}z+u, \qquad y=+\frac{bu}{ac}z+v.$$

Legen wir eine Gerade des zweiten Systemes durch einen anderen Punkt $u_1 v_1$ der Kehlellipse, so ist für sie

$$11) \qquad x=-\frac{av_1}{bc}z+u_1, \qquad y=+\frac{bu_1}{ac}z+v_1;$$

aus der ersten Gleichung von 9) und der ersten Gleichung in 11) folgt

$$z=-\frac{bc}{a}\,\frac{u-u_1}{v+v_1},$$

aus der zweiten Gleichung in 9) verbunden mit der zweiten Gleichung in 11)

$$z = + \frac{ac}{b} \frac{v - v_1}{u + u_1}.$$

Da beide Punkte uv und $u_1 v_1$ auf der Kehlellipse liegen, so ist gleichzeitig

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{u_1^2}{a^2} + \frac{v_1^2}{b^2} = 1$$

mithin durch Subtraction und Zerlegung der Quadratdifferenzen

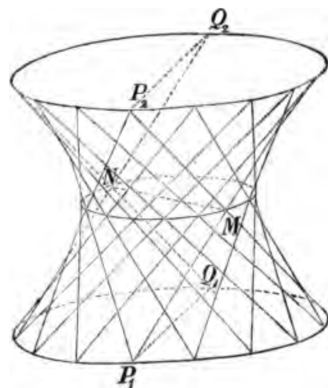
$$\frac{(u - u_1)(u + u_1)}{a^2} + \frac{(v - v_1)(v + v_1)}{b^2} = 0;$$

giebt man dieser Gleichung die Form

$$-\frac{b}{a} \frac{u - u_1}{v + v_1} = + \frac{a}{b} \frac{v - v_1}{u + u_1},$$

so erkennt man die Identität der vorigen beiden Werthe von z; geometrisch heisst diess: jede Gerade des einen Systemes schneidet alle Geraden des zweiten Systemes. Der Durchschnitt kann ebensowohl auf der unteren als auf der oberen Hälfte der Fläche statt finden; der erste Fall tritt bei negativen z ein, d. i. wenn $u + u_1$ und $v - v_1$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, der zweite Fall, wenn $u + u_1$ und $v - v_1$ gleiche Vorzeichen besitzen. Der Uebergang von der einen Lage des Durchschnittes zur anderen ist an den beiden Stellen $u_1 = u$, $v_1 = v$ und $u_1 = -u$, $v_1 = -v$; bei der ersten liegt der Durchschnitt auf der Kehlellipse, bei der zweiten im Unendlichen, weil dann die Geraden 9) und 11) parallel werden. In der Figur ist der Punkt uv mit M, der ihm diametral gegenüberliegende mit N bezeichnet; MP_1 und NQ_1 sind die durch die Punkte M und N gehenden Geraden des ersten, MP_2, NQ_2 die des zweiten Systemes. Die Gerade MP_1 schneidet auf der unteren Hälfte der Fläche alle Geraden des zweiten Systemes, deren Horizontalspuren links zwischen M und N liegen, auf der oberen Hälfte der Fläche alle Geraden des zweiten Systemes, deren Horizontalspuren rechts zwi-

Fig. 36.



schen M und N liegen; endlich ist $MP_1 \parallel NQ_2$ und ebenso $MP_2 \parallel NQ_1$.

Aus den Gleichungen 9) erhält man noch durch Elimination von z

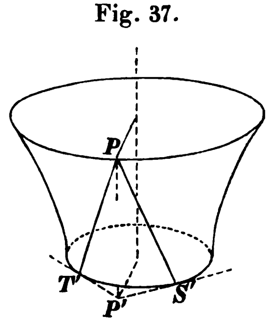
$$\frac{u}{a^2}x + \frac{v}{b^2}y = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v}{b^2} = 1$$

und ebenso aus Nr. 11)

$$\frac{u_1}{a^2}x + \frac{v}{b^2}y = 1,$$

d. h. geometrisch: die Horizontalprojectionen aller auf der Fläche liegenden Geraden berühren die Kehlellipse. Dies giebt ein einfaches Mittel zur Construktion der beiden durch einen gegebenen Punkt P der Fläche gehenden Geraden; von der Horizontalprojection P' des Punktes aus legt man nämlich an die Kehlellipse zwei Tangenten, deren Berührungspunkte S' und T' heissen mögen; die Geraden PS' und PT' sind dann die verlangten Linien.

Fig. 37.



Legt man durch irgend eine Gerade des einen und durch eine sie schneidende Gerade des anderen Systemes eine Ebene, so erhält man eine von den Ebenen, welche die Fläche in zwei Geraden schneiden, für die Coefficienten ihrer Gleichung

$$12) \qquad Ax + By + Cz = D$$

gilt dann die Eigenschaft

$$13) \qquad A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2 = D^2$$

und die Coordinaten des Punktes, welcher als Durchschnitt der beiden Geraden sowohl der Ebene als der Fläche angehört, sind wie früher

$$\frac{Aa^2}{D}, \quad \frac{Bb^2}{D}, \quad -\frac{Cc^2}{D}.$$

Wir legen weiter in der Höhe $z = -\frac{Cc^2}{D}$ parallel zur xy-Ebene eine neue Ebene; sie schneidet das Hyperboloid in einer Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{C^2c^2}{D^2} = \frac{A^2a^2 + B^2b^2}{D^2}$$

ist, wofür wir schreiben

$$14)\qquad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

$$a_1 = \frac{a\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2}}{D}, \qquad b_1 = \frac{b\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2}}{D};$$

die nämliche Ebene schneidet ferner die durch 12) dargestellte Ebene in einer Geraden, deren Gleichung ist

$$Ax + By = D + \frac{C^2c^2}{D} = \frac{A^2a^2 + B^2b^2}{D},$$

wofür wir schreiben

$$15)\qquad A_1x + B_1y = 1,$$

$$A_1 = \frac{AD}{A^2a^2 + B^2b^2}, \qquad B_1 = \frac{BD}{A^2a^2 + B^2b^2}.$$

Vermöge dieser Werthe ergiebt sich

$$A_1^2a_1^2 + B_1^2b_1^2 = 1,$$

woraus folgt, dass die Gerade 15) die Ellipse 14) berührt. Auf ähnliche Weise kann man eine noch allgemeinere Eigenschaft der Ebene 12) entdecken; legt man nämlich durch den vorhin genannten Punkt irgend einen Schnitt s der Fläche, dessen Ebene von selbst die Ebene 12) in einer Geraden g schneidet, so ist letztere jedesmal Tangente an s. Demgemäss muss die betrachtete Ebene als Inbegriff aller durch den genannten Punkt gehenden Tangenten der Fläche d. h. als die Berührungsebene in diesem Punkte angesehen werden, wie sich später noch auf anderem Wege ergeben wird.

Daran knüpft sich die Bestimmung der Berührungsebene für einen gegebenen Punkt xyz der Fläche. Bezeichnen wir die Gleichung der verlangten Ebene mit

$$A\xi + B\eta + C\zeta = D,$$

so müssen dem Vorigen zufolge die Bedingungen

$$A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2 = D^2$$

und

$$x = \frac{Aa^2}{D}, \qquad y = \frac{Bb^2}{D}, \qquad z = -\frac{Cc^2}{D}$$

erfüllt sein. Aus den letzten Gleichungen ergeben sich die Werthe von A, B, C, sie genügen der ersten Gleichung und daher ist

$$16)\qquad \frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta - \frac{z}{c^2}\zeta = 1$$

die Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz.

Hieraus folgen noch die Gleichungen der Normalen in diesem Punkte; sie sind

$$\eta - y = \frac{a^2 y}{b^2 x}(\xi - x), \qquad \zeta - z = -\frac{a^2 z}{c^2 x}(\xi - x)$$

oder, auf die beiden Verticalebenen bezogen,

$$17) \quad \xi - x = -\frac{c^2 x}{a^2 z}(\zeta - z), \qquad \eta - y = -\frac{c^2 y}{b^2 z}(\zeta - z).$$

§. 39.

Das getheilte Hyperboloid.

Die Gleichung der dritten centralen Fläche war

$$1) \qquad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

setzt man der Reihe nach $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, so ergeben sich als Gleichungen der Spuren oder Hauptschnitte der Fläche

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

die erste dieser Gleichungen charakterisirt keine reelle Curve, die Fläche hat demnach mit der xy-Ebene keinen Punkt gemein; die beiden anderen Gleichungen gehören zu Hyperbeln und zwar besitzt der xz-Schnitt die Haupthalbachse c und die Nebenhalbachse a, der yz-Schnitt die nämliche Haupthalbachse und die Nebenhalbachse b. Für eine in der Entfernung h parallel zur xy-Ebene gelegte Schnittebene ist $z = h$ mithin die Gleichung des Schnittes

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1$$

oder

$$\left(\frac{x}{\frac{a}{c}\sqrt{h^2 - c^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{b}{c}\sqrt{h^2 - c^2}}\right)^2 = 1,$$

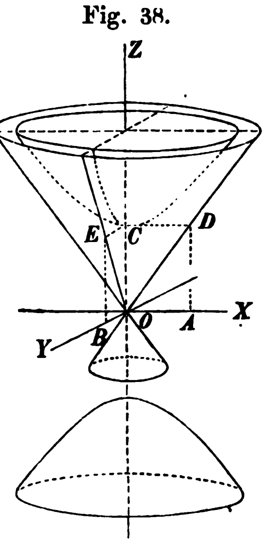
folglich der Schnitt im Allgemeinen eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{h^2 - c^2}, \qquad \frac{b}{c}\sqrt{h^2 - c^2}.$$

Letztere sind so lange imaginär als $h^2 < c^2$, d. h. h zwischen $-c$ und $+c$ enthalten ist, alle zu solchen h gehörenden Ebenen schneiden mithin die Fläche nicht; für $h^2 = c^2$ besteht jene Ellipse aus einem blossen Punkte, die Ebenen, für welche $z = +h$ oder $= -h$, berühren daher die Fläche; ist aber $h^2 > c^2$, so werden

die Achsen der Ellipse reell und wachsen mit h gleichzeitig ins Unendliche. Demzufolge kann man sich die Fläche durch die Peripherie einer veränderlichen Ellipse erzeugt denken, wenn letztere parallel zur xy-Ebene verschoben wird und ihre Scheitel auf zwei festen Hyperbeln fortrücken, deren eine in der xz-Ebene aus den Halbachsen $OC = c$, $OA = CD = a$, und deren andere in der yz-Ebene aus den Halbachsen $OC = c$, $OB = CE = b$ construirt ist, wobei c für beide Hyperbeln als Haupthalbachse dient. Die Linien a, b, c nennt man die Halbachsen der Fläche und letztere ein dreiachsiges getheiltes Hyperboloid. Für $b = a$ verwandelt sich dasselbe in das getheilte Rotationshyperboloid, für $a > b$ und $c = \infty$ wird es zu einem elliptischen Cylinder. Ertheilt man der Gleichung 1) durch Einführung der Asymptotenwinkel $COD = \alpha$ und $COE = \beta$ die Form

Fig. 38.



$$x^2 \cot^2 \alpha + y^2 \cot^2 \beta - z^2 = - c^2$$

und lässt nachher, ohne Aenderung von α und β, c in Null übergehen, so ergiebt sich

$$x^2 \cot^2 \alpha + y^2 \cot^2 \beta - z^2 = 0;$$

das Hyberboloid degenerirt dann zu einer elliptischen Kegelfläche. Die Gleichung derselben kann auch in der Form

$$2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

dargestellt werden, aus welcher durch fast wörtlich dieselben Schlüsse wie in §. 38 folgt, dass dieser elliptische Kegel der Asymptotenkegel des getheilten Hyperboloides ist.

Eine beliebige Ebene, deren Gleichung

$$3) \qquad Ax + By + Cz = D$$

sein möge, schneidet die Fläche in einer Linie zweiten Grades, für deren Horizontalprojection folgende Gleichung gilt

$$4) \quad A_1 x^2 + B_1 y^2 + 2 C_1 xy + 2 D_1 x + 2 E_1 y + F_1 = 0,$$

worin

$$A_1 = -\frac{A^2}{c^2} + \frac{C^2}{a^2}, \qquad B_1 = -\frac{B^2}{c^2} + \frac{C^2}{b^2}, \qquad C_1 = -\frac{AB}{c^2},$$

$$D_1 = \frac{AD}{c^2}, \qquad E_1 = \frac{BD}{c^2}, \qquad F_1 = -\frac{D^2}{c^2} + C^2.$$

Hieraus ergeben sich die Werthe

$$C_1^2 - A_1 B_1 = \frac{A^2 a^2 + B^2 b^2 - C^2 c^2}{a^2 b^2 c^2} C^2$$

$$A_1 E_1^2 + B_1 D_1^2 + (C_1^2 - A_1 B_1) F_1 - 2 C_1 D_1 E_1$$
$$= \frac{A^2 a^2 + B^2 b^2 - C^2 c^2 + D^2}{a^2 b^2 c^2} C^4,$$

mittelst deren Vorzeichen die Natur des Schnittes beurtheilt werden kann. Dabei sind folgende Fälle zu unterscheiden.

Wenn erstens $C_1^2 - A_1 B_1$ negativ also

$$A^2 a^2 + B^2 b^2 < C^2 c^2$$

und mithin A_1 positiv ist, so bedeutet die Gleichung 4) im Allgemeinen eine Ellipse, deren Achsen ebensowohl reell, als $= 0$, als imaginär sein können. Das Erste findet unter der Bedingung statt, dass der Ausdruck

$$\varDelta = A^2 a^2 + B^2 b^2 - C^2 c^2 + D^2$$

einen positiven Werth hat; die Mittelpunktscoordinaten der Schnittprojection sind dann

$$\frac{AD a^2}{-D^2 + \varDelta} \text{ und } \frac{BD b^2}{-D^2 + \varDelta}.$$

Für $\varDelta = 0$ reducirt sich diese Ellipse auf ihren Mittelpunkt, dessen Coordinaten

$$-\frac{Aa^2}{D}, \qquad -\frac{Bb^2}{D}$$

sind; endlich für negative $\varDelta$ wird die Curve imaginär.

Im zweiten Hauptfalle $C_1^2 - A_1 B_1 = 0$ oder

$$A^2 a^2 + B^2 b^2 = C^2 c^2$$

bedeutet die Gleichung 4) eine Parabel so lange $\varDelta$ nicht verschwindet d. h. $D \lesseqgtr 0$ ist. Für $D = 0$ dagegen bringt man die Gleichung durch eine ähnliche Transformation wie im vorigen Paragraphen auf die Form

$$\left(\frac{Bb}{a} x - \frac{Aa}{b} y\right)^2 = -C^2 c^2,$$

welcher keine geometrische Bedeutung zukommt.

Im dritten Hauptfalle $C_1^2 - A_1 B_1 > 0$ oder

$$A^2 a^2 + B^2 b^2 > C^2 c^2$$

ist die Projection des Schnittes jederzeit eine Hyperbel, deren Mittelpunkt die Coordinaten

$$\frac{A D a^2}{-D^2+\varDelta} \text{ und } \frac{B D b^2}{-D^2+\varDelta}$$

besitzt. Diese Erörterungen über die Projection des Schnittes sind leicht auf den letzteren zu übertragen, wobei zu berücksichtigen ist, dass den drei Hauptfällen $A^2 a^2 + B^2 b^2 \lesseqqgtr C^2 c^2$ hier dieselbe geometrische Bedeutung wie im vorigen Paragraphen zukommt. Das Gesammtergebniss lautet dann folgendermaassen: Um die Natur des Schnittes beurtheilen zu können, den eine beliebige durch die Gleichung 3) ausgedrückte Ebene mit dem getheilten Hyperboloid bildet, lege man durch den Mittelpunkt der Fläche parallel zu dieser Ebene eine Hilfsebene; wenn letztere mit dem Asymptotenkegel nur den Mittelpunkt gemein hat, so ist der Schnitt im Allgemeinen eine Ellipse, deren Mittelpunktscoordinaten sind

$$x_0 = -\frac{A D a^2}{D^2-\varDelta}, \qquad y_0 = -\frac{B D b^2}{D^2-\varDelta}, \qquad z_0 = \frac{C D c^2}{D^2-\varDelta},$$

$$5) \qquad \varDelta = A^2 a^2 + B^2 b^2 - C^2 c^2 + D^2;$$

die Achsen dieser Ellipse sind reell für positive $\varDelta$, bei $\varDelta = 0$ degenerirt die Ellipse zu einem Punkte, dessen Coordinaten

$$x_0 = -\frac{A a^2}{D}, \qquad y_0 = -\frac{B b^2}{D}, \qquad z_0 = \frac{C c^2}{D}$$

sind und in welchem die Ebene die Fläche berührt, für negative $\varDelta$ hat die Ebene keinen Punkt mit dem Hyperboloid gemein; wenn zweitens die Hilfsebene den Asymptotenkegel berührt, so ist der Schnitt eine Parabel, welche nur in dem Falle $D = 0$ zu existiren aufhört; schneidet endlich die Hilfsebene den Asymptotenkegel in zwei Geraden; so ist der Schnitt der Fläche jederzeit eine Hyperbel, deren Mittelpunktscoordinaten durch die Formeln

$$x_0 = -\frac{A D a^2}{D^2-\varDelta}, \qquad y_0 = -\frac{B D b^2}{D^2-\varDelta}, \qquad z_0 = \frac{C D c^2}{D^2-\varDelta}$$

bestimmt werden. Geradlinige Schnitte der Fläche sind nicht vorhanden.

Wir untersuchen noch besonders die Möglichkeit kreisförmiger Schnitte der Fläche. Die Horizontalspur der schneidenden Ebene möge mit der x-Achse den Winkel ψ bilden, der Neigungswinkel der Schnittebene gegen die xy-Ebene sei ϑ, endlich k das Stück, welches sie von der y-Achse abschneidet. Nehmen wir

die Horizontalspur der Schnittebene zur Achse der x' und den Punkt, in welchem sie der y-Achse begegnet, zum Anfangspunkte eines neuen ebenen rechtwinkligen Systemes, so ergiebt sich die Gleichung des Schnittes durch Substitution der Werthe

$$x = x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta$$
$$y = k + x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta$$
$$z = y' \sin\vartheta;$$

das Resultat ist von der Form

$$A' x'^2 + B' y'^2 + 2C' x' y' + 2D' x' + 2E' y' + F' = 0$$

und darin

$$A' = \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}, \quad B' = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2},$$
$$C' = \frac{(a^2-b^2)\cos\psi \sin\psi \cos\vartheta}{a^2 b^2}.$$

Diese Gleichung repräsentirt einen Kreis für $C' = 0$ und $A' = B'$. Die erste Bedingung giebt entweder $\vartheta = 90^0$ oder $\psi = 90^0$ oder $\psi = 0^0$. Setzen wir $a > b$ voraus, wodurch die Allgemeinheit der Betrachtung nicht alterirt wird, so liefert die Bedingung $A' = B'$ d. h.

$$\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2} = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}$$

sowohl für $\vartheta = 90^0$ als für $\psi = 90^0$ unmögliche Resultate; dagegen findet sich für $\psi = 0^0$

$$6) \qquad \sin\vartheta = \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Da der Werth von $\sin\vartheta$ jederzeit reell und zugleich ein ächter Bruch ist, so existiren zwei Systeme von Kreisschnitten, deren Ebenen auf der yz-Ebene senkrecht stehen und entweder unter dem Winkel ϑ oder unter $180^0 - \vartheta$ gegen die xy-Ebene geneigt sind. Aus der Uebereinstimmung der Formel 6) mit der Formel 9) in §. 30 ergiebt sich ferner, dass alle Ebenen, welche den Asymptotenkegel in Kreisen und zugleich das Hyperboloid schneiden, auch mit letzterer Fläche kreisförmige Schnitte bilden. Die Gleichungen der Kreisschnittebenen (oder deren yz-Spuren) haben die gemeinschaftliche Form

$$z = (y - k) \tan\vartheta$$

d. i. zufolge des Werthes von $\tan\vartheta$

$$7) \qquad c\sqrt{a^2-b^2}\,(y-k) \pm b\sqrt{a^2+c^2} \,.\, z = 0;$$

die Schnitte sind reell so lange

$$\Delta = c^2 \left\{ - b^2 (b^2 + c^2) + (a^2 - b^2) k^2 \right\}$$

positiv ist d. h. für alle der Ungleichung

$$k^2 > \frac{b^2 (b^2 + c^2)}{a^2 - b^2}$$

genügenden k; wenn dagegen

$$k^2 = \frac{b^2 (b^2 + c^2)}{a^2 - b^2},$$

so degeneriren die Kreisschnitte zu Punkten, deren Coordinaten sind

$$0, \qquad \pm \frac{b \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \qquad \pm \frac{c \sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}},$$

wobei alle Combinationen der Vorzeichen gelten; für

$$k^2 < \frac{b^2 (b^2 + c^2)}{a^2 - b^2}$$

existiren keine Kreisschnitte mehr. Die erwähnten vier Punkte heissen die Kreispunkte des getheilten Hyperboloides; man kann sie und die Spuren der Kreisschnittebenen leicht dadurch zur Anschauung bringen, dass man die Fläche auf zwei den Ebenen xy und yz parallele Ebenen projicirt.

Wir bestimmen endlich noch die durch einen gegebenen Punkt xyz der Fläche gehende Berührungsebene und Normale. Bezeichnet

$$A\xi + B\eta + C\zeta = D$$

die Gleichung der Tangentialebene, so müssen, dem Früheren zufolge, nachstehende Bedingungen erfüllt sein:

$$x = -\frac{Aa^2}{D}, \qquad y = -\frac{Bb^2}{D}, \qquad z = \frac{Cc^2}{D},$$

$$\Delta = A^2 a^2 + B^2 b^2 - C^2 c^2 + D^2 = 0;$$

aus den ersten drei Gleichungen ergeben sich die Werthe von A, B, C und diese genügen der letzten Gleichung, weil der Punkt xyz auf der Fläche liegt; demnach ist

$$8) \qquad -\frac{x}{a^2}\xi - \frac{y}{b^2}\eta + \frac{z}{c^2}\zeta = 1$$

die Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz. Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$9) \qquad \xi - x = -\frac{c^2 x}{a^2 z}(\zeta - z), \qquad \eta - y = -\frac{c^2 y}{b^2 z}(\zeta - z)$$

als Gleichungen der Normalen im Punkte xyz.

§. 36.
Das elliptische Paraboloid.

Die erste von den nichtcentralen Flächen zweiten Grades wird durch die Gleichung

$$1)\qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z$$

dargestellt, worin a und b wesentlich positive Grössen bezeichnen. Als Gleichungen der Hauptschnitte oder Spuren der Fläche erhalten wir der Reihe nach

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=0,\qquad \frac{x^2}{2a}=z,\qquad \frac{y^2}{2b}=z;$$

der ersten Gleichung genügen nur die Werthe $x=0$, $y=0$, die Fläche wird also von der xy-Ebene nicht geschnitten, sondern im Anfangspunkte der Coordinaten berührt; die zweite Gleichung bedeutet eine Parabel, deren Halbparameter $=a$, deren Scheitel der Coordinatenanfang und deren Achse die z-Achse ist, die letzte Gleichung charakterisirt gleichfalls eine Parabel mit dem Halbparameter b, mit demselben Scheitel und der nämlichen Achse. Für einen in der Höhe $z=h$ parallel zur xy-Ebene gelegten Schnitt erhält man als Gleichung

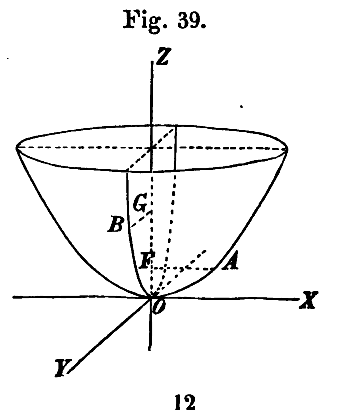
$$\frac{x^2}{2ah}+\frac{y^2}{2bh}=1;$$

der Schnitt ist bei positiven h eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\sqrt{2ah} \text{ und } \sqrt{2bh},$$

für $h=0$ wird dieselbe zu einem Punkte, für negative h imaginär. Demzufolge kann man sich die Fläche durch die Peripherie einer veränderlichen Ellipse erzeugt denken wenn letztere parallel zur xy-Ebene verschoben wird und ihre Scheitel auf zwei Parabeln fortrücken, deren eine in der xz-Ebene mit dem Halbparameter a und deren andere in der yz-Ebene mit dem Halbparameter b construirt ist, wobei für beide Parabeln die z-Achse als Achse und der Coordinatenanfang als Scheitel gilt. Die Linien $a=FA$ und $b=GB$ heissen die Halbparameter der Fläche, O ihr Scheitel und die Fläche selbst ein elliptisches Pa-

Fig. 39.



raboloid. Für $b = a$ wird dasselbe zu einem Rotationsparaboloid, für $a = \infty$ oder $b = \infty$ zu einem parabolischen Cylinder.

Eine beliebige Ebene, deren Gleichung

$$2) \qquad Ax + By + Cz = D$$

heissen möge, schneidet die Fläche in einer Curve, von welcher die Horizontalprojection durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2\,\frac{D - Ax - By}{C}$$

bestimmt ist; ertheilt man letzterer die bessere Form

$$\frac{1}{a}\left(x + \frac{Aa}{C}\right)^2 + \frac{1}{b}\left(y + \frac{Bb}{C}\right)^2 = \frac{A^2a + B^2b + 2CD}{C^2},$$

so erkennt man in der Curve eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{\sqrt{a\,(A^2a + B^2b + 2CD)}}{C}, \qquad \frac{\sqrt{b\,(A^2a + B^2b + 2CD)}}{C}.$$

Hierbei unterscheiden wir die zwei Hauptfälle, ob C von Null verschieden oder $= 0$ ist. Im ersten Falle sind die Halbachsen reell und endlich so lange der Ausdruck

$$3) \qquad \varDelta = A^2a + B^2b + 2CD$$

positiv bleibt, die Coordinaten des Mittelpunktes der Schnittprojection bestimmen sich durch die Formeln

$$x_0 = -\frac{Aa}{C}, \qquad y_0 = -\frac{Bb}{C};$$

für $\varDelta = 0$ verschwinden die Halbachsen der Ellipse, letztere zieht sich dann auf ihren Mittelpunkt zusammen; für negative $\varDelta$ wird die Curve imaginär. Im zweiten Hauptfalle $C = 0$, d. h. wenn die Schnittebene parallel zur z-Achse liegt, kann die Elimination von z nicht vorgenommen werden, weil dann die Gleichung der Schnittebene

$$4) \qquad Ax + By = D$$

zugleich auch die Gleichung der Schnittprojection ist; eliminirt man in diesem Falle y, so erhält man die Gleichung der Verticalprojection des Schnittes, nämlich

$$\frac{x^2}{a} + \frac{(D - Ax)^2}{B^2b} = 2z$$

oder bei besserer Anordnung und unter Rücksicht auf den Umstand, dass für $C = 0$ die Grösse $\varDelta$ in $A^2a + B^2b$ übergeht,

$$z - \frac{D^2}{2\varDelta} = \frac{\varDelta}{2B^2ab}\left(x - \frac{ADa}{\varDelta}\right)^2.$$

Diese Gleichung repräsentirt eine Parabel, deren Scheitel durch die Coordinaten

$$\frac{ADa}{\Delta} \text{ und } \frac{D^2}{2\Delta}$$

bestimmt wird, und deren Halbparameter

$$= \frac{B^2 ab}{\Delta}$$

ist. Wenden wir diese für die Projectionen des Schnittes gegebenen Entscheidungen auf den Schnitt selber an, so gelangen wir zu folgendem Gesammtresultate: Die zur Achse des Paraboloides nicht parallele Ebene 2) schneidet die Fläche in einer Ellipse, deren Mittelpunktscoordinaten

$$x_0 = -\frac{Aa}{C}, \quad y_0 = -\frac{Bb}{C}, \quad z_0 = \frac{\Delta - CD}{C^2}$$

sind; der Schnitt ist reell für $\Delta > 0$, reducirt sich für $\Delta = 0$ auf einen durch die Coordinaten

$$x_0 = -\frac{Aa}{C}, \quad y_0 = -\frac{Bb}{C}, \quad z_0 = -\frac{D}{C}$$

bestimmten Punkt, und wird für $\Delta < 0$ imaginär; eine zur Flächenachse parallele Ebene schneidet das Paraboloid jederzeit in einer Parabel. Hyperbolische und geradlinige Schnitte existiren nicht.

Wie bei allen elliptischen Schnitten entsteht auch hier die Frage, ob dieselben zu Kreisen werden können. Die Horizontalspur der schneidenden Ebene nehmen wir zur x'-Achse eines neuen in der Ebene enthaltenen rechtwinkligen Coordinatensystemes, $\angle (xx')$ sei $= \psi$, der Neigungswinkel der Ebene gegen die xy-Ebene heisse ϑ, der Durchschnitt der Ebene mit y-Achse liege in der Entfernung k vom ursprünglichen Coordinatenanfange und sei der Anfangspunkt des neuen Systemes; die Gleichung des Schnittes erhalten wir jetzt aus Nr. 1) durch Substitution der Werthe

$$\begin{aligned} x &= \phantom{k + {}} x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta, \\ y &= k + x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta, \\ z &= \phantom{k + x' \sin\psi + {}} y' \sin\vartheta. \end{aligned}$$

Das Resultat dieser Operation ist von der Form

$$A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,$$

und darin

$$A' = \frac{\cos^2\psi}{a} + \frac{\sin^2\psi}{b}, \qquad B' = \left(\frac{\sin^2\psi}{a} + \frac{\cos^2\psi}{b}\right)\cos^2\vartheta,$$

$$C' = \frac{(a-b)\sin\psi\cos\psi\cos\vartheta}{ab}.$$

Der Schnitt wird zu einem Kreise für $C' = 0$ und $A' = B'$; die erste Bedingung kann unter der nicht beschränkenden Annahme $a > b$ nur durch $\vartheta = 90^0$ oder $\psi = 90^0$ oder $\psi = 0^0$ erfüllt werden; die zweite Bedingung

$$\frac{\cos^2\psi}{a} + \frac{\sin^2\psi}{b} = \left(\frac{\sin^2\psi}{a} + \frac{\cos^2\psi}{b}\right)\cos^2\vartheta$$

liefert für $\vartheta = 90^0$ und für $\psi = 90^0$ unmögliche Ergebnisse, dagegen für $\psi = 0^0$

$$5) \qquad \cos\vartheta = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

was, wegen $b < a$ und wegen des doppelten Vorzeichens der Wurzel, zwei reelle Bestimmungen von ϑ giebt. Demnach existiren zwei Systeme von Kreisschnitten, deren Ebenen auf der yz-Ebene senkrecht stehen und mit der xy-Ebene die Winkel ϑ und $180^0 - \vartheta$ einschliessen. Die Gleichungen der Kreisschnittebenen (oder deren yz-Spuren) stehen unter der allgemeinen Form

$$z = (y-k)\tan\vartheta$$

der zufolge des Werthes von $\tan\vartheta$

$$\pm (y-k)\sqrt{\frac{a-b}{b}} - z = 0,$$

wofür wir schreiben

$$6) \qquad \sqrt{a-b}\,.\,y \mp \sqrt{b}\,.\,z = k\sqrt{a-b}.$$

Der Kreisschnitt, den diese Ebene mit dem Paraboloid bildet, ist reell wenn die Grösse

$$\varDelta = (a-b)\,b \mp 2\,k\sqrt{(a-b)\,b}$$

positiv ausfällt, also unter Benutzung des oberen Zeichens für

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-b)\,b} > k > -\infty$$

und in Beziehung auf das untere Zeichen für

$$+\infty > k > -\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-b)\,b}$$

die Kreisschnitte des einen Systemes werden folglich erhalten wenn man k von $\frac{1}{2}\sqrt{(a-b)b}$ bis $-\infty$ abnehmen lässt, die des anderen, wenn k von $-\frac{1}{2}\sqrt{(a-b)b}$ bis $+\infty$ wächst. Der Schnitt degenerirt zu einem Punkte, wenn $\varDelta = 0$ also bei dem ersten Sy-

steme $k = \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)b}$, beim zweiten $k = -\sqrt{(a-b)b}$ ist; die Coordinaten dieser Punkte sind im ersten Falle

$$0, \qquad +\sqrt{(a-b)b}, \qquad \tfrac{1}{2}(a-b),$$

und im zweiten

$$0, \qquad -\sqrt{(a-b)b}, \qquad \tfrac{1}{2}(a-b);$$

diess sind die zwei Kreispunkte der Fläche. Jenseit der angegebenen Grenzen, d. h. für negative Δ, existiren keine Kreisschnitte. Diese Ergebnisse können leicht graphisch veranschaulicht werden wenn man das Paraboloid auf zwei Ebenen projicirt, von denen die eine der xy-Ebene und die andere der yz-Ebene parallel liegt.

Wenn irgend ein elliptischer Schnitt sich auf seinen Mittelpunkt reducirt, so wird die schneidende Ebene zur Berührungsebene und jener Punkt zum Berührungspunkte; daraus entspringt wie früher die Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt xyz des Paraboloides eine Tangentialebene an das letztere zu legen. Die Gleichung der verlangten Ebene sei

$$A\xi + B\eta + C\zeta = D,$$

so müssen die im Vorigen bewiesenen Relationen

$$\Delta = A^2a + B^2b + 2CD = 0,$$

$$x = -\frac{Aa}{C}, \qquad y = -\frac{Bb}{C}, \qquad z = -\frac{D}{C}$$

statt finden; aus den letzten drei Gleichungen ergeben sich die Werthe von A, B, D, ausgedrückt durch C, deren Substitution in die erste Bedingung diese identisch macht, weil der Punkt xyz auf der Fläche liegt. Vermöge der Werthe von A, B, D ergiebt sich

$$-\frac{x}{a}\xi - \frac{y}{b}\eta + \zeta = -z$$

oder besser

$$7) \qquad \frac{x}{az}\xi + \frac{y}{bz}\eta - \frac{1}{z}\zeta = 1$$

als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz.

Hieraus zieht man noch die beiden Gleichungen

$$8) \qquad \xi - x = -\frac{x}{a}(\zeta - z), \qquad \eta - y = -\frac{y}{b}(\zeta - z),$$

welche für die im Punkte xyz errichtete Normale gelten.

§. 41.

Das hyperbolische Paraboloid.

Die letzte individuelle Fläche zweiten Grades, deren Untersuchung uns noch obliegt, wird durch die Gleichung

$$1)\qquad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$$

charakterisirt; daraus folgen als Gleichungen der Hauptschnitte

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 0, \qquad \frac{x^2}{2a} = z, \qquad -\frac{y^2}{2b} = z.$$

Giebt man der ersten die Form

$$y = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}\,x$$

und bezeichnet mit α den spitzen Winkel dessen Tangente $= \sqrt{\frac{b}{a}}$ ist, so erkennt man in der xy-Spur der Fläche ein System von zwei durch den Coordinatenanfang gehenden Geraden, deren eine mit der x-Achse den Winkel α und deren andere mit derselben Achse den Winkel $180^0 - \alpha$ einschliesst. Die xz-Spur der Fläche bildet eine Parabel mit dem Halbparameter a, der Coordinatenanfang ist ihr Scheitel und der positive Theil der z-Achse ihre Achse; die yz-Spur besteht gleichfalls aus einer Parabel, welche b zum Halbparameter, den Coordinatenanfang zum Scheitel und den negativen Theil der z-Achse zur Achse hat, weil der betreffenden Gleichung nur bei negativen z eine geometrische Bedeutung zukommt. Legt man ferner in der Höhe h eine zur xy-Ebene parallele Ebene, so schneidet letztere die Fläche in der durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2h$$

bestimmten Curve; der Schnitt ist jedenfalls eine Hyperbel, wobei aber die beiden Fälle eines positiven und negativen h zu unterscheiden sind. Für $h > 0$ giebt man der Gleichung die Form

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2ah}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2bh}}\right)^2 = 1,$$

die Halbachsen sind dann $\sqrt{2ah}$, $\sqrt{2bh}$ und für den Asymptotenwinkel β hat man

$$tan\ \beta = \frac{\sqrt{2bh}}{\sqrt{2ah}} = \sqrt{\frac{b}{a}} \text{ mithin } \beta = \alpha;$$

;weiten Falle $h = -h_1$ ist zu schreiben

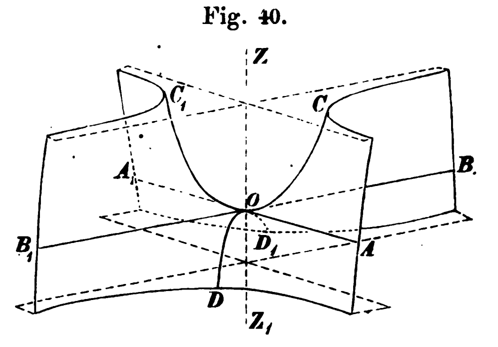
$$\left(\frac{y}{\sqrt{2bh_1}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{2ah_1}}\right)^2 = 1,$$

ird dann $\sqrt{2bh_1}$ zur Haupt-, $\sqrt{2ah_1}$ zur Nebenhalbachse und len Asymptotenwinkel β_1 hat man

$$tan\ \beta_1 = \frac{\sqrt{2ah_1}}{\sqrt{2bh_1}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ mithin } \beta_1 = 90^0 - \alpha.$$

ıgemäss kann man sich die Fläche durch eine veränderliche erbel erzeugt denken, wenn letztere parallel zur xy-Ebene choben wird und Scheitel auf zwei ın Parabeln fort-.en; der gemeinftliche Scheitel bei-Parabeln ist der rdinatenanfang, die liegt in der xz-ne und hat ihre se in der Richtung positiven z, die an-

Fig. 40.



ı befindet sich in der yz-Ebene und erstreckt ihre Achse in Richtung der negativen z; endlich ist noch zu bemerken, dass auf der positiven Seite der z construirten Hyperbeln denselben mptotenwinkel besitzen und dass ebenso alle auf der entgegen-tzten Seite befindlichen Hyperbeln einen gemeinschaftlichen mptotenwinkel haben, welcher den erstgenannten zu 90° er-;t. Die Figur zeigt die aus den Geraden AOA_1 und BOB_1 be-ende Horizontalspur der Fläche, die beiden parabolischen Ver-spuren COC_1, DOD_1 und zwei zur xy-Ebene parallele hyper-sche Schnitte, deren Asymptoten den Geraden AA_1 und BB_1 ıllel liegen; die Coordinatenachsen der x und der y sind (um r Ueberladung der Figur zu entgehen) weggelassen, man hat dieselben als die Halbirungslinien der Winkel AOB und AOB_1 lenken. Die hiermit bestimmte sattelförmige Fläche heisst **hyperbolisches Paraboloid**, a und b ihre **Halbpara-;er**, O ihr **Scheitel**, ZZ_1 ihre **Achse**.

Eine beliebige durch die Gleichung

2) $$Ax + By + Cz = D$$

dargestellte Ebene schneidet die Fläche in einer Curve, für deren Horizontalprojection sich die Gleichung findet

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2\,\frac{D - Ax - By}{C};$$

ertheilt man dieser die bessere Form

$$\frac{1}{a}\left(x + \frac{Aa}{C}\right)^2 - \frac{1}{b}\left(y - \frac{Bb}{C}\right)^2 = \frac{A^2 a - B^2 b + 2CD}{C^2},$$

so bemerkt man augenblicklich, dass die Schnittprojection im Allgemeinen eine Hyperbel darstellt; doch sind dabei die Fälle $C \gtrless 0$ und $C = 0$ zu unterscheiden. Wenn erstens C nicht verschwindet und der Ausdruck

3) $$\Delta = A^2 a - B^2 b + 2CD$$

irgend einen von Null verschiedenen Werth besitzt, so ist die Curve sicher eine Hyperbel, deren Mittelpunktscoordinaten

$$x_0 = -\frac{Aa}{C}, \qquad y_0 = +\frac{Bb}{C}$$

sind; ihre Haupthalbachse liegt bei positiven Δ in der Richtung der x, bei negativen in der Richtung der y. Verschwindet aber Δ, so degenerirt die Hyperbel in ein System von zwei sich schneidenden Geraden (die Asymptoten); die Coordinaten des Durchschnittes der letzteren sind dieselben x_0 und y_0 wie vorhin. Wenn zweitens C verschwindet, so kann z aus der Gleichung 1) und aus der Gleichung der Schnittebene

4) $$Ax + By = D$$

nicht eliminirt werden; durch Elimination von y erhält man in diesem Falle als Gleichung der Verticalprojection des Schnittes

$$\frac{x^2}{a} - \frac{(D - Ax)^2}{B^2 b} = 2z$$

oder bei besserer Anordnung und unter Rücksicht auf den Umstand, dass Δ für $C = 0$ in $A^2 a - B^2 b$ übergeht,

$$z - \frac{D^2}{2\Delta} = -\frac{\Delta}{2B^2 ab}\left(x - \frac{ADa}{\Delta}\right)^2.$$

Diese Gleichung repräsentirt eine Parabel so lange Δ nicht verschwindet; dagegen für $\Delta = 0$ ergiebt sich aus der vorhergehenden Form der Gleichung

$$z = \frac{ADa}{B^2 b}\,x - \frac{Da^2}{2B^2 b}$$

d. h. die Gleichung einer Geraden. Der Fall $\Delta = 0$ tritt ein für $A^2 a = B^2 b$ oder

$$\frac{A}{B} = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$

d. h. wenn die Ebene 4) parallel zu einer von den Geraden liegt, welche die Horizontalspur der Fläche bilden. Uebertragen wir nun diese für die Projectionen des Schnittes gegebenen Entscheidungen auf den Schnitt selber, so gelangen wir zu folgendem Gesammtresultate: Die zur Achse der Fläche nicht parallele Ebene 2) schneidet die Fläche in einer Hyperbel, deren Mittelpunktscoordinaten

$$x_0 = -\frac{Aa}{C}, \qquad y_0 = +\frac{Bb}{C}, \qquad z_0 = \frac{\Delta - CD}{C^2}$$

sind, für $\Delta = 0$ degenerirt dieselbe in ein System von zwei Geraden, die sich im Punkte

$$x_0 = -\frac{Aa}{C}, \qquad y_0 = +\frac{Bb}{C}, \qquad z_0 = -\frac{D}{C}$$

schneiden. Eine zur Flächenachse parallele (verticale) Ebene schneidet das Paraboloid in einer Parabel, welche zu einer Geraden wird, wenn die Schnittebene eine parallele Lage zu der einen oder anderen von den Geraden erhält, die zusammen die Horizontalspur der Fläche ausmachen. Elliptische Schnitte des hyperbolischen Paraboloides sind nicht vorhanden.

Die Eigenthümlichkeit, dass die Fläche in geraden Linien geschnitten werden kann, oder mit anderen Worten, dass sich auf der Fläche Gerade ziehen lassen, möge noch einer besonderen Erörterung unterworfen werden. Wenn eine durch die Gleichungen

$$5) \qquad x = Mz + u, \qquad y = Nz + v$$

charakterisirte Gerade ganz in der Fläche enthalten sein soll, so müssen alle den vorstehenden Gleichungen genügenden x, y, z auch die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0$$

befriedigen und demnach muss für alle z

$$\frac{(Mz+u)^2}{a} - \frac{(Nz+v)^2}{b} - z = 0$$

oder

$$\left(\frac{M^2}{a}-\frac{N^2}{b}\right)z^2+2\left(\frac{Mu}{a}-\frac{Nv}{b}-1\right)z+\frac{u^2}{a}-\frac{v^2}{b}=0$$

sein. Dies ist nur möglich unter den Bedingungen

$$\frac{u^2}{a}-\frac{v^2}{b}=0,$$

$$\frac{Mu}{a}-\frac{Nv}{b}-1=0, \qquad \frac{M^2}{a}-\frac{N^2}{b}=0;$$

durch die erste derselben wird ausgedrückt, dass die fragliche Linie eine von den beiden Geraden schneiden muss, welche die Horizontalspur der Fläche bilden, was vorauszusehen war. Substituiren wir die sich ergebenden Werthe

$$v=u\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ oder } v=-u\sqrt{\frac{b}{a}}$$

in die beiden übrigen Bedingungsgleichungen, so erhalten wir entweder

$$M=\frac{a}{2u}, \qquad N=-\frac{\sqrt{ab}}{2u},$$

oder

$$M=\frac{a}{2u}, \qquad N=+\frac{\sqrt{ab}}{2u}.$$

Wegen des willkührlich bleibenden u existiren demnach zwei verschiedene Systeme von Geraden auf der Fläche; die Gleichungen der Geraden des einen Systemes stehen unter der Form

$$6) \qquad x=\frac{a}{2u}z+u, \qquad y=-\frac{\sqrt{ab}}{2u}z+u\sqrt{\frac{b}{a}},$$

die des anderen Systemes dagegen unter der Form

$$7) \qquad x=\frac{a}{2u}z+u, \qquad y=+\frac{\sqrt{ab}}{2u}z-u\sqrt{\frac{b}{a}}$$

oder auch, wenn man zur besseren Unterscheidung u_1 für u setzt

$$8) \qquad x=\frac{a}{2u_1}z+u_1, \qquad y=+\frac{\sqrt{ab}}{2u_1}z-u_1\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Aus den Gleichungen 6) und 8) leitet man ohne Mühe den bemerkenswerthen Satz ab, dass jede Gerade des einen Systemes alle Geraden des anderen Systemes schneidet, und dass keine Gerade des einen Systemes einer Geraden des anderen Systemes parallel ist. Die Gleichungen 6) geben ferner durch Elimination von z

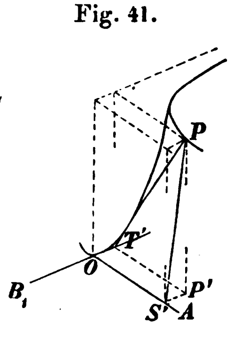
$$y = -\sqrt{\frac{b}{a}}(x - 2u)$$

und die Gleichungen 8)

$$y = +\sqrt{\frac{b}{a}}(x - 2u_1);$$

dies heisst geometrisch, die Horizontalprojectionen der Geraden des einen Systemes sind parallel zu der einen von den beiden Geraden, welche die Horizontalspur der Fläche bilden, in gleicher Weise liegen die Horizontalprojectionen der Geraden des anderen Systemes parallel zur anderen jener Geraden. Will man demnach durch irgend einen Punkt P der Fläche die zwei in P sich schneidenden Geraden der Fläche ziehen, so braucht man nur durch P zwei verticale Ebenen zu legen, deren Horizontalspuren parallel zu AB und $A_1 B_1$ sind; diese Ebenen schneiden das hyperbolische Paraboloid in den beiden verlangten Geraden (in der Figur PS' und PT').

Fig. 41.



Zu demselben Resultate gelangt man durch eine Transformation der Gleichung 1). Wählt man nämlich die Geraden OA, OB, OZ zu Coordinatenachsen eines neuen Systemes der x', y', z', so geschieht der Uebergang zu demselben mittelst der Formeln

$$x = (x' + y') \cos \alpha, \quad y = (x' - y') \sin \alpha, \quad z = z',$$

und die Gleichung 1) verwandelt sich hierbei in

$$\frac{(x' + y')^2 \cos^2 \alpha}{a} - \frac{(x' - y')^2 \sin^2 \alpha}{b} = z$$

Vermöge der Werthe von $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$, welche aus der Formel

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

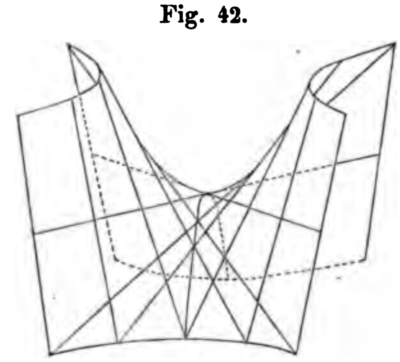
leicht herzuleiten sind, verschwinden die Coefficienten von x'^2 und y'^2, so dass nur übrig bleibt

$$\frac{2x'y'}{a + b} = z'$$

oder wenn das arithmetische Mittel zwischen den Halbparametern mit c bezeichnet wird,

$$x'y' = cz', \tag{9}$$

Fig. 42.



Giebt man entweder dem y' oder dem x' einen constanten Werth, so erhält man jedesmal die Gleichung einer Geraden, was geometrisch bedeutet, dass die Fläche von jeder Ebene geradlinig geschnitten wird, welche einer der Coordinatenebenen AOZ und BOZ parallel liegt. Die Figur zeigt eine Partie derartiger Schnitte.

Eine Ebene, welche zwei durch einen Punkt gehende Gerade der Fläche enthält, ist eine von den Ebenen, deren Gleichungen

$$Ax + By + Cz = D$$

der Bedingung

$$A^2 a - B^2 b + 2CD = 0$$

genügen, wobei die Coordinaten jenes Punktes durch

$$-\frac{Aa}{C}, \quad +\frac{Bb}{C}, \quad -\frac{D}{C}$$

ausgedrückt werden können. Legt man ferner eine Ebene in der Entfernung $-\frac{D}{C}$ parallel zur xy-Ebene, so schneidet sie die Fläche in einer durch die Gleichung

$$10) \quad \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{x^2}{a_1^2} = 1, \quad b_1 = \sqrt{\frac{2bD}{C}}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{2aD}{C}}$$

repräsentirten Hyperbel und die vorige Ebene in einer Geraden, deren Gleichung ist

$$Aa + By - D = D$$

oder

$$11) \quad B_1 y + A_1 x = 1, \quad B_1 = \frac{B}{2D}, \quad A_1 = \frac{A}{2D};$$

vermöge dieser Werthe ergiebt sich

$$B_1^2 b_1^2 - A_1^2 a_1^2 = 1,$$

und diese Relation lässt erkennen, dass die Gerade 11) den hyperbolischen Querschnitt 10) berührt. Auf ähnliche Weise kann man eine noch allgemeinere Eigenschaft der Ebene finden, welche zwei Gerade der Fläche enthält; legt man nämlich durch denselben Punkt wie vorhin einen beliebigen Schnitt s der Fläche, dessen Ebene von selbst die genannte Ebene in einer Geraden g schneidet,

so ist letztere jedesmal Tangente an s. Demgemäss muss die Ebene zweier in P zusammentreffender Geraden der Fläche als Inbegriff aller durch P gehenden Tangenten der Fläche d. h. als Berührungsebene in diesem Punkte gelten.

Daran knüpft sich die Bestimmung der Berührungsebene für einen gegebenen Punkt xyz der Fläche. Bezeichnen wir die Gleichung der verlangten Ebene mit

$$A\xi + B\eta + C\zeta = D,$$

so müssen dem Vorigen zufolge die Bedingungen

$$A^2 a - B^2 b + 2\,CD = 0,$$

$$x = -\frac{Aa}{C}, \qquad y = +\frac{Bb}{C}, \qquad z = -\frac{D}{C}$$

erfüllt sein. Die letzten drei Gleichungen geben A, B, D durch C ausgedrückt und diese Werthe genügen der ersten Bedingung vermöge des Umstandes, dass der Punkt xyz auf der Fläche liegt. Demnach erhalten wir als Gleichung der Tangentialebene

$$-\frac{x}{a}\xi + \frac{y}{b}\eta + \zeta = -z$$

oder

$$\frac{x}{az}\xi - \frac{y}{bz}\eta - \frac{1}{z}\zeta = 1.$$

Daraus folgen noch die beiden Gleichungen

$$13) \quad \xi - x = -\frac{x}{a}(\zeta - z), \qquad \eta - y = +\frac{y}{b}(\zeta - z),$$

welche für die im Punkte xyz errichtete Normale gelten.

§. 42.

Unterscheidungszeichen für die Flächen zweiten Grades.

Nachdem wir die Gestalten der verschiedenen Flächen zweiten Grades näher kennen gelernt haben, kehren wir zu der allgemeinen Gleichung

$$1) \quad \begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\ \qquad + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0 \end{cases}$$

zurück um die Mittel zu erörtern, mittelst deren man rasch entscheiden kann, welche individuelle Fläche zweiten Grades in jedem speciellen Falle (d. h. bei gegebenen Werthen von $A, B, \ldots K$) durch die vorige Gleichung charakterisirt wird. Diese Mittel sind zwar in den §§. 34, 35 und 36 vollständig enthalten und man würde in der That durch Ausführung aller dort angedeuteten Rechnungen

auf eine der fünf in Nr. 33) und 34) aufgestellten Normalformen kommen, wodurch sich die Lage und Grösse der Achsen oder Parameter und die Natur der Fläche unmittelbar ergeben, dagegen ist aber nicht zu leugnen, dass dieser Calcul fast immer, und namentlich wenn die Gleichung 1) auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem bezogen ist, nicht geringe Weitläufigkeiten verursacht. Um diesen zu entgehen vereinfachen wir die Untersuchung dadurch, dass wir auf die Angabe der Lage und Grösse der Achsen oder Parameter verzichten und nur eine kurze Entscheidung über die Natur der Fläche verlangen. Zufolge der bereits bekannten Eigenschaften der einzelnen Flächen zweiten Grades lässt sich eine solche Discussion auf folgende schematische Zusammenstellung gründen; eine Fläche zweiten Grades kann sein:

I. Eine centrale Fläche;

1) eine geschlossene Fläche:
   das Ellipsoid,
2) eine nicht geschlossene Fläche und zwar
   a) eine geradlinige Fläche:
      das einfache Hyperboloid,
      der elliptische Kegel,
      der elliptische Cylinder,
      der hyperbolische Cylinder,
   b) eine nicht geradlinige Fläche:
      das getheilte Hyperboloid;

II. Eine nichtcentrale Fläche;

a) eine geradlinige Fläche:
   das hyperbolische Paraboloid,
   der parabolische Cylinder,
b) eine nichtgeradlinige Fläche:
   das elliptische Paraboloid.

Demgemäss hat man erstens zu untersuchen, ob sich ein Punkt finden lässt, welcher die durch ihn gehenden Sehnen der Fläche halbirt; die Existenz oder Nichtexistenz desselben entscheidet, ob die Fläche zur Classe I. oder zur Classe II. gehört. Findet das Erste statt, so kann immer leicht ermittelt werden, ob ohne Ausnahme jede durch den Mittelpunkt gelegte Gerade die Fläche zweimal in endlichen Entfernungen schneidet oder nicht; im ersten Falle ist die Fläche ein Ellipsoid, im zweiten Falle gehört sie zur Unterabtheilung 2. Um hier weiter zu trennen untersucht

man, wie in §. 38, ob es gerade Linien giebt, von denen jeder Punkt auf der Fläche liegt; das Vorhandensein derartiger Geraden zeigt, dass die Fläche zur Abtheilung a gehört; sind die Geraden parallel, so ist die Fläche ein Cylinder, über dessen Natur irgend ein Querschnitt Auskunft giebt, vereinigen sich die Geraden in einem Punkte, so ist die Fläche ein elliptischer Kegel, findet keine dieser Lagen statt, so ist die Fläche ein einfaches Hyperboloid; das Nichtvorhandensein jener Geraden beweist, dass die Fläche ein getheiltes Hyperboloid ist. Wenn ferner die Fläche keinen Mittelpunkt besitzt, so bedarf es nur der Untersuchung, ob gerade Linien auf ihr gezogen werden können oder nicht; im ersten Falle sind dieselben entweder parallel, und dann ist die Fläche ein parabolischer Cylinder, oder nicht parallel, mithin die Fläche ein hyperbolisches Paraboloid; wenn dagegen keine Geraden auf der Fläche liegen, so ist letztere ein elliptisches Paraboloid.

Wie man diese Untersuchung auszuführen hat, wollen wir erst im Allgemeinen und dann an einigen speciellen Gleichungen zeigen. — Verschieben wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach einem Punkte, dessen primitive Coordinaten u, v, w sind, so haben wir in der Gleichung 1)

$$x = x' + u, \qquad y = y' + v, \qquad z = z' + w$$

zu setzen und erhalten dann

$$2)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Dx'y' + 2Ex'z' + 2Fy'z' \\ \quad + 2(Au + Dv + Ew + G)\,x' \\ \quad + 2(Du + Bv + Fw + H)\,y' \\ \quad + 2(Eu + Fv + Cw + I)\,z' \\ + Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Duv + 2Euw + 2Fvw \\ \quad + 2Gu + 2Hv + 2Iw + K = 0. \end{array}\right.$$

Die vor der Hand noch beliebigen Grössen u, v, w bestimmen wir so, dass sie den drei Bedingungen

$$3)\quad \left\{\begin{array}{l} Au + Dv + Ew + G = 0, \\ Du + Bv + Fw + H = 0, \\ Eu + Fv + Cw + I = 0, \end{array}\right.$$

genügen; aus der Gleichung 2) fallen dann die Glieder heraus, welche x', y', z' in der ersten Dimension enthalten und es bleibt

$$4)\quad Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Dx'y' + 2Ex'z' + 2Fy'z' + \Sigma = 0$$

übrig, wobei zur Abkürzung

$$5)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Duv + 2Euw + 2Fvw \\ \qquad + 2Gu + 2Hv + 2Iw + K \end{array}\right.$$

gesetzt worden ist. Diese Transformation würde jedoch in dem Falle unausführbar sein, wo die Gleichungen 3) keine endlichen Werthe von u, v, w liefern, und um hierüber entscheiden zu können, entwickeln wir u, v, w auf gewöhnlichem algebraischen Wege; dies giebt:

$$u = -\frac{G(F^2 - BC) + H(CD - EF) + I(BE - DF)}{AF^2 + BE^2 + CD^2 - ABC - 2DEF},$$

$$v = -\frac{G(CD - EF) + H(E^2 - AC) + I(AF - DE)}{AF^2 + BE^2 + CD^2 - ABC - 2DEF},$$

$$w = -\frac{G(BE - DF) + H(AF - DE) + I(D^2 - AB)}{AF^2 + BE^2 + CD^2 - ABC - 2DEF}.$$

Ist nun der gemeinschaftliche Nenner dieser Brüche, welchen wir durch

$$6) \qquad \Delta = AF^2 + BE^2 + CD^2 - ABC - 2DEF$$

bezeichnen wollen, von Null verschieden, so erhalten u, v, w endliche bestimmte Werthe, dagegen würde für $\Delta = 0$ jeder der obigen Brüche entweder $= \infty$ oder, falls die Zähler verschwänden, $= \frac{0}{0}$, d. h. unbestimmt werden, unter welchen Umständen die beabsichtigte Transformation unterbleiben muss. Diese Unterscheidungen haben übrigens einen geometrischen Sinn. Betrachtet man nämlich den Punkt uvw als einen vor der Hand noch unbestimmten, so charakterisirt jede der Gleichungen 3), einzeln genommen, eine Ebene, und alle drei Gleichungen zusammen bestimmen den Durchschnitt jener drei einzelnen Ebenen. Dieser Punkt existirt nicht, wenn sich jene Ebenen in parallelen Geraden schneiden, er wird unbestimmt, sobald zwei oder drei Ebenen zusammenfallen. Wir untersuchen jetzt die möglichen Fälle einzeln.

I. Erster Hauptfall: $\Delta \gtrless 0$. Geben wir dem Ausdrucke Σ die Form

$$\begin{aligned} \Sigma = {} & (Au + Dv + Ew + G)\,u \\ & + (Du + Bv + Fw + H)\,v \\ & + (Eu + Fv + Cw + I)\,w \\ & + Gu + Hv + Iw + K, \end{aligned}$$

so wird derselbe vermöge der Gleichungen 3) einfacher, nämlich

$$\Sigma = Gu + Hv + Iw + K$$

und hier können die oben angegebenen Werthe von u, v, w leicht substituirt werden. Zur Abkürzung sei

$$7)\begin{cases} \Gamma = G^2(F^2 - BC) + H^2(E^2 - AC) + I^2(D^2 - AB) \\ \quad + 2GH(CD - EF) + 2GI(BE - DF) + 2HI(AF - DE) - K\Delta, \end{cases}$$

es ergiebt sich dann

$$\Sigma = -\frac{\Gamma}{\Delta}$$

mithin als Gleichung der Fläche, bezogen auf das neue Coordinatensystem,

$$8) \quad Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Dx'y' + 2Ex'z' + 2Fy'z' = \frac{\Gamma}{\Delta}.$$

Legen wir durch den neuen Anfangspunkt eine Gerade, deren Gleichungen

$$9) \qquad x' = \alpha z', \qquad y' = \beta z'$$

sein mögen, so finden wir die Coordinaten ihres Durchschnittes mit der Fläche durch Verbindung der Gleichungen 8) und 9); dabei sei zur Abkürzung

$$10) \qquad \Omega = A\alpha^2 + B\beta^2 + C + 2D\alpha\beta + 2E\alpha + 2F\beta,$$

für die Coordinaten des Durchschnittes haben wir dann

$$11) \quad x' = \pm\alpha\sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta\Omega}}, \quad y' = \pm\beta\sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta\Omega}}, \quad z' = \pm\sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta\Omega}}.$$

Aus den doppelten Vorzeichen von x', y', z' erkennt man, dass die Gerade und die Fläche sich im Allgemeinen in zwei Punkten schneiden, deren Entfernungen vom neuen Coordinatenanfange gleich gross und entgegengesetzten Vorzeichens sind; der neue Coordinatenanfang, d. h. der primitive Punkt uvw ist folglich der Mittelpunkt der Fläche, und der Hauptfall $\Delta \gtrless 0$ umfasst demnach alle centralen Flächen.

Denkt man sich in den Gleichungen 9) und 10) die Coefficienten α und β als veränderlich, so erhält die durch den Mittelpunkt gehende Gerade alle möglichen verschiedenen Lagen und es muss nun entschieden werden, ob sie die Fläche unter allen Umständen schneidet oder nicht. Die fraglichen Durchschnitte sind aber solange reell, als $\frac{\Gamma}{\Delta\Omega}$ nicht negativ wird und da hier Ω eine veränderliche Grösse bedeutet, so bedarf es zunächst einer Untersuchung über das Vorzeichen von Ω. Hierbei sind nur zwei Fälle möglich: entweder behält Ω für alle α und β das nämliche Zeichen oder es wechselt dasselbe in der Weise, dass Ω für gewisse α und

β positiv, für andere α und β negativ ist. Nach einem bekannten Satze*) findet das Erste statt, wenn gleichzeitig

$$D^2 - AB \text{ negativ}$$

und

$$(D^2 - AB)(E^2 - AC) - (DE - AF)^2 \text{ positiv}$$

ausfällt; der letztere Ausdruck ist einerlei mit $-A\Delta$, setzen wir also A ein für alle Mal als positiv voraus, wodurch die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beschränkt wird, so behält Ω sein Vorzeichen, wenn die Bedingungen

$$D^2 - AB < 0 \text{ und } \Delta < 0$$

gleichzeitig erfüllt sind. Das Vorzeichen von Ω ist dann einerlei mit dem Vorzeichen von

$$\alpha^2\left(A + B\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{C}{\alpha^2} + 2D\frac{\beta}{\alpha} + 2\frac{E}{\alpha} + 2F\frac{\beta}{\alpha^2}\right)$$

und da man hier, ohne das Zeichen zu ändern, $\beta = 0$ und $\alpha = \infty$ setzen darf, so hat Ω das nämliche Vorzeichen, wie $\alpha^2 A$, ist also positiv. Wir betrachten nun die Fälle einzeln, ob Ω sein (positives) Zeichen behält oder wechselt.

1. Sind die Bedingungen

$$D^2 - AB < 0, \qquad \Delta < 0$$

gleichzeitig erfüllt, mithin Ω positiv, so setze man $\Delta = -\delta$, wo δ den absoluten Werth von Δ bezeichnet; es ist dann

$$x' = \pm\alpha\sqrt{\frac{\Gamma}{-\delta\Omega}}, \quad y' = \pm\beta\sqrt{\frac{\Gamma}{-\delta\Omega}}, \quad z' = \pm\sqrt{\frac{\Gamma}{-\delta\Omega}},$$

und hieraus ergiebt sich sofort, dass bei positiven Γ kein reeller Durchschnitt existirt, wie man auch α und β wählen möge, dass

---

*) Die Richtigkeit der obigen Angabe ersieht man aus folgender Betrachtung. Sind ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes, so charakterisirt die Gleichung

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C + 2D\xi\eta + 2E\xi + 2F\eta = \zeta$$

eine Fläche zweiten Grades, welche keinen Mittelpunkt besitzt, weil ζ nur in der ersten Potenz vorkommt. Diese Fläche kann entweder ganz auf der einen Seite der $\xi\eta$-Ebene liegen oder die $\xi\eta$-Ebene schneiden; im ersten Falle behält ζ für alle ξ und η das nämliche Vorzeichen, im zweiten Falle giebt es sowohl positive als negative ζ. Soll nun das Erste statt finden, so muss der Durchschnitt der Fläche mit $\xi\eta$-Ebene imaginär, mithin die Gleichung

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C + 2D\xi\eta + 2E\xi + 2F\eta = 0$$

so beschaffen sein, dass sie durch reelle ξ und η unerfüllbar ist. Man erhält durch Auflösung der Gleichung

ferner für $\Gamma = 0$ beide Durchschnitte in den neuen Coordinatenanfang zusammenfallen; dass endlich für negative Γ jederzeit zwei in endlichen Entfernungen befindliche Durchschnitte vorhanden sind. Die Gleichung 8) oder 1) bedeutet demnach

für $\Gamma > 0$ kein geometrisches Gebild,
„ $\Gamma = 0$ einen einzelnen Punkt (uvw),
„ $\Gamma < 0$ ein Ellipsoid.

2. Wenn die Bedingungen

$$D^2 - AB < 0, \qquad \varDelta < 0$$

nicht gleichzeitig erfüllt sind, so wechselt Ω sein Vorzeichen, indem es durch Null hindurchgeht. Es giebt dann eine Reihenfolge von α und β, für welche $\frac{\Gamma}{\varDelta\Omega}$ positiv ausfällt, ferner gewisse Paare von α und β für welche $\frac{\Gamma}{\varDelta\Omega} = \frac{1}{0} = \infty$ wird, und dann unendlich viel Werthe von α und β, welche $\frac{\Gamma}{\varDelta\Omega}$ negativ machen. Die Fläche erstreckt sich daher jedenfalls ins Unendliche und gehört folglich unter die Hyperboloide.

Um zu entscheiden, ob die Fläche ein einfaches oder ein getheiltes Hyperboloid ist, versuchen wir eine durch die Gleichungen

$$x' = Mz' + p, \qquad y' = Nz' + q$$

dargestellte Gerade so zu legen, dass jeder ihrer Pnnkte mit einem Punkte der Fläche zusammenfällt. Die Substitution der Werthe von x' und y' in die Gleichung 8) giebt

---

$$\xi = \frac{D\eta + E}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{(D\eta + E)^2 - A(C + 2F\eta + B\eta^2)};$$

der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck kann in der Form

$$(D^2 - AB)\left\{\left(\eta + \frac{DE - AF}{D^2 - AB}\right)^2 + \frac{(D^2 - AB)(E^2 - AC) - (DE - AF)^2}{(D^2 - AB)^2}\right\}$$

dargestellt werden und ist für alle η negativ, wenn der Factor $D^2 - AB$ negativ und der Parentheseninhalt positiv ausfällt, was Letzteres unter der Bedingung

$$(D^2 - AB)(E^2 - AC) - (DE - AF)^2 > 0$$

der Fall ist. Finden beide Umstände statt, so gehört zu jedem reellen η ein imaginäres ξ, die Fläche schneidet die $\xi\eta$-Ebene nicht und ζ behält stets dasselbe Vorzeichen. Diese Ergebnisse stimmen mit dem oben Erwähnten überein, wenn man ξ, η, ζ durch α, β, Ω ersetzt.

$$(AM^2 + BN^2 + C + 2DMN + 2EM + 2FN)z'^2$$
$$+ 2\left\{(AM + DN + E)p + (BN + DM + F)q\right\}z'$$
$$+ Ap^2 + Bq^2 + 2Dpq = \frac{\Gamma}{\Delta}$$

und wenn diese Gleichung für alle z' bestehen soll, so gehören dazu die drei Bedingungen

$$12) \quad \begin{cases} AM^2 + BN^2 + C + 2DMN + 2EM + 2FN = 0, \\ (AM + DN + E)p + (BN + DM + F)q = 0, \\ Ap^2 + Bq^2 + 2Dpq = \frac{\Gamma}{\Delta}. \end{cases}$$

Der zweiten Gleichung entnehmen wir den Werth von q und substituiren ihn in die dritte, wobei zur Abkürzung

$$13) \quad AM + DN + E = P, \qquad BN + DM + F = Q$$

sein möge; es ergiebt sich auf diese Weise

$$(AQ^2 + BP^2 - 2DPQ)p^2 = \frac{\Gamma}{\Delta}Q^2,$$

und auf ähnliche Weise, wenn man den Werth von p aus der zweiten in die dritte Gleichung einsetzt,

$$(AQ^2 + BP^2 - 2DPQ)q^2 = \frac{\Gamma}{\Delta}P^2.$$

Vermöge der Bedeutung von P und Q findet man leicht durch gewöhnliche Ausrechnung

$$AQ^2 + BP^2 - 2DPQ$$
$$= (A^2B - AD^2)M^2 + (AB^2 - BD^2)N^2 + 2(ABD - D^3)MN$$
$$+ 2(ABE - D^2E)M + 2(ABF - D^2F)N$$
$$+ AF^2 + BE^2 - 2DEF$$

d. i., wenn man die positiven und negativen Glieder in der ersten und zweiten Reihe zusammenfasst,

$$= (AB - D^2)(AM^2 + BN^2 + 2DMN + 2EM + 2FN)$$
$$+ AF^2 + BE^2 - 2DEF;$$

nach der ersten Gleichung in Nr. 12) und nach Nr. 6) hat man weiter

$$AQ^2 + BP^2 - 2DPQ$$
$$= (AB - D^2)(-C) + \Delta + ABC - CD^2 = \Delta.$$

Hierdurch vereinfachen sich die früheren Gleichungen und werden

$$14) \quad \Delta^2p^2 = \Gamma Q^2, \qquad \Delta^2q^2 = \Gamma P^2.$$

Denkt man sich p und q so gewählt, dass sie der dritten Gleichung in Nr. 12) genügen d. h. geometrisch, nimmt man irgend einen Punkt der Horizontalspur der Fläche als Horizontalspur der ver-

langten Geraden, so dienen die Gleichungen 14) zur Bestimmung von P und Q, woraus nachher M und N mittelst der Gleichungen 13) folgen. Die Werthe von P und Q, sowie die nachherigen von M und N sind nun reell und zweideutig bei positiven Γ, es können daher in diesem Falle durch jeden Punkt der Horizontalspur unserer Fläche zwei Gerade auf letzterer gezogen werden; für $\Gamma = 0$ folgt aus Nr. 14) $p = 0$ und $q = 0$ während M und N an die erste Bedingungsgleichung in Nr. 12) gebunden bleiben, in diesem Falle sind auf der Fläche wiederum unendlich viel gerade Linien möglich, welche aber sämmtlich durch den Coordinatenanfang gehen; für negative Γ werden P und Q mithin auch M und N imaginär. Diesen Erörterungen zufolge bedeutet die Gleichung 8) oder 1)

für $\Gamma > 0$ ein einfaches Hyperboloid,
für $\Gamma = 0$ einen elliptischen Kegel,
für $\Gamma < 0$ ein getheiltes Hyperboloid.

II. Zweiter Hauptfall: $\Delta = 0$. Wir müssen hier gleich unterscheiden, ob die drei Zähler der Werthe von u, v, w, nämlich die Grössen

$$15)\quad \begin{cases} \Delta_1 = G(F^2 - BC) + H(CD - EF) + I(BE - DF), \\ \Delta_2 = G(CD - EF) + H(E^2 - AC) + I(AF - DE), \\ \Delta_3 = G(BE - DF) + H(AF - DE) + I(D^2 - AB), \end{cases}$$

von Null verschieden sind, oder ob eine oder mehrere derselben verschwinden.

1. Wenn keiner der Ausdrücke Δ_1, Δ_2, Δ_3 verschwindet, so werden die Coordinaten des Mittelpunktes unendlich und es kann daher die vorige Transformation nicht ausgeführt werden. In diesem Falle vereinfachen wir die Gleichung 2) dadurch, dass wir die Coefficienten von x', y', und den von x', y', z' freien Ausdruck wegschaffen, indem wir

$$16)\quad \begin{cases} Au + Dv + Ew + G = 0, \\ Du + Bv + Fw + H = 0, \\ Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Duv + 2Euw + 2Fvw \\ \quad + 2Gu + 2Hv + 2Iw + K = 0 \end{cases}$$

setzen und hieraus u, v, w bestimmnn. Dies geschieht auf folgende Weise. Wir geben der letzten Gleichung die Form:

$$(Au + Dv + Ew + G)u + (Du + Bv + Fw + H)v$$
$$+ Cw^2 + Euw + Fuw + Gu + Hv + 2Iw + K = 0,$$

welche, den beiden ersten Gleichungen zufolge, auf

$$Cw^2 + Euw + Fuw + Gu + Hv + 2Iw + K = 0$$

zurückkommt, und setzen darin die aus den beiden ersten Bedingungsgleichungen fliessenden Werthe

$$17)\quad u=\frac{(BE-DF)w+BG-DH}{D^2-AB},\quad v=\frac{(AF-DE)w+AH-DG}{D^2-AB};$$

nach gehöriger Reduction findet sich

$$\begin{gathered}[C(D^2-AB)+E(BE-DF)+F(AF-DE)]w^2\\ +2[G(BE-DF)+H(AF-DE)+I(D^2-AB)]w\\ +AH^2+BG^2-2DGH+K(D^2-AB).\end{gathered}$$

Der Coefficient von w^2 ist aber einerlei mit Δ und ebendesswegen $=0$; die vorige Gleichung liefert daher im Allgemeinen einen endlichen bestimmten Werth für w, den wir mit

$$18)\qquad w=-\frac{\varkappa}{2\Delta_3}$$

bezeichnen wollen, aus ihm ergeben sich nach Nr. 17) bestimmte Werthe von u und v wenn D^2-AB von Null verschieden ist, was wir für jetzt voraussetzen. Die Gleichung 2) erhält nun die Form

$$19)\quad Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Dx'y'+2Ex'z'+2Fy'z'+2Lz'=0,$$

worin zur Abkürzung

$$Eu+Fv+Cw+I=L$$

gesetzt worden ist, und es bedarf der Untersuchung, ob dieselbe ein elliptisches oder ein hyperbolisches Paraboloid bedeutet. Zu diesem Zwecke versuchen wir eine durch die Gleichungen

$$x'=Mz'+p,\qquad y'=Nz'+q$$

charakterisirte Gerade so zu legen, dass jeder ihrer Punkte zugleich ein Punkt der Fläche ist. Nach Substitution der Werthe von x' und y' wird aus der Gleichung 19) die folgende:

$$\begin{gathered}(AM^2+BN^2+C+2DMN+2EM+2FN)z'^2\\ +2[(AM+DN+E)p+(BN+DM+F)q+L]z'\\ +Ap^2+Bq^2+2Dpq=0,\end{gathered}$$

und diese kann für alle möglichen z' nur bestehen wenn die Bedingungen

$$20)\quad \left\{\begin{array}{c} AM^2+BN^2+C+2DMN+2EM+2FN=0,\\ (AM+DN+E)p+(BN+DM+F)q+L=0,\\ Ap^2+Bq^2+2Dpq=0 \end{array}\right.$$

gleichzeitig erfüllt sind. Die letzte Gleichung giebt:

$$p=\frac{-D\pm\sqrt{D^2-AB}}{A}\,q$$

und lässt augenblicklich erkennen, dass nur bei positiven D^2-AB

eine unendliche Menge reeller p und q möglich ist. Wäre dagegen $D^2 - AB$ negativ, so würde der vorstehenden Gleichung nur das eine reelle Werthepaar $p = 0$ und $q = 0$ genügen, vermöge dessen die zweite Gleichung in Nr. 20) zu

$$L = 0$$

wird; dieses Ergebniss widerspricht aber der Voraussetzung $\Delta = 0$ insofern, als die Gleichung 19) für $L = 0$ offenbar eine centrale Fläche (einen elliptischen Kegel) bedeuten würde. Demnach ist die dritte Gleichung in Nr. 20) bei negativen $D^2 - AB$ unmöglich, also die Fläche nicht geradlinig. Aus diesen Erörterungen folgt, dass die Gleichung 19) oder 1)

für $D^2 - AB < 0$ ein elliptisches Paraboloid,

für $D^2 - AB > 0$ ein hyperbolisches Paraboloid

charakterisirt. Dasselbe Resultat ergiebt sich noch etwas kürzer vermöge der Bemerkung, dass ein elliptisches Paraboloid nicht in einer Hyperbel und ein hyperbolisches nicht in einer Ellipse geschnitten werden kann, dass also bei einer nicht centralen Fläche ein einziger elliptischer Schnitt für das elliptische Paraboloid und ein einziger hyperbolischer Schnitt für das hyperbolische Paraboloid entscheidet. Für einen der $x'y'$-Ebene parallelen Schnitt hat man aber $z' = h$ und folglich die Gleichung

$$Ax'^2 + By'^2 + 2Dx'y' + 2Ehx' + 2Fhy' + Ch^2 + 2Lh = 0;$$

hält man sie mit der allgemeinen Kegelschnittgleichung

$$A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

zusammen, so ist

$$C'^2 - A'B' = D^2 - AB,$$

$$A'E'^2 + B'D'^2 + (C'^2 - A'B')F' - 2C'D'E'$$
$$= (AF^2 + BE^2 + CD^2 - ABC - 2DEF)h^2 + (D^2 - AB)Lh$$
$$= \Delta h^2 + (D^2 - AB)Lh = (D^2 - AB)Lh;$$

der letzte Ausdruck kann wegen des beliebigen h nach Willkühr positiv oder negativ gemacht werden, es sind daher für $C'^2 - A'B' = D^2 - AB < 0$ unendlich viel elliptische und für $C'^2 - A'B' = D^2 - AB > 0$ unendlich viel hyperbolische Schnitte möglich, was die nämliche Entscheidung wie oben giebt. Man ersieht gleichzeitig aus dieser Bemerkung wie der Fall $D^2 - AB = 0$ zu behandeln ist. Die vorige Transformation würde dann wegen der unendlich werdenden u und v (Nr. 17) nicht ausführbar sein, aber es bedarf derselben überhaupt nicht, wenn man gleich die Schnitte der Fläche mit verschiedenen zu den Coor-

dinatenebenen parallelen Ebenen betrachtet. Für $D^2 - AB = 0$ giebt zwar der Schnitt parallel zur xy-Ebene keine Entscheidung (weil parabolische Schnitte in beiden Paraboloiden verkommen) dagegen sind die Schnitte parallel zur xz-Ebene Ellipsen für $E^2 - AC \lessgtr 0$ und Hyperbeln für $E^2 - AC > 0$; die Gleichung bedeutet daher

für $E^2 - AC < 0$ ein elliptisches Paraboloid,
für $E^2 - AC > 0$ ein hyperbolisches Paraboloid.

Auch dieses Kennzeichen würde seine Anwendbarkeit verlieren, wenn $E^2 - AC = 0$ mithin gleichzeitig $D^2 = AB$ und $E^2 = AC$ wäre; man hat in diesem Falle

$$\begin{aligned} \varDelta &= AF^2 + BAC - 2\sqrt{AB}\,.\sqrt{AC}\,.F \\ &= A(F^2 + BC - 2F\sqrt{BC}) = A(F - \sqrt{BC})^2 \end{aligned}$$

und weil $\varDelta = 0$, A aber > 0 vorausgesetzt ist,

$$F - \sqrt{BC} = 0 \text{ woraus } F^2 - BC = 0.$$

Schneidet man jetzt die Fläche durch eine der yz-Ebene parallele Ebene, so erhält man wegen der vorstehenden Gleichung einen parabolischen Schnitt und es sind folglich alle den Coordinatenebenen parallelen Schnitte Parabeln. Diess entscheidet bereits die Natur der Fläche; in beiden Paraboloiden sind nämlich nur die zur Achse parallelen Schnitte Parabeln, alle drei Coordinatenebenen können aber nicht gleichzeitig der Achse parallel sein, es ist folglich die Fläche kein Paraboloid, sondern ein parabolischer Cylinder, der in speciellen Fällen zu einer Ebene degeneriren kann. Das Resultat dieser Untersuchung lässt sich demnach so aussprechen: wenn die Differenzen

$$D^2 - AB, \qquad E^2 - AC, \qquad F^2 - BC$$

nicht gleichzeitig Null sind, so bedeutet die Gleichung 1) ein elliptisches oder ein hyperbolisches Paraboloid jenachdem die nicht verschwindenden Differenzen das negative oder positive Vorzeichen besitzen; sind aber jene Differenzen gleichzeitig Null, so ist die entsprechende Fläche im Allgemeinen ein parabolischer Cylinder.

2. Wenn zweitens eine oder mehrere der Grössen A_1, A_2, A_3 verschwinden, so erhalten die Mittelpunktscoordinaten, welche früher aus den Gleichungen

$$21)\quad \begin{cases} Au + Dv + Ew + G = 0 \\ Du + Bv + Fw + H = 0 \\ Eu + Fv + Cw + I = 0 \end{cases}$$

entwickelt wurden, keine völlig bestimmten Werthe und es ist diess ein Zeichen, dass die vorstehenden Gleichungen nicht sämmtlich von einander verschieden sind; die Fläche besitzt dann unendlich viele Mittelpunkte. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden. Die obigen drei Gleichungen können entweder auf zwei Gleichungen zurückkommen (wenn nämlich eine Gleichung eine Folge der beiden übrigen ist); sie repräsentiren dann zwei Ebenen und jeder Punkt auf der Durchschnittslinie der letzteren kann als Mittelpunkt betrachtet werden. Die Fläche ist in diesem Falle entweder ein elliptischer oder ein hyperbolischer Cylinder oder ein System von zwei sich schneidenden Ebenen. Hierüber geben die Schnitte der Fläche leicht Auskunft; ein einziger elliptischer Schnitt entscheidet für den elliptischen Cylinder, ein einziger hyperbolischer Schnitt für den hyperbolischen Cylinder; ist weder der eine noch der andere Schnitt möglich, so besteht die Fläche aus zwei sich schneidenden Ebenen. Ausserdem ist noch der zweite Fall möglich, dass die drei Gleichungen 21) auf eine Gleichung zurückkommen; sie repräsentiren dann eine Ebene, von welcher jeder Punkt als Mittelpunkt gelten kann. Die Fläche besteht in diesem Falle entweder aus zwei parallelen Ebenen, welche von der Ebene der Mittelpunkte gleich weit entfernt sind, oder aus einer einzigen Ebene (der Mittelpunktsebene selber); der letztere Umstand tritt ein, wenn die linke Seite das vollständige Quadrat eines Ausdruckes von der Form $A'x + B'y + C'z + D'$ ist.

Beispiele zu derartigen Untersuchungen enthält der nächste Paragraph.

§. 43.

Geometrische Oerter.

Nicht selten erzeugt man eine Fläche dadurch, dass man einen Punkt oder eine Gerade sich nach einem bestimmten Gesetze bewegen lässt; die Fläche ist dann der geometrische Ort des veränderlichen Punktes oder der Geraden. Einige bemerkenswerthe derartige Entstehungsweisen von Flächen zweiten Grades sind folgende.

1. **Welche Fläche beschreibt ein Punkt, dessen Abstände von einer festen Ebene und von einer bestimmten Geraden in gegebenem Verhältnisse stehen?**

Die feste Ebene sei die Coordinatenebene der xy, ihr Durchschnitt mit der Geraden der Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten, und die Ebene des Neigungswinkels der Geraden gegen die Ebene die xz-Ebene; die Gleichungen der Geraden sind unter dieser Voraussetzung

$$y = 0, \qquad z = Cx,$$

wo C die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels bedeutet. Ferner hat man für den Abstand p des beweglichen Punktes xyz von der Geraden nach Formel 19 auf Seite 42

$$p = \sqrt{\frac{y^2 + (Cx - z)^2 + (Cy)^2}{1 + C^2}},$$

und z als Abstand des Punktes xyz von der festen Ebene. Bezeichnet nun λ das constante Verhältniss $\frac{p}{z}$, so lautet die Gleichung der Fläche

$$\sqrt{\frac{y^2 + (Cx - z)^2 + (Cy)^2}{1 + C^2}} = \lambda z,$$

oder nach Wegschaffung des Wurzelzeichens und bei anderer Anordnung

$$C^2 x^2 + (1 + C^2) y^2 + [1 - \lambda^2 (1 + C^2)] z^2 - 2Cxz = 0.$$

Dieselbe erhält eine bessere Gestalt wenn man den Neigungswinkel ϑ einführt, also $C = \tan\vartheta$ setzt, und nachher mit $\cos^2\vartheta$ multiplicirt; es ergiebt sich

$$1) \quad \sin^2\vartheta \,.\, x^2 + y^2 + (\cos^2\vartheta - \lambda^2) z^2 - 2\sin\vartheta\cos\vartheta \,.\, xz = 0.$$

Aus den im vorigen Paragraphen unter I., 2, angeführten Kennzeichen folgt augenblicklich, dass der fragliche Ort eine elliptische Kegelfläche ist. Will man ihre Gleichung auf die gewöhnliche Form bringen, so muss man das mit xz behaftete Glied wegschaffen; diess geschieht dadurch, dass man das Coordinatensystem um die y-Achse dreht, also

$$x = x' \cos\omega - z' \sin\omega$$
$$z = x' \sin\omega + z' \cos\omega$$

setzt, wo ω den Drehungswinkel bezeichnet, und nachher ω so bestimmt, dass der Coefficient von $x'z'$ verschwindet; man findet

$$2)\qquad \tan 2\omega = \frac{\sin 2\vartheta}{\cos 2\vartheta - \lambda^2}$$

und als Gleichung der Fläche

$$3)\ [\sin^2(\vartheta-\omega)-\lambda^2\sin^2\omega]\,x'^2+y'^2+[\cos^2(\vartheta-\omega)-\lambda^2\cos^2\omega]\,z'^2=0.$$

Da schon bekannt ist, dass diese Gleichung eine Kegelfläche charakterisirt, so müssen die Coefficienten von x'^2 und z'^2 entgegengesetzte Vorzeichen haben; ist der erste Coefficient positiv, mithin der zweite negativ, so fällt die Kegelachse mit der z'-Achse zusammen; im entgegengesetzten Falle ist die x'-Achse die Kegelachse.

2. **Ein Punkt bewegt sich so, dass seine Abstände von zwei festen nicht in einer Ebene liegenden Geraden ein bestimmtes Verhältniss zu einander haben; welcher ist der geometrische Ort des Punktes?**

Die gemeinschaftliche Normale beider Geraden nehmen wir zur z-Achse und den Mittelpunkt ihrer Entfernung zum Coordinatenanfang; durch letzteren legen wir Parallelen zu den gegebenen Geraden, halbiren die Winkel zwischen diesen Parallelen und nehmen die auf einander und auf der z-Achse senkrechten Halbirungslinien zu Achsen der x und der y. In Beziehung auf dieses rechtwinklige Coordinatensystem sind (wie in §. 9 S. 30) die Gleichungen der beiden Geraden

$$y = Bx,\ z = c;\qquad y = -Bx,\ z = -c;$$

die Abstände des beweglichen Punktes xyz von beiden Geraden erhalten wir nach Formel 19) in §. 12 (S. 42):

$$p = \sqrt{\frac{(Bx-y)^2+(c-z)^2+[B(c-z)]^2}{1+B^2}},$$

$$q = \sqrt{\frac{(Bx+y)^2+(c+z)^2+[B(c+z)]^2}{1+B^2}};$$

bezeichnet nun λ das constante Verhältniss $\frac{q}{p}$, so ist $q^2=\lambda^2 p^2$ mithin nach Substitution der Werthe von p und q, sowie bei Zusammenfassung der gleichartigen Grössen:

$$(1-\lambda^2)B^2x^2+(1-\lambda^2)y^2+(1-\lambda^2)(1+B^2)z^2$$
$$+2(1+\lambda^2)Bxy+2(1+\lambda^2)(1+B^2)cz+(1-\lambda^2)(1+B^2)c^2=0.$$

Für $B=\tan\alpha$ und nach Multiplication mit $\cos^2\alpha$ ergiebt sich hieraus als Gleichung des gesuchten Ortes:

$$4)\qquad (1-\lambda^2)[\sin^2\alpha\,.\,x^2+\cos^2\alpha\,.\,y^2+z^2]$$
$$+2(1+\lambda^2)[\sin\alpha\cos\alpha\,.\,xy+cz]+(1-\lambda^2)c^2=0.$$

Hierbei sind zunächst die Fälle $\lambda = 1$ und $\lambda \gtrless 1$ zu unterscheiden. Für $\lambda = 1$ erhält man

$$\sin\alpha\cos\alpha\,.\,xy + cz = 0$$

oder für $z = -z'$

$$5)\qquad xy = \frac{2c}{\sin 2\alpha} z',$$

die Fläche ist dann ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid (§. 41, Nr. 9); für $\lambda \gtrless 1$ giebt man der Gleichung 4) die Form:

$$6)\qquad \sin^2\alpha\,.\,x^2 + \cos^2\alpha\,.\,y^2 + z^2$$
$$+ 2\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\sin\alpha\cos\alpha\,.\,xy + 2\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}cz + c^2 = 0,$$

sie drückt in diesem Falle ein einfaches Hyperboloid aus. Will man die Gleichung desselben in der gewöhnlichen Form darstellen, so muss man das rechtwinklige Coordinatensystem um die z-Achse drehen und gleichzeitig längs der z-Achse verschieben indem man setzt

$$x = x'\cos\omega - y'\sin\omega,$$
$$x = x'\sin\omega + y'\cos\omega,$$
$$z = z' + k,$$

und dabei ω und k so wählen, dass die Coefficienten von $x'y'$ und z' verschwinden. Die hierzu nöthigen Werthe bestimmen sich durch die Formeln

$$7)\qquad \tan 2\omega = -\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\tan 2\alpha, \qquad k = -\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}c.$$

Im Fall sich beide Gerade schneiden wird das hyperbolische Paraboloid zu zwei Ebenen und das einfache Hyperboloid zu einem elliptischen Kegel.

3. Eine Gerade bewegt sich so, dass drei gegebene Punkte derselben auf drei festen in einem Punkte zusammentreffenden Ebenen bleiben; welche Fläche beschreibt ein vierter Punkt der Geraden?

Die vier gegebenen Punkte mögen der Reihe nach A, B, C, P heissen und ihre Abstände durch $AP = a$, $BP = b$, $CP = c$ bestimmt sein; die gegebenen Ebenen wählen wir zu Coordinatenebenen und zwar in der Weise, dass der Punkt A auf der Ebene yz, B auf xz und C auf xy bleibt. Heissen ferner ξ, η, ζ die Coordinaten irgend eines Punktes der beweglichen Geraden (die sogenannten laufenden Coordinaten), und x, y, z die des Punktes P, so können die Gleichungen der Geraden in der Form

$$8)\quad \eta - y = M(\xi - x), \qquad \zeta - z = N(\xi - x)$$

dargestellt werden, und die Punkte A, B, C sind nichts Anderes, als die Spuren dieser Geraden. Wir bezeichnen demgemäss

die Coordinaten von A mit $x''' = 0$, y''', z''',
„ „ „ B „ x'', $y'' = 0$, z'',
„ „ „ C „ x', y', $z' = 0$,

und haben, weil sie den Gleichungen 8) genügen müssen,

$$9)\quad \begin{cases} y''' - y = -Mx, & z''' - z = -Nx, \\ x'' - x = -\frac{1}{M}y, & z'' - z = -\frac{N}{M}y, \\ x' - x = -\frac{1}{N}z, & y' - y = -\frac{M}{N}z. \end{cases}$$

Für die Entfernung der Punkte A und P, d. h. $x'''y'''z'''$ und xyz gilt nun der Aufgabe zufolge die Gleichung

$$(x''' - x)^2 + (y''' - y)^2 + (z''' - z)^2 + 2(x''' - x)(y''' - y)\cos(xy)$$
$$+ 2(x''' - x)(z''' - z)\cos(xz) + 2(y''' - y)(z''' - z)\cos(yz) = a^2,$$

oder, wenn die Cosinus der Coordinatenwinkel xy, xz, yz mit γ, β, α bezeichnet und die in Nr. 9) verzeichneten Werthe substituirt werden,

$$(1 + M^2 + N^2 + 2M\gamma + 2N\beta + 2MN\alpha)x^2 = a^2;$$

auf analoge Weise gelangt man zu den Relationen

$$(1 + M^2 + N^2 + 2M\gamma + 2N\beta + 2MN\alpha)\frac{y^2}{M^2} = b^2,$$

$$(1 + M^2 + N^2 + 2M\gamma + 2N\beta + 2MN\alpha)\frac{z^2}{N^2} = c^2.$$

Aus diesen Gleichungen zieht man durch Division

$$\frac{x^2 M^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}, \qquad \frac{x^2 N^2}{z^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

oder

$$M = \frac{ay}{bx}, \qquad N = \frac{az}{cx},$$

und wenn man diese Werthe in die für a^2 geltende Gleichung substituirt, so erhält man nach Division mit a^2,

$$10)\quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \\ + 2\frac{\gamma}{ab}xy + 2\frac{\beta}{ac}xz + 2\frac{\alpha}{bc}yz = 1 \end{cases}$$

als Gleichung des gesuchten Ortes. Letzterer ist ein dreiachsiges Ellipsoid.

Wenn die gegebenen Ebenen senkrecht auf einander stehen, wird $\alpha = \beta = \gamma = 0$, und a, b, c sind dann die Halbachsen der Fläche.

4. Zwei nicht in einer Ebene liegende Gerade sind gegeben; um jede derselben dreht sich eine Ebene und zwar so, dass beide Ebenen immer senkrecht auf einander bleiben. Welche Fläche beschreibt ihre Durchschnittslinie?

Unter Benutzung desselben rechtwinkligen Coordinatensystemes, wie bei der zweiten Aufgabe, sind die Gleichungen der beiden festen Geraden

$$y = Bx, \quad z = c; \quad y = -Bx, \quad z = -c.$$

Ist nun

$$L_1 x + M_1 y + N_1 z = 1$$

die Gleichung der einen beweglichen Ebene, so gelten, weil sie die erste Gerade in sich enthalten soll, die Bedingungen

$$L_1 + M_1 B = 0, \quad N_1 c = 1,$$

und man kann daher die Gleichung jener Ebene in der Form

$$11) \qquad -M_1 Bx + M_1 y + \frac{1}{c} z = 1$$

darstellen. Auf analoge Weise findet sich als Gleichung einer zweiten Ebene, welche die zweite Gerade enthält,

$$12) \qquad +M_2 Bx + M_2 y - \frac{1}{c} z = 1,$$

endlich liefert die vorausgesetzte senkrechte Lage der Ebenen 11) und 12) die Bedingung

$$-M_1 M_2 B^2 + M_1 M_2 - \frac{1}{c^2} = 0.$$

Durch Elimination von M_1 und M_2 aus den drei letzten Gleichungen erhält man

$$-B^2 x^2 + y^2 + (1 - B^2) z^2 = (1 - B^2) c^2$$

oder für $B = \tan\alpha$ und durch Multiplication mit $\cos^2\alpha$

$$13) \qquad -\sin^2\alpha \,.\, x^2 + \cos^2\alpha \,.\, y^2 + \cos 2\alpha \,.\, z^2 = \cos 2\alpha \,.\, c^2$$

als Gleichung der Fläche. Letztere ist für $c \gtrless 0$ ein einfaches Hyperboloid; für $c = 0$, d. h. bei zwei sich schneidenden Geraden, wird sie zu einem elliptischen Kegel. Eine nähere Untersuchung über die Lage der Fläche hat die Fälle zu unterscheiden, ob $\cos 2\alpha$ positiv oder negativ, d. h. ob $\alpha < 45^0$ oder $> 45^0$ ist; wir überlassen dies dem Leser.

5. **Von einem Punkte sind Senkrechte auf die sechs Seitenebenen eines gegebenen Parallelopipedes herabgelassen; welche Fläche beschreibt jener Punkt, wenn er sich so bewegt, dass das Product aus den Perpendikeln auf drei in einer bestimmten Ecke zusammentreffende Seitenflächen gleich dem Producte aus den drei übrigen Perpendikeln bleiben soll?**

Die drei Kanten des Parallelopipedes mögen $2a$, $2b$, $2c$ heissen; durch den Mittelpunkt desselben legen wir parallel zu den Seitenflächen drei Ebenen und nehmen diese zu Coordinatenebenen. Drei in einer Ecke zusammenstossende Seitenflächen sind jetzt durch die Gleichungen

$$x = +a, \qquad y = +b, \qquad z = +c,$$

und die gegenüberliegenden durch

$$x = -a, \qquad y = -b, \qquad z = -c$$

bestimmt. Die von dem beweglichen Punkte xyz auf die Seitenflächen herabgelassenen Senkrechten ergeben sich aus Formel 19) in §. 19 (S. 70) wenn man die Cosinus der Coordinatenwinkel xy, xz, yz wieder mit γ, β, α und den Ausdruck

$$1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$$

mit δ^2 bezeichnet; jene sechs Entfernungen sind nämlich

$$\frac{+a-x}{\sqrt{1-\alpha^2}}\delta, \qquad \frac{+b-y}{\sqrt{1-\beta^2}}\delta, \qquad \frac{+c-z}{\sqrt{1-\gamma^2}}\delta,$$

$$\frac{-a-x}{\sqrt{1-\alpha^2}}\delta, \qquad \frac{-b-y}{\sqrt{1-\beta^2}}\delta, \qquad \frac{-c-z}{\sqrt{1-\gamma^2}}\delta.$$

Der Aufgabe zufolge muss nun die Gleichung

$$14) \qquad (x+a)\,(y+b)\,(z+c) = (x-a)\,(y-b)\,(z-c)$$

gelten und aus dieser wird nach gehöriger Hebung:

$$cxy + bxz + ayz + abc = 0$$

oder

$$15) \qquad \frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} + 1 = 0.$$

Der gesuchte Ort ist demnach ein einfaches Hyperboloid, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des Parallelopipedes zusammenfällt.

Bezeichnen wir diejenigen Eckpunkte des Parallelopipedes, deren Coordinaten sind

$-a, +b, +c$, mit A,
$+a, -b, +c$, „ B,
$+a, +b, -c$, „ C,
$+a, +b, +c$, „ D,

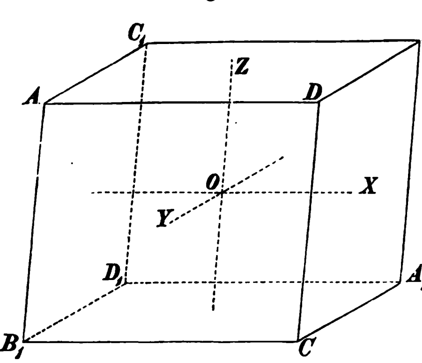
und die gegenüberliegenden Punkte

$+a, -b, -c$, mit A_1,
$-a, +b, -c$, „ B_1,
$-a, -b, +c$, „ C_1,
$-a, -b, -c$, „ D_1,

so gelten folgende Gleichungen von geraden Linien:

für die Kante AB_1 : $x = -a,\ y = +b$,
„ „ „ A_1B : $x = +a,\ y = -b$;
„ „ „ AC_1 : $x = -a,\ z = +c$,
„ „ „ A_1C : $x = +a,\ z = -c$;
„ „ „ BC_1 : $y = -b,\ z = +c$,
„ „ „ B_1C : $y = +b,\ z = -c$;

Fig. 43.



jedes dieser sechs Gleichungssysteme erfüllt die Gleichung 14) mithin auch die Gleichung 15) d. h. die sechs entsprechenden Kanten liegen auf der Fläche und bilden dort das schiefe Sechseck $AB_1CA_1BC_1A$; die übrigen sechs Kanten AD, BD, CD, A_1D_1, B_1D_1, C_1D_1 liegen nicht auf der Fläche.

6. Welche Fläche beschreibt eine gerade Linie, wenn sie an drei festen Geraden hingleitet, von denen kein Paar in einer Ebene liegt?

Durch jede der drei gegebenen Geraden legen wir zwei Ebenen parallel zu den zwei übrigen Geraden, nehmen den Mittelpunkt des von den entstandenen sechs Ebenen begrenzten Parallelopipedes zum Coordinatenanfang und ziehen durch ihn die Coordinatenachsen parallel zu den gegebenen Geraden. Letztere können bei diesem Coordinatensysteme durch die Gleichungen

$$16) \quad \begin{cases} y = +b, & z = -c, \\ x = -a, & z = +c, \\ x = +a, & y = -b, \end{cases}$$

dargestellt werden und sind der Reihe nach identisch mit den in der vorigen Aufgabe erwähnten Kanten B_1C, C_1A, A_1B. Die bewegliche Gerade sei durch die Gleichungen

$$17) \qquad y = Px + p, \qquad z = Qx + q$$

ausgedrückt; sie schneidet die erste feste Gerade sobald die Bedingung

$$\frac{p-b}{q+c} = \frac{P}{Q}$$

erfüllt ist; soll sie die zweite Gerade schneiden, so muss ihre xz-Projection durch die gleichnamige Spur der zweiten Geraden gehen, also

$$c = -Qa + q$$

sein; endlich ist auf ähnliche Weise die Bedingung für ihren Durchschnitt mit der dritten Geraden:

$$-b = Pa + p.$$

Durch Substitution der aus den beiden letzten Gleichungen folgenden Werthe

$$p = -Pa - b, \qquad q = Qa + c$$

verwandeln sich die vorigen drei Gleichungen in

$$y = (x-a)P - b, \qquad z = (x+a)Q + c,$$
$$aPQ + bQ + cP = 0,$$

und wenn man die Werthe von P und Q aus den zwei ersten dieser Gleichungen in die letzte einsetzt, so bleibt nach Division mit abc

$$\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} + 1 = 0.$$

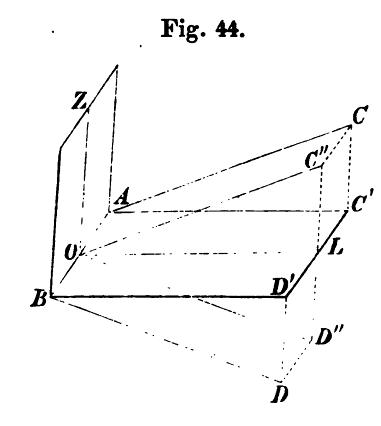
Hierin liegt der bemerkenswerthe Satz, dass eine an drei festen Geraden gleitende Gerade ein einfaches Hyperboloid beschreibt; dabei gehören die gegebenen Geraden zu dem einen Systeme von geraden Linien, welche sich auf der Fläche ziehen lassen, und die bewegliche Gerade wird der Reihe nach mit allen Geraden des zweiten Systemes identisch. *)

*) Aus dem Obigen folgt noch eine elegante Construction der Transversale zu vier gegebenen Geraden a, b, c, d. Die drei ersten derselben bestimmen nämlich, wenn man eine bewegliche Gerade daran hingleiten

7. **Welche Fläche beschreibt eine gerade Linie, wenn dieselbe an zwei festen nicht in einer Ebene liegenden Geraden hingleitet und zugleich einer gegebenen Ebene parallel bleibt?**

Wenn die Ebene den beiden Geraden nicht parallel ist, was wir deswegen voraussetzen müssen, weil sonst die geforderte Bewegung unmöglich sein würde, so schneiden die Geraden die Ebene in zwei Punkten A und B; wir verbinden diese durch eine Gerade, nehmen ihren Mittelpunkt O zum Coordinatenanfang, OA zur Achse der positiven y und die gegebene Ebene zur yz-Ebene. Durch O legen wir ferner zwei Parallelen zu den festen Geraden nämlich $OC''//AC$, $OD''//BD$ und erhalten hierdurch eine jenen Geraden parallele (in der Figur verticale) Ebene $C''OD''$; diese wählen wir zur Ebene xz. Sie schneidet die feste Ebene in einer Geraden nämlich der z-Achse. In der Ebene xz ziehen wir endlich irgend eine zur z-Achse parallele Gerade, welche die Hilfslinien OC'' und OD'' in zwei Punkten C'', D'' trifft, verbinden den Mittelpunkt L der Transversale $C''D''$ mit O durch eine Gerade und nehmen OL zur Achse der positiven x. Das Coordinatensystem hat jetzt gegen die Geraden AC und BD eine insofern symmetrische Lage, als jedem $x = OL$ zwei gleiche und entgegengesetzte y ($LC' = +y$, $LD' = -y$) sowie zwei gleiche und entgegengesetzte z ($LC'' = C'C = +z$, $LD'' = D'D = -z$) entsprechen. Für $OA = b$,

Fig. 44.



---

lässt, ein einfaches Hyperboloid, auf welchem a, b, c zu dem einen System von Geraden gehören; die vierte Gerade d schneidet die entstandene Fläche im Allgemeinen zweimal in gewissen Punkten D_1 und D_2; legt man durch jeden derselben die zum anderen Systeme gehörende Gerade g_1 resp. g_2, so schneidet sowohl g_1 als g_2 alle Geraden des ersten Systemes, mithin auch a, b, c und zugleich d, es sind daher g_1 und g_2 die beiden gesuchten Transversalen. Die zweite Hälfte der Construction lässt sich insofern abkürzen, als man durch D_1 und D_2 nur diejenigen Geraden zu ziehen braucht, welche irgend zwei der Geraden a, b, c schneiden.

$tan\, CAC' = tan\, \alpha = C$ sind die Gleichungen der gegebenen Geraden

$$y = b,\ z = Cx; \qquad y = -b,\ z = -Cx;$$

irgend eine der festen Ebene (yz) parallele Gerade wird durch die Gleichungen

$$19) \qquad x = m, \qquad y = Nz + p$$

ausgedrückt und schneidet jene Geraden wenn die Bedingungen

$$b = NCm + p, \qquad -b = -NCm + p$$

erfüllt sind. Hieraus ergeben sich die Werthe

$$p = 0, \qquad N = \frac{b}{Cm} = \frac{b}{Cx}$$

und durch Substitution in die zweite Gleichung unter Nr. 19)

$$20) \qquad xy = \frac{b}{C}\, z = b\, cot\, \alpha\, .\, z.$$

Hierin liegt der bemerkenswerthe Satz, dass eine Gerade, welche parallel einer unveränderlichen Ebene an zwei festen Geraden hingleitet, ein hyperbolisches Paraboloid beschreibt.

§. 44.

Tangenten, Berührungsebenen und Normalen.

Wir betrachten noch einmal die allgemeine Gleichung der Flächen zweiten Grades

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\ \qquad + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0 \end{array} \right.$$

um die Bedingungen zu erörtern, unter welchen eine Gerade oder eine Ebene die durch vorstehende Gleichung charakterisirte Fläche berührt. Zu diesem Zwecke transformiren wir die Gleichung indem wir einen bestimmten Punkt $x_0 y_0 z_0$ der Fläche (den künftigen Berührungspunkt) zum Anfange eines neuen Coordinatensystemes wählen, welches dem ursprünglichen Systeme parallel liegt. Mit Hilfe der Substitutionen

$$x = \xi + x_0, \qquad y = \eta + y_0, \qquad z = \zeta + z_0$$

erhalten wir

$$\left. \begin{array}{l} A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2D\xi\eta + 2E\xi\zeta + 2F\eta\zeta \\ \quad + 2(Ax_0 + Dy_0 + Ez_0 + G)\xi \\ \quad + 2(Dx_0 + By_0 + Fz_0 + H)\eta \\ \quad + 2(Ex_0 + Fy_0 + Cz_0 + I)\zeta \\ + Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + 2Dx_0y_0 + 2Ex_0z_0 + 2Fy_0z_0 \\ \quad + 2Gx_0 + 2Hy_0 + 2Iz_0 + K \end{array} \right\} = 0;$$

weil aber der Punkt $x_0 y_0 z_0$ der Fläche angehört, so ist für ihn

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + 2Dx_0y_0 + 2Ex_0z_0 + 2Fy_0z_0 + 2Gx_0 + 2Hy_0 + 2Iz_0 + K = 0,$$

mithin verschwindet aus der vorigen Gleichung der von ξ, η, ζ freie Theil und es bleibt als Gleichung der Fläche:

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2D\xi\eta + 2E\xi\zeta + 2F\eta\zeta \\ \quad + 2(Ax_0 + Dy_0 + Ez_0 + G)\xi \\ \quad + 2(Dx_0 + By_0 + Fz_0 + H)\eta \\ \quad + 2(Ex_0 + Fy_0 + Cz_0 + I)\zeta \end{array} \right\} = 0.$$

Durch den neuen Anfangspunkspunkt der Coordinaten legen wir die Gerade

$$3) \qquad \eta = P\xi, \qquad \zeta = Q\xi$$

und suchen ihre Durchschnitte mit der Fläche; die Elimination von η und ζ giebt für die Coordinate ξ eine Gleichung von der Form

$$4) \qquad \xi(S\xi + 2T) = 0$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$S = A + BP^2 + CQ^2 + 2DP + 2EQ + 2FPQ,$$

$$T = Ax_0 + Dy_0 + Ez_0 + G + (Dx_0 + By_0 + Fz_0 + H)P + (Ex_0 + Fy_0 + Cz_0 + I)Q;$$

aus den Gleichungen 4) und 3) folgen die Coordinaten der beiden vorhandenen Durchschnitte nämlich:

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0;$$

$$\xi = -\frac{2T}{S}, \qquad \eta = -\frac{2PT}{S}, \qquad \zeta = -\frac{2QT}{S}.$$

Wenn aber die Gerade 3) die Fläche 2) berühren soll, so müssen die beiden Durchschnitte zu einem einzigen Punkte zusammenfallen, und hierzu ist die Bedingung $T = 0$ erforderlich und ausreichend. Indem wir nun zu dem ursprünglicheu Coordinatensysteme zurückkehren, also in Nr. 3) $\xi - x_0$, $\eta - y_0$, $\zeta - z_0$ für ξ, η, ζ schreiben, erhalten wir den Satz: Bezeichnet $x_0 y_0 z_0$ einen bestimmten Punkt der Fläche 1) und

$$5) \qquad \eta - y_0 = P(\xi - x_0), \qquad \zeta - z_0 = (\xi - x_0)$$

eine durch denselben gelegte Gerade, so berührt letztere die Fläche im Punkte $x_0 y_0 z_0$, sobald die Coefficienten P und Q der Bedingung

$$6)\qquad \left.\begin{array}{l} \quad A x_0 + D y_0 + E z_0 + G \\ +(D x_0 + B y_0 + F z_0 + H) P \\ +(E x_0 + F y_0 + C z_0 + I) Q \end{array}\right\} = 0.$$

Genüge leisten. — Von den Grössen P und Q bleibt hier eine vollkommen beliebig, es sind daher durch einen Punkt der Fläche unendlich viel Tangenten möglich.

Diese Bemerkung führt weiter auf die Frage nach dem geometrischen Orte der Tangenten d. h. nach der Fläche, welche die durch den Punkt $x_0 y_0 z_0$ gehenden Tangenten in ihrer stetigen Aufeinanderfolge bilden. Man gelangt hierzu indem man beachtet, dass ξ, η, ζ in Nr. 5) die Coordinaten irgend eines Punktes irgend einer solchen Tangente bedeuten, dass es folglich nur darauf ankommt P und Q aus den Gleichungen 5) und 6) auszuscheiden; durch Substitution der aus Nr. 5) folgenden Werthe

$$P = \frac{\eta - y_0}{\xi - x_0}, \qquad Q = \frac{\zeta - z_0}{\xi - x_0}$$

geht nun die Gleichung in die nachstehende über:

$$7)\qquad \left.\begin{array}{l} \quad (A x_0 + D y_0 + E z_0 + G)(\xi - x_0) \\ + (D x_0 + B y_0 + F z_0 + H)(\eta - y_0) \\ + (E x_0 + F y_0 + C z_0 + I)(\zeta - z_0) \end{array}\right\} = 0$$

und diese ist die Gleichung des gesuchten Ortes. Man erkennt hieraus, dass alle durch einen und denselben Punkt $x_0 y_0 z_0$ gehenden Tangenten in einer Ebene liegen, welche man eben desswegen die Tangentialebene am Punkte $x_0 y_0 z_0$ genannt hat.

Die Gleichung der Berührungsebene wird etwas einfacher, wenn man ihr zunächst die Form

$$\begin{array}{c} (A x_0 + D y_0 + E z_0 + G)\,\xi \\ + (D x_0 + B y_0 + F z_0 + H)\,\eta \\ + (E x_0 + F y_0 + C z_0 + I)\,\zeta \\ -(A x_0^2 + B y_0^2 + C z_0^2 + 2 D x_0 y_0 + 2 E x_0 z_0 + 2 F y_0 z_0) \\ -(G x_0 + H y_0 + I z_0) = 0 \end{array}$$

ertheilt und hierzu die Gleichung

$$\begin{array}{c} A x_0^2 + B y_0^2 + C z_0^2 + 2 D x_0 y_0 + 2 E x_0 z_0 + 2 F y_0 z_0 \\ + 2 G x_0 + 2 H y_0 + 2 I z_0 + K = 0 \end{array}$$

addirt, welche die Voraussetzung ausdrückt, dass der Punkt $x_0 y_0 z_0$ auf der Fläche liegt; man erhält:

$$8)\quad \left.\begin{array}{l} (Ax_0 + Dy_0 + Ez_0 + G)\,\xi \\ + (Dx_0 + By_0 + Fz_0 + H)\,\eta \\ + (Ex_0 + Fy_0 + Cz_0 + I)\,\zeta \\ + \;Gx_0 + Hy_0 + Iz_0 + K \end{array}\right\} = 0,$$

und kann hieraus leicht die früheren Gleichungen ableiten, welche in den §§. 37 . . . 41 für die Berührungsebenen entwickelt wurden.

Das im Punkte $x_0 y_0 z_0$ auf der Tangentialebene errichtete Perpendikel pflegt man die Normale durch diesen Punkt zu nennen; ihre Gleichungen finden sich auf die in §. 19, β angegebene Weise. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$\begin{aligned} A_0 &= Ax_0 + Dy_0 + Ez_0 + G, \\ B_0 &= Dx_0 + By_0 + Fz_0 + H, \\ C_0 &= Ex_0 + Fy_0 + Cz_0 + I, \\ \mathfrak{A} &= (1-\alpha^2)A_0 - (\gamma - \alpha\beta)B_0 - (\beta - \alpha\gamma)C_0, \\ \mathfrak{B} &= (1-\beta^2)B_0 - (\alpha - \beta\gamma)C_0 - (\gamma - \alpha\beta)A_0, \\ \mathfrak{C} &= (1-\gamma^2)C_0 - (\beta - \alpha\gamma)A_0 - (\alpha - \beta\gamma)B_0, \end{aligned}$$

wo α, β, γ die Cosinus der Coordinatenwinkel yz, xz, xy bezeichnen, so sind die Gleichungen der Normale

$$\eta - y_0 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}(\xi - x_0), \qquad \zeta - z_0 = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}(\xi - x_0)$$

oder

$$9)\quad \frac{\xi - x_0}{\mathfrak{A}} = \frac{\eta - y_0}{\mathfrak{B}} = \frac{\zeta - z_0}{\mathfrak{C}}.$$

Bei rechtwinkligen Coordinaten hat man einfacher

$$10)\quad \frac{\xi - x_0}{A_0} = \frac{\eta - y_0}{B_0} = \frac{\zeta - z_0}{C_0},$$

woraus man leicht die in den §§. 37 . . , 41 vorkommenden Normalengleichungen ableiten kann.

Wir knüpfen hieran einige allgemeine Erörterungen über die Bestimmung der Tangenten, Berührungsebenen und Normalen an beliebigen Flächen.

α. Tangenten. Bezeichnen wir einen auf irgend welche Weise aus x, y, z und constanten Grössen zusammengesetzten Ausdruck durch $\varphi(x, y, z)$, so charakterisirt die Gleichung

$$11)\quad \varphi(x, y, z) = 0$$

irgend eine Fläche; ein beliebiger Punkt derselben sei $x_0 y_0 z_0$ und durch diesen soll eine Tangente an die Fläche gelegt werden. Zu diesem Zwecke verbinden wir den Punkt $x_0 y_0 z_0$ mit einem zweiten

Punkte $x_1 y_1 z_1$ der nämlichen Fläche und suchen zunächst die Gleichungen der so construirten Secante; wir erhalten

12) $\eta - y = M(\xi - x), \qquad \zeta - z = N(\xi - x),$

worin

13) $$M = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \qquad N = \frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0}.$$

Da beide Punkte $x_0 y_0 z_0$ und $x_1 y_1 z_1$ auf der Fläche 11) liegen, so gelten die Gleichungen

14) $\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad \varphi(x_1, y_1, z_1) = 0;$

diese können wir so miteinander combiniren, dass eine neue Gleichung entsteht, worin M und N vorkommen und letztere Gleichung enthält dann die Bedingung, unter welcher die Gerade 12) die Fläche in den Punkten $x_0 y_0 z_0$ und $x_1 y_1 z_1$ schneidet. Lassen wir nun den Punkt $x_1 y_1 z_1$ dem Punkte $x_0 y_0 z_0$ näher rücken, so dreht sich die Secante um den Punkt $x_0 y_0 z_0$ und geht für $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$ in die Tangente über. Dieser Grenzlage der Secante entsprechen gewisse Grenzwerthe von M und N, welche sich zwar in Nr. 14) unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ darstellen, jedenfalls aber irgend welche endliche Grössen sind, die wir durch P und Q bezeichnen wollen. Nehmen wir auch in der vorhin erwähnten aus Nr. 15) abgeleiteten Bedingungsgleichung $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$ und $z_1 = z_0$ indem wir zugleich P für M und Q für N setzen, so erhalten wir diejenige neue Bedingungsgleichung, welche für den Fall gilt, wo die Gerade

15) $\eta - y_0 = P(\xi - x_0), \qquad \zeta - z_0 = Q(\xi - x_0)$

die gegebene Fläche im Punkte $x_0 y_0 z_0$ berührt.

Bei der Anwendung auf die Flächen zweiten Grades haben wir für $x_0 y_0 z_0$ und $x_1 y_1 z_1$ die Gleichungen

$$A x_0^2 + B y_0^2 + C z_0^2 + 2 D x_0 y_0 + 2 E x_0 z_0 + F y_0 z_0$$
$$+ 2 G x_0 + 2 H y_0 + 2 I z_0 + K = 0,$$
$$A x_1^2 + B y_1^2 + C z_1^2 + 2 D x_1 y_1 + 2 E x_1 z_1 + 2 F y_1 z_1$$
$$+ 2 G x_1 + 2 H y_1 + 2 I z_1 + K = 0;$$

um hieraus eine Combination zu bilden, welche die Einführung von M und N gestattet, ziehen wir die erste Gleichung von der zweiten ab und benutzen in den ersten drei Gliedern die identische Gleichung

$$t_1^2 - t_0^2 = (t_1 + t_0)(t_1 - t_0)$$

und in den drei folgenden die gleichfalls identische Formel

$$u_1 v_1 - u_0 v_0 = u_1 (v_1 - v_0) + v_0 (u_1 - u_0);$$

wir erhalten auf diesem Wege

$$\begin{aligned} A(x_1 + x_0)(x_1 - x_0) + B(y_1 + y_0)(y_1 - y_0) + C(z_1 + z_0)(z_1 - z_0) \\ + 2D[x_1(y_1 - y_0) + y_0(x_1 - x_0)] \\ + 2E[x_1(z_1 - z_0) + z_0(x_1 - x_0)] \\ + 2F[y_1(z_1 - z_0) + z_0(y_1 - y_0)] \\ + 2G(x_1 - x_0) + 2H(y_1 - y_0) + 2I(z_1 - z_0) = 0. \end{aligned}$$

Die Division mit $x_1 - x_0$ bietet hier Gelegenheit zur Substitution von M und N, es wird nämlich

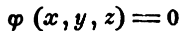
$$\begin{aligned} A(x_1 + x_0) + B(y_1 + y_0)M + C(z_1 + z_0)N \\ + 2D[x_1 M + y_0] + 2E[x_1 N + z_0] + 2F[y_1 N + z_1 M] \\ + 2G + 2HM + 2IN = 0. \end{aligned}$$

Für $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$, $M = P$, $N = Q$ verwandelt sich diese Gleichung nach Hebung mit 2 in

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 P + Cz_0 Q \\ + D(x_0 P + y_0) + E(x_0 Q + z_0) + F(y_0 Q + z_0 P) \\ + G + HP + IQ = 0 \end{aligned}$$

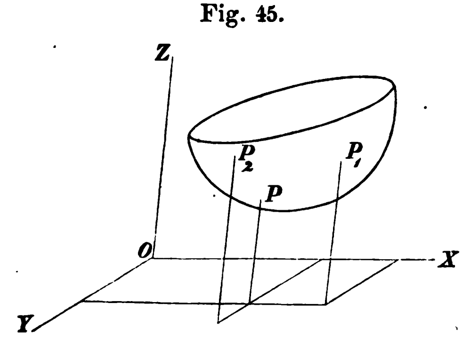
und enthält die Bedingung, unter welcher die Gerade 15) die Fläche 1) im Punkte $x_0 y_0 z_0$ berührt. Die Identität der vorigen Gleichung und der früher gefundenen Bedingung 6) ist leicht zu sehen.

β. Tangentialebenen. Sowie wir vorhin die berührende Gerade als diejenige letzte Secante betrachteten, deren Durchschnitte mit der Fläche in einem Punkte zusammengefallen sind, so können wir auch die berührende Ebene aus einer schneidenden Ebene ableiten, wenn wir die von letzterer Ebene abgeschnittene Kappe sich zu einem Punkte zusammenziehen lassen. Sei wiederum



$$\varphi(x, y, z) = 0$$

Fig. 45.



die Gleichung der gegebenen Fläche und $x_0 y_0 z_0$ ein auf ihr liegender Punkt P_0, an welchen eine Tangentialebene gelegt werden soll. Ausser diesem Punkte wählen wir auf der Fläche noch zwei andere Punkte P_1 und P_2, deren erster dasselbe y und deren

zweiter dasselbe x wie P_0 besitzt, und die wir demgemäss mit $x_1 y_0 z_1$ und $x_0 y_2 z_1$ bezeichnen. Für die durch alle drei Punkte gehende Ebene finden wir ohne Mühe die Gleichung

$$16)\qquad S(\xi - x_0) + T(\eta - y_0) - (\zeta - z_0) = 0,$$

worin

$$17)\qquad S = \frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0}, \qquad T = \frac{z_2 - z_0}{y_2 - y_0}.$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass die erwähnten Punkte auf der Fläche liegen, dass also die Gleichungen

$$18)\qquad \varphi(x_0, y_0, z_0) = 0, \ \varphi(x_1, y_0, z_1) = 0, \ \varphi(x_0, y_2, z_2) = 0$$

bestehen, woraus man die Werthe von S und T herleiten kann; doch ist dies nicht nothwendig, es reicht hin, die Gleichungen 19) zu zwei neuen Gleichungen so zu verbinden, dass S und T darin vorkommen. Lassen wir jetzt die Punkte P_1 und P_2 dem Punkte P_0 immer näher rücken, so dreht sich die schneidende Ebene um den Punkt P_0 und geht zuletzt für $x_1 = x_0$, $y_2 = y_0$, $z_2 = z_1 = z_0$ in die Tangentialebene über. Dieser Grenzlage der schneidenden Ebene entsprechen gewisse Grenzwerthe von S nnd T, welche mit U und V bezeichnet werden mögen. Schreiben wir also in Nr. 17) U und V für S und T und setzen in den aus Nr. 19) abgeleiteten Bedingungsgleichungen $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_2 = z_1 = z_0$, $S = U$, $T = V$, so erhalten wir die beiden neuen Bedingungen, unter welchen die Ebene

$$19)\qquad U(\xi - x_0) + V(\eta - y_0) - (\zeta - z_0) = 0$$

die gegebene Fläche berührt.

Bei der Anwendung auf die Flächen zweiten Grades gelten für $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_0 z_1$, $x_0 y_2 z_2$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} A x_0^2 + B y_0^2 + C z_0^2 + 2 D x_0 y_0 + 2 E x_0 z_0 + 2 F y_0 z_0 \\ + 2 G x_0 + 2 H y_0 + 2 I z_0 + K = 0, \\ A x_1^2 + B y_0^2 + C z_1^2 + 2 D x_1 y_0 + 2 E x_1 z_1 + 2 F y_0 z_1 \\ + 2 G x_1 + 2 H y_0 + 2 I z_1 + K = 0, \\ A x_0^2 + B y_2^2 + C z_2^2 + 2 D x_0 y_2 + 2 E x_0 z_2 + 2 F y_2 z_2 \\ + 2 G x_0 + 2 H y_2 + 2 I z_2 + K = 0; \end{aligned}$$

wir subtrahiren die erste von der zweiten, zerlegen wie vorhin, dividiren mit $x_1 - x_0$ und substituiren S; dies giebt

$$\begin{aligned} A(x_1 + x_0) + C(z_1 + z_0) S + 2 D y_0 \\ + 2 E(x_1 S + z_0) + 2 F y_0 S + 2 G + 2 I S = 0. \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise verbinden wir die erste der obigen Gleichun-

gen mit der dritten, dividiren den Unterschied durch $y_2 - y_0$ und substituiren T; wir erhalten:

$$B(y_2 + y_0) + C(z_2 + z_0)\,T + 2Dx_0$$
$$+ 2Ex_0T + 2F(y_2T + z_0) + 2H + 2IT = 0.$$

Für $x_1 = x_0$, $y_2 = y_0$, $z_2 = z_1 = z_0$, $S = U$, $T = V$ verwandeln sich diese Gleichungen nach Hebung mit 2 in die folgenden:

$$\left.\begin{array}{l} Ax_0 + Cz_0U + Dy_0 \\ + E(x_0U + z_0) + Fy_0U + G + IU \end{array}\right\} = 0,$$
$$\left.\begin{array}{l} By_0 + Cz_0V + Dx_0 \\ + Ex_0V + F(y_0V + z_0) + H + IV \end{array}\right\} = 0,$$

aus denen man für die Unbekannten U und V findet:

$$U = -\frac{Ax_0 + Dy_0 + Ez_0 + G}{Ex_0 + Fy_0 + Cz_0 + I},$$
$$V = -\frac{Dx_0 + By_0 + Fz_0 + H}{Ex_0 + Fy_0 + Cz_0 + I}.$$

Nach Substitution dieser Werthe bringt man die Gleichung 19) leicht auf dieselbe Form, unter welcher die Gleichung der Tangentialebene in Nr. 7) dargestellt wurde.

γ. Normalen. Nachdem die Gleichung der Berührungsebene auf dem soeben angedeuteten Wege entwickelt worden ist, ergeben sich die Gleichungen der im Punkte $x_0y_0z_0$ auf der Tangentialebene errichteten Senkrechten (der Normale) mittelst der Formeln des §. 19, β, wie dies schon vorhin bei den Flächen zweiten Grades gezeigt wurde.

§. 45.

Cubatur der Flächen zweiten Grades.

Wenn es darauf ankommt, das Volumen eines ganz oder theilweis von krummen Flächen begrenzten Körpers zu ermitteln, so kann man ein ähnliches Verfahren in Anwendung bringen wie die analytische Geometrie der Ebene bei der Quadratur krummlinig begrenzter Ebenen. Durch eine Reihe paralleler Schnitte zerlegt man vorerst das Volumen in eine Reihe von Schichten und bestimmt die Flächen der entstandenen Querschnitte; jede solche Schicht wird von zwei Querschnitten, etwa Q' und Q'', begrenzt, deren Entfernung ε heissen möge. Construirt man zwei Cylinder,

von denen einer Q', der andere Q'' zur Basis hat, und deren gemeinschaftliche Höhe (oder Dicke) ε ist, so wird in den meisten Fällen der eine Cylinder die Schicht umschliessen, der andere dagegen von der Schicht umschlossen werden, so dass das Volumen der Schicht zwischen den Cylinderinhalten $Q'\varepsilon$ und $Q''\varepsilon$ liegt. Durch Addition der Volumina aller umschriebenen und aller eingeschriebenen Cylinder erhält man zwei Volumina Σ' und Σ'', zwischen denen das gesuchte Volumen enthalten ist, und es kommt jetzt darauf an, die Grössen Σ' und Σ'' einander immer näher zu bringen. Bezeichnet n die Anzahl der Schichten, in welche das Volumen zerlegt wurde, so besteht jede der Summen Σ' und Σ'' aus n-Gliedern, daraus lässt sich leicht der Betrag von $\Sigma' - \Sigma''$ herleiten und zwar ist derselbe einerlei mit der Differenz zwischen dem ersten eingeschriebenen und letzten umschriebenen oder zwischen dem ersten umschriebenen und dem letzten eingeschriebenen Cylinder. Nähert sich nun bei unendlich wachsenden n, d. h. wenn die Anzahl der Schichten unausgesetzt zunimmt und folglich die Dicke jeder einzelnen Schicht immer geringer wird, die Differenz $\Sigma' - \Sigma''$ der Grenze Null, so ist dies ein Zeichen, dass die Summen Σ' und Σ'' nach einer und derselben Grenze streben; diese gemeinschaftliche Grenze kann aber keine andere als das gesuchte Volumen sein, weil letzteres immer zwischen Σ' und Σ'' enthalten bleibt. — Dieses Princip wollen wir zur Cubatur der Zonen und Kappen von Flächen zweiten Grades anwenden.

Das Ellipsoid. Beziehen wir die Fläche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Achsen mit den Achsen des Ellipsoides zusammenfallen, so ist wie in §. 37 der in der Höhe h parallel zur xy-Ebene gelegte Querschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}, \qquad \frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2},$$

mithin ihre Fläche

$$= \pi\frac{ab}{c^2}(c^2-h^2).$$

Um den cubischen Inhalt V einer Zone zu finden, welche von der Ebene xy, einer in der Höhe z dazu parallel gelegten Ebene und im Uebrigen von der Fläche begrenzt wird, theilen wir die Höhe z der Zone in n gleiche Strecken, legen durch jeden Theilpunkt eine Ebene parallel xy und erhalten auf diese Weise n-Schichten, de-

ren jede in horizontaler Richtung von zwei Ellipsenflächen begrenzt wird und die Höhe $\frac{z}{n}$ besitzt. Die untere Begrezungseuene ist jedesmal die grössere und da die Fläche sich um so mehr von allen Seiten her zusammenzieht je höher die Querschnitte hinaufrücken, so beträgt das Volumen irgend einer Schicht weniger als das Volumen des umschriebenen elliptischen Cylinders, dessen Basis die Basis der Schicht ist, und mehr als das Volumen des eingeschriebenen Cylinders, dessen Querschnitt die obere Begrenzungsfläche der Schicht ist. Demgemäss gelten folgende Beziehungen:

$$V < \pi \frac{ab}{c^2}[c^2]\frac{z}{n} + \pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{2z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \cdots$$
$$\cdots + \pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{(n-1)z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n},$$

$$V > \pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{2z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \cdots$$
$$\cdots + \pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{nz}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n};$$

die Differenz beider Cylindersummen ist

$$\pi\frac{ab}{c^2}[c^2]\frac{z}{n} - \pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{nz}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} = \pi\frac{ab}{c^2}\frac{z^3}{n},$$

und da sich dieser Ausdruck für unendlich wachsende n der Grenze Null nähert, so haben die beiden Cylindersummen einen und denselben Grenzwerth, welcher den Betrag von V darstellt. Zufolge dieser Bemerkung brauchen wir nur den Grenzwerth der einen Cylindersumme zu bestimmen und wenn wir dazu die erste wählen, so ist bei gehöriger Zusammenziehung

$V =$ dem Grenzwerthe von:

$$\pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3}\right]z$$

und nach einem bekannten arithmetischen Satze,

1) $$V = \pi\frac{ab}{c^2}(c^2 z - z^3).$$

Für $z = h$ ergiebt sich hieraus $\frac{2}{3}\pi abc$ als Volumen des halben mithin

2) $$E = \frac{4}{3}\pi abc$$

als Volumen des ganzen Ellipsoides. Die Formel für den Ku-

gelinhalt ist, wie man sieht, ein sehr specieller Fall der vorstehenden.

Ist die eine Begrenzungsebene einer Zone um z_0, die andere um z_1 von der xy-Ebene entfernt, so kann das Volumen der Zone als der Unterschied der Inhalte zweier Zonen der vorigen Art betrachtet werden; für $z_1 > z_0$ ist hiernach das gesuchte Volumen

$$3)\qquad \pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2(z_1-z_0)-\tfrac{1}{3}(z_1^3-z_0^3)\right];$$

handelt es sich um die Inhalte von Zonen, deren Begrenzungsebenen auf einer andern als der z-Achse senkrecht stehen, so bedarf es keiner neuen Rechnung, sondern nur einer Buchstabenvertauschung; für eine Zone, deren Begrenzungsebenen senkrecht auf der y-Achse in den Entfernungen y_0 und $y_1 > y_0$ vom Mittelpunkte stehen, hat man

$$4)\qquad \pi\frac{ac}{b^2}\left[b^2(y_1-y_0)-\tfrac{1}{3}(y_1^3-y_0^3)\right],$$

und entsprechend für eine Zone, deren Begrenzungsebenen senkrecht auf der x-Achse in den Entfernungen x_0 und $x_1 > x_0$ vom Mittelpunkte stehen:

$$5)\qquad \pi\frac{bc}{a^2}\left[a^2(x_1-x_0)-\tfrac{1}{3}(x_1^3-x_0^3)\right].$$

Durch Subtraction der Zone 1) von dem halben Ellipsoide erhält man eine Kappe von der Höhe $c-z$, die kurz z' heissen möge; das Volumen dieser Kappe ist:

$$6)\qquad \pi\frac{cb}{c^2}\left(cz'^2-\tfrac{1}{3}z'^3\right);$$

steht die Begrenzungsebene der Kappe senkrecht auf der y-Achse in der Entfernung y' vom Scheitel, so ist der Inhalt der Kappe:

$$7)\qquad \pi\frac{ac}{b^2}\left(by'^2-\tfrac{1}{3}y'^2\right);$$

endlich entspricht das Volumen

$$8)\qquad \pi\frac{bc}{a^2}\left(ax'^2-\tfrac{1}{3}x'^3\right)$$

dem Falle, wo die Begrenzungsebene der Kappe senkrecht zur x-Achse und um x' vom Scheitel der Fläche entfernt ist.

Das einfache Hyperboloid. Unter Voraussetzung desselben Coordinatensystemes, wie in §. 38, ist ein in der Höhe

parallel zur xy-Ebene gelegter Querschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}, \qquad \frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2},$$

folglich der Flächeninhalt des Schnittes

$$=\pi\frac{ab}{c^2}(c^2+h^2).$$

Um das Volumen V einer Zone zu finden, welche von der Ebene xy, einer in der Höhe z parallel dazu gelegten Ebene und im. Uebrigen von der Fläche begrenzt wird, theilen wir z in n gleiche Strecken, legen durch jeden Theilpunkt eine Ebene parallel xy und erhalten so n Schichten, deren jede in horizontaler Richtung von zwei Ellipsenflächen begrenzt wird. Die untere Ebene ist jedesmal die kleinere, und da die Fläche sich nach oben zu allseitig erweitert, so beträgt das Volumen einer Schicht mehr als das Volumen des eingeschriebenen elliptischen Cylinders, dessen Basis die Basis der Schicht ist, und weniger als das Volumen des umschriebenen Cylinders, welcher die obere Begrenzungsebene der Schicht zum Querschnitt hat. Demgemäss gelten die Relationen

$$V>\pi\frac{ab}{c^2}[c^2]\frac{z}{n}+\pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n}+\pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{2z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n}+\dots$$
$$\dots+\pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{(n-1)z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n},$$

$$V<\pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n}+\pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{2z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n}+\dots$$
$$\dots+\pi\frac{ab}{a^2}\left[c^2+\left(\frac{nz}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n};$$

die Differenz beider Cylindersummen beträgt

$$\pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{nz}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n}-\pi\frac{ab}{c^2}[c^2]\frac{z}{n}=\pi\frac{ab}{c^2}\frac{z^3}{n},$$

und da sich dieser Ausdruck für unendlich wachsende n der Grenze Null nähert, so haben beide Cylindersummen einen und denselben Grenzwerth, welcher den Betrag von V angiebt. Es ist daher, wenn wir bei der ersten Cylindersumme stehen bleiben und diese möglichst zusammenziehen

$V =$ dem Grenzwerthe von:

$$\pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2+\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2}{n^3}z^2\right]z$$

d. i.

9) $$V = \pi \frac{ab}{c^2} (c^2 z + \tfrac{1}{3} z^3).$$

Der Specialwerth $z = c$ giebt $V = \frac{4}{3} \pi abc$ und damit den bemerkenswerthen Satz, dass das Volumen der Zone von der Höhe c gleich dem Volumen eines aus den Halbachsen a, b, c construirten Ellipsoides ist.*)

Eine Zone, deren Begrenzungsebenen parallel xy in den Entfernungen z_0 und $z_1 > z_0$ liegen kann als Differenz zweier Zonen der vorigen Art betrachtet werden; ihr Volumen ist daher

10) $$\pi \frac{ab}{c^2} [c^2(z_1 - z_0) + \tfrac{1}{3} (z_1^3 - z_0^3)].$$

Das getheilte Hyperboloid. Dieselben Bezeichnungen wie in §. 39 vorausgesetzt, ist ein in der Höhe $h > c$ parallel zur xy-Ebene gelegter Querschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c} \sqrt{h^2 - c^2}, \qquad \frac{b}{c} \sqrt{h^2 - c^2}$$

mithin der Flächeninhalt des Schnittes

$$= \pi \frac{ab}{c^2} (h^2 - c^2).$$

Nennen wir h' den Abstand des Schnittes vom nächsten Scheitel des Hyperboloides, so ist $h = c + h'$ folglich die Querschnittsfläche

$$= \pi \frac{ab}{c^2} (2ch' + h'^2).$$

Um das Volumen V einer Kappe zu finden, welche durch eine in der Höhe $z > c$ parallel zu xy gelegte Ebene abgeschnitten wird, setzen wir die Höhe der Kappe

$$z - c = z' \text{ also } z = c + z',$$

---

*) Gelegentlich möge hier folgende Vergleichung Platz finden. Construirt man aus a, b, c ein Hyperboloid, dessen Zone von der Höhe c das Volumen H besitzt, einen Cylinder C, ein halbes Ellipsoid E und einen Kegel K (Asymptotenkegel von H), so hat man

$$K = \tfrac{1}{3} \pi abc, \quad E = \tfrac{2}{3} \pi abc, \quad C = \pi abc, \quad H = \tfrac{4}{3} \pi abc,$$

folglich

$$K : E : C : H = 1 : 2 : 3 : 4,$$

und dies ist die Erweiterung des Archimedischen Satzes von Kegel, Kugel und Cylinder.

theilen z' in n gleiche Strecken und legen durch jeden Theilpunkt eine Ebene parallel xy, wir erhalten auf diese Weise n Schichten, deren jede von zwei Ellipsenflächen begrenzt wird und die Höhe $\frac{z'}{n}$ besitzt. Die untere Begrenzungsebene ist jedesmal die kleinere und da das Hyperboloid sich nach oben zu allseitig erweitert, so beträgt das Volumen einer Schicht mehr als das Volumen des eingeschriebenen elliptischen Cylinders, welcher die untere Begrenzungsebene zur Basis hat, und weniger als das Volumen des umschriebenen Cylinders, dessen Querschnitt die obere Begrenzungsebene ist. Demgemäss gelten folgende Relationen

$$V > \pi\frac{ab}{c^2}[0]\frac{z'}{n} + \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{z'}{n} + \left(\frac{z'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n} + \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{2z'}{n} + \left(\frac{2z'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n} + \cdot$$
$$\cdots + \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{(n-1)z'}{n} + \left(\frac{(n-1)z'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n},$$

$$V < \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{z'}{n} + \left(\frac{z'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n} + \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{2z'}{n} + \left(\frac{2z'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n} + \cdots$$
$$\cdots + \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{nz'}{n} + \left(\frac{nz'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n};$$

die Differenz beider Cylindersummen beträgt

$$\pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{z'}{n} + \left(\frac{nz'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n} = \pi\frac{ab}{c^2}\frac{2cz' + z'^2}{n}$$

und da dieser Ausdruck bei unendlich wachsenden n der Grenze Null zueilt, so haben die beiden obigen Cylindersummen eine gemeinschaftliche Grenze $= V$. Bleiben wir bei der ersten Summe stehen, so ist

$V =$ dem Grenzwerthe von:

$$\pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{1+2+\ldots+(n-1)}{n}z' + \frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}z'^2\right]z'$$

und zwar nach bekannten Sätzen

$$11)\qquad V = \pi\frac{ab}{c^2}(cz'^2 + \tfrac{1}{3}z'^3),$$

oder bei Restitution des Werthes von z'

$$12)\qquad V = \pi\frac{ab}{c^2}(\tfrac{2}{3}c^3 - c^2z + \tfrac{1}{3}z^3).$$

Der Specialwerth $z = 2c$ oder $z' = c$ giebt $V = \frac{4}{3}\pi abc$ und hierin liegt der bemerkenswerthe Satz, dass das Volumen der

Kappe von der Höhe c mit dem Volumen der Zone übereinkommt, welche in dem einfachen Hyperboloide, von der Kehlellipse ab gerechnet, die nämliche Höhe besitzt.

Eine Zone, deren Begrenzungsebenen parallel zur xy-Ebene in den Entfernungen z_0 und $z_1 > z_0 > c$ liegen, kann als Differenz zweier Kappen betrachtet werden, und hat demnach das Volumen

$$13)\qquad \pi\frac{ab}{c^2}[-c^2(z_1-z_0)+\tfrac{1}{3}(z_1^3-z_0^3)].$$

Aus dem Vergleiche mit der zwischen denselben Ebenen enthaltenen Zone des einfachen Hyperboloides folgt, dass die Differenz beider Zonen (ein ringförmiger Körper) einem elliptischen Cylinder gleich ist, welcher die Kehlellipse des einfachen Hyperboloides zur Basis und die doppelte Höhe der einen Zone zur Höhe hat.

Das elliptische Paraboloid. Der in der Höhe h parallel zur xy-Ebene gelegte elliptische Querschnitt besitzt nach §. 40 die Halbachsen $\sqrt{2ah}$ und $\sqrt{2bh}$ mithin den Flächeninhalt

$$2\pi\sqrt{ab}\,h;$$

handelt es sich um das Volumen V einer Kappe von der Höhe z, so theilt man z wieder in n gleiche Strecken, legt durch jeden Theilpunkt eine Ebene parallel xy und zerfällt somit die Kappe in n Schichten, deren jede von zwei Ellipsenflächen begrenzt wird und die Höhe $\frac{z}{n}$ besitzt. Zufolge des Umstandes, dass sich das Paraboloid nach oben zu allseitig erweitert, ist jede solche Schicht grösser als der eingeschriebene und kleiner als der umschriebene elliptische Cylinder mithin

$$V > 2\pi\sqrt{ab}\,0\frac{z}{n} + 2\pi\sqrt{ab}\frac{z}{n}\frac{z}{n} + 2\pi\sqrt{ab}\frac{2z}{n}\frac{z}{n} + \dots$$
$$\dots + 2\pi\sqrt{ab}\frac{(n-1)z}{n}\frac{z}{n},$$
$$V < 2\pi\sqrt{ab}\frac{z}{n}\frac{z}{n} + 2\pi\sqrt{ab}\frac{2z}{n}\frac{z}{n} + 2\pi\sqrt{ab}\frac{3z}{n}\frac{z}{n} + \dots$$
$$\dots + 2\pi\sqrt{ab}\frac{nz}{n}\frac{z}{n}.$$

Die Differenz beider Cylindersummen beträgt

$$2\pi\sqrt{ab}\frac{nz}{n}\frac{z}{n} = 2\pi\sqrt{ab}\frac{z^2}{n}$$

und hat für unendlich wachsende n die Null zur Grenze; beide

Cylindersummen nähern sich daher einer gemeinschaftlichen Grenze $= V$, d. h. es ist, wenn wir die erste Summe betrachten,

$V =$ dem Grenzwerthe von:

$$2\pi\sqrt{ab}\,\frac{1+2+3+\ldots\ldots+(n-1)}{n^2}\,z^2$$

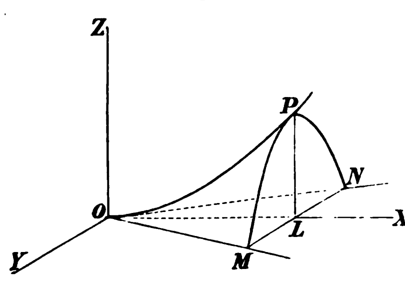
oder

$$14)\qquad V = \pi\sqrt{ab}\,z^2.$$

Der Inhalt einer Zone, deren Begrenzungsebenen parallel zur xy-Ebene in den Entfernungen z_0 und $z_1 > z_0$ liegen, ergiebt sich hieraus

$$15)\qquad = \pi\sqrt{ab}(z_1^2 - z_0^2).$$

Fig. 46.



Das hyperbolische Paraboloid. Um einen quadrirbaren Querschnitt der Fläche zu erhalten legen wir in der Entfernung $OL = l$ eine Ebene parallel zur yz-Ebene durch das Paraboloid; der entstehende Verticalschnitt ist eine durch die Gleichung

$$\frac{l^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$$

charakterisirte Parabel MPN. Sie schneidet die xy-Ebene in zwei Punkten M und N, für welche $z = 0$ und $y = LM$ oder $= LN$ ist; dies giebt

$$LM = +l\sqrt{\frac{b}{a}}, \qquad LN = -l\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Diese Parabel begegnet ferner der xz-Ebene in einem Punkte P (ihrem Scheitel), dessen $y = 0$ und dessen $z = LP$ ist, woraus folgt

$$LP = \frac{1}{2}\frac{l^2}{a}.$$

Der bekannte Satz des Archimedes lehrt nun den Flächeninhalt des Querschnittes kennen, nämlich $MPN = \frac{4}{3}\,LM\,.\,LP$, d. i. vermöge der angegebenen Werthe,

$$\frac{2}{3}\frac{l^3}{a}\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\,l^3.$$

Nach dieser Vorbereitung schreiten wir zur Inhaltsbestimmung des körperlichen Raumes V, welcher von der xy-Ebene, von einem in der Entfernung x parallel zur yz-Ebene gelegten Querschnitte und im Uebrigen von dem hyperbolischen Paraboloide begrenzt wird. Zu diesem Zwecke theilen wir x in n gleiche Strecken, legen durch jeden Theilpunkt eine Ebene parallel yz und zerfällen somit das Volumen in n Schichten, deren jede von zwei parabolischen Querschnitten begrenzt wird und $\frac{x}{n}$ zur Dicke hat. Da sich die Fläche in der Richtung der x allseitig erweitert, so beträgt das Volumen einer solchen Schicht mehr als das Volumen des eingeschriebenen und weniger als das Volumen des umschriebenen parabolischen Cylinders; diese Bemerkung führt zu den Relationen

$$V > \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\,0\,\frac{x}{n} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{x}{n}\right)^3\frac{x}{n} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{2x}{n}\right)^3\frac{x}{n} + \dots$$
$$\dots + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^3\frac{x}{n},$$
$$V < \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{x}{n}\right)^3\frac{x}{n} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{2x}{n}\right)^3\frac{x}{n} + \dots$$
$$\dots + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{nx}{n}\right)^3\frac{x}{n}.$$

Der Unterschied beider Cylindersummen ist

$$\frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{nx}{n}\right)^3\frac{x}{n} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\frac{x^4}{n}$$

und hat für unendlich wachsende n die Null zur Grenze. Beide Cylindersummen besitzen demnach eine gemeinschaftliche Grenze $= V$ und zwar ist, wenn wir nur die erste Summe beibehalten,

$V =$ dem Grenzwerthe von:

$$\frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3}{n^4}x^4$$

oder nach einem bekannten Satze

$$16)^{*)} \qquad V = \frac{1}{6}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}x^4.$$

---

*) Die obige Formel gewinnt einen geometrisch leicht fassbaren Sinn, wenn man sie in folgende umsetzt:

$$V = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}x^3 \,.\, x$$

Für das Volumen einer Zone, welche von zwei in den Entfernungen x_0 und $x_1 > x_0$ parallel zur yz-Ebene gelegten Querschnitten, von der xy-Ebene und ausserdem von der Fläche begrenzt wird, ergiebt sich hiernach

$$17) \qquad \frac{1}{6}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}(x_1^4 - x_0^4).$$

Besteht dagegen die Begrenzung der Zone aus zwei in den Entfernungen y_0 und $y_1 > y_0$ parallel zur xz-Ebene gelegten Querschnitten und im Uebrigen wieder aus der xy-Ebene und dem hyperbolischen Paraboloid, so stellt der Ausdruck

$$18) \qquad \frac{1}{6}\frac{\sqrt{ab}}{b^2}(y_1^4 - y_0^4)$$

das Volumen jener Zone dar.

---

und sich an die vorige Bestimmung des Querschnittes MPN erinnert; man kann nämlich sagen: der Abschnitt V ist der vierte Theil des umschriebenen (parabolischen) Cylinders. Dieser Satz darf als das stereometrische Correlat des Archimedischen Satzes von der Parabel gelten.

Neuntes Capitel.

Flächen verschiedener Gattung.

---

§. 46.

Erzeugung der Flächen durch Curven.

Nach Analogie der in den §§. 34, 35 und 36 vollständig mitgetheilten Discussion der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiten Grades wäre wohl eine Untersuchung über die möglichen verschiedenen Flächen dritten Grades denkbar, doch ist dieselbe wegen ihrer ausserordentlichen Weitläufigkeit bis jetzt noch nicht unternommen worden; dasselbe gilt in noch weiterem Maasse für die Flächen vierten oder höheren Grades, und man hat sich deshalb über den zweiten Grad hinaus auf die Betrachtung einzelner Flächen beschränkt, welche entweder durch besondere geometrische Eigenschaften oder durch ihr Vorkommen bei physikalischen Fragen die Aufmerksamkeit auf sich zogen. Hierin liegt der Grund, warum wir bei der nachfolgenden Besprechung von Flächen verschiedener Gattung nicht mehr von deren Gleichungen ausgehen, sondern umgekehrt aus der Entstehungsweise jeder einzelnen Fläche ihre Gleichung ableiten.

Wir erinnern zunächst an den Umstand, dass jede der vier ersten Flächen zweiten Grades durch eine bewegliche Ellipse, und das hyperbolische Paraboloid durch eine veränderliche Hyperbel beschrieben werden kann, wenn die betreffende Curve parallel einer Ebene (xy) fortbewegt wird und gleichzeitig ihre Scheitel auf zwei gegebenen Linien bleiben; allgemeiner aufgefasst liegt hierin ein Mittel zur Erzeugung beliebiger Flächen. Bewegt sich nämlich eine ihrer Natur nach bestimmte ebene Curve s so,

dass sie einer festen Ebene parallel bleibt und ausserdem zwei gegebene Linien s_1 und s_2 schneidet, so beschreibt s im Allgemeinen eine Fläche, deren Gleichung sich aus den vorigen Bedingungen herleiten lässt. Wir wollen einige Fälle der Art betrachten.

1. **Elliptische Paraboloide.** Wir denken uns drei auf einander senkrechte Ebenen und in zweien derselben beliebige parabolische Curven construirt; lassen wir nun eine veränderliche Ellipse sich so bewegen, dass ihre Ebene der dritten von jenen Ebenen parallel bleibt und zugleich ihre Scheitel auf den gegebenen Parabeln fortrücken, so beschreibt die Peripherie der Ellipse eine Fläche, die im Allgemeinen ein elliptisches Paraboloid heissen mag. Zu ihrer Gleichung gelangt man auf folgende Weise.

Die beiden ersten Ebenen wählen wir zu Coordinatenebenen der xz und yz, und denken uns die beiden Parabeln durch die beiden allgemeinen Gleichungen

1) $$x'' = \varphi(z), \qquad y''' = \psi(z)$$

Fig. 47.

bestimmt, wobei in Beziehung auf die Figur $NU = x''$, $NV = y'''$ und $ON = z$ ist. Für jeden auf der Ellipse UPV, also auch auf der Fläche liegenden Punkt P, dessen Coordinaten x, y, z heissen mögen, gilt weiter die Ellipsengleichung

2) $$\left(\frac{x}{x''}\right)^2 + \left(\frac{y}{y'''}\right)^2 = 1,$$

und hier bedarf es nur der Substitution von x'' und y''' aus Nr. 1), um sofort

3) $$\left(\frac{x}{\varphi(z)}\right)^2 + \left(\frac{y}{\psi(z)}\right)^2 = 1$$

als Gleichung der Fläche zu erhalten.

So hat man z. B., wenn die beiden Leitcurven semicubische Parabeln und durch die Gleichungen

$$x'' = \sqrt{\frac{z^3}{a}}, \qquad y''' = \sqrt{\frac{z^3}{b}}$$

bestimmt sind, als Gleichung der Fläche:

4) $$ax^2 + by^2 = z^3;$$

letztere ist demnach ein elliptisches Paraboloid dritten Grades. Die Gestalt desselben erkennt man leicht aus seiner Entstehungsweise; die Fläche erweitert sich allseitig in der Richtung der po-

sitiven z, läuft für $z = 0$ in eine Spitze aus und hört bei negativen z zu existiren auf. Die zur xy-Ebene nicht parallelen Schnitte sind Curven des dritten Grades. Was die berührende Ebene in einem Punkte der Fläche betrifft, so ist diese nach dem in §. 44, β, angegebenen Verfahren leicht zu bestimmen. Für eine Ebene, welche mit der Fläche die Punkte $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_0 z_1$, $x_0 y_2 z_2$ gemein hat, gilt nämlich die Gleichung

$$\frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0}(\xi - x_0) + \frac{z_2 - z_0}{y_2 - y_0}(\eta - y_0) - (\zeta - z_0) = 0$$

und zwar ist dabei

$$a x_0^2 + b y_0^2 = z_0^3,$$
$$a x_1^2 + b y_0^2 = z_1^3,$$
$$a x_0^2 + b y_2^2 = z_2^3.$$

Die Subtraction der ersten von der zweiten Gleichung giebt

$$a(x_1 + x_0)(x_1 - x_0) = (z_1^2 + z_1 z_0 + z_0^2)(z_1 - z_0)$$

woraus

$$\frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0} = \frac{a(x_1 + x_0)}{z_1^2 + z_1 z_0 + z_0^2};$$

auf analoge Weise folgt aus der Verbindung der ersten mit der dritten Gleichung

$$\frac{z_2 - z_0}{y_2 - y_0} = \frac{b(y_2 + y_0)}{z_2^2 + z_2 z_0 + z_0^2};$$

substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung der Schnittebene und lässt nachher die Punkte $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_0 z_1$, $x_0 y_2 z_2$ zusammenfallen, so erhält man als Gleichung der berührenden Ebene:

$$\frac{2 a x_0}{3 z_0^2}(\xi - x_0) + \frac{2 b y_0}{3 z_0^2}(\eta - y_0) - (\zeta - z_0) = 0$$

oder

$$2 a x_0 \xi + 2 b y_0 \eta - 3 z_0^2 \zeta$$
$$= -3 z_0^3 + 2(a x_0^2 + b y_0^2) = -z_0^3.$$

Bei Weglassung der nicht mehr nöthigen Indices ist

$$-\frac{2ax}{z^3}\xi - \frac{2by}{z^3}\eta + \frac{3}{z}\zeta = 1,$$

und man erkennt hieraus, dass die durch den Punkt xyz gehende Tangentialebene von den Coordinatenachsen die Strecken

$$-\frac{z^3}{2ax} = -\frac{1}{2}\frac{x''^2}{x}, \qquad -\frac{z^3}{2by} = -\frac{1}{2}\frac{y'''^2}{y}, \qquad +\frac{1}{3}z$$

abschneidet, deren Construction sehr einfach sein würde.

Auch die Cubatur einer Kappe oder Zone unserer Fläche unterliegt keiner Schwierigkeit. Ein in der Höhe h parallel zur xy-Ebene geführter Querschnitt ist eine Ellipse und deren Fläche

$$= \pi \sqrt{\frac{h^3}{a}} \cdot \sqrt{\frac{h^3}{b}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} h^3;$$

denken wir uns derartige Schnitte in den Höhen 0, $\frac{z}{n}$, $\frac{2z}{n}$, ... $\frac{(n-1)z}{n}$, $\frac{nz}{n}$ gelegt, so zerfällt die Kappe von der Höhe z in n Schichten, deren jede die Höhe $\frac{z}{n}$ besitzt und grösser als der eingeschriebene, dagegen kleiner als der umschriebene elliptische Cylinder ist. Für das Volumen V der Kappe gelten demzufolge die Ungleichungen

$$V > \frac{\pi}{\sqrt{ab}} 0 \frac{z}{n} + \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \left(\frac{z}{n}\right)^3 \frac{z}{n} + \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \left(\frac{2z}{n}\right)^3 \frac{z}{n} + \dots$$
$$\dots + \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \left(\frac{(n-1)z}{n}\right)^3 \frac{z}{n},$$
$$V < \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \left(\frac{z}{n}\right)^3 \frac{z}{n} + \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \left(\frac{2z}{n}\right)^3 \frac{z}{n} + \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \left(\frac{3z}{n}\right)^3 \frac{z}{n} + \dots$$
$$\dots + \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \left(\frac{nz}{n}\right)^3 \frac{z}{n};$$

die Differenz der beiden Cylindersummen ist

$$\frac{\pi}{\sqrt{ab}} \frac{z^4}{n}$$

und nähert sich für unendlich wachsende n der Grenze Null, woraus folgt, dass die obigen Cylindersummen einer und derselben Grenze zustreben, welche V selber sein muss. Demnach ist, wenn wir bei der ersten Summe bleiben,

$$V = \text{dem Grenzwerthe von:}$$
$$\frac{\pi}{\sqrt{ab}} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3}{n^4} z^4$$

d. h. nach einem bekannten arithmetischen Satze

$$V = \tfrac{1}{4} \pi \frac{z^4}{\sqrt{ab}}.$$

Hieraus ergiebt sich das Volumen einer Zone, deren Begrenzungsebenen parallel zur xy-Ebene liegen, indem man dasselbe als Differenz der Volumina zweier Kappen betrachtet.

Nach dem Vorigen kann man leicht elliptische Paraboloide beliebiger Grade construiren; wählt man z. B. als Leitcurven zwei gewöhnliche Parabeln, deren Achsen die x- und die y-Achse sind und welche den Coordinatenanfang zum gemeinschaftlichen Scheitel haben, so treten an die Stelle der Gleichungen 1) die folgenden

$$x'' = \frac{z^2}{a}, \qquad y''' = \frac{z^2}{b},$$

und hieraus ergiebt sich als Gleichung der Fläche

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = z^4;$$

letztere ist demnach ein elliptisches Paraboloid vierten Grades, welches für $b = a$ in das auf Seite 128 erwähnte Rotationsparaboloid übergeht. Als Gleichung der Berührungsebene findet man nach dem allgemeinen Verfahren

$$\frac{a^2 x_0}{2 z_0^3}(\xi - x_0) + \frac{b^2 y_0}{2 z_0^3}(\eta - y_0) - (\zeta - z_0) = 0$$

oder bei Weglassung der Indices und weiterer Zusammenziehung

$$-\frac{a^2 x}{z^4}\xi - \frac{b^2 y}{z^4}\eta + \frac{2}{z}\zeta = 1;$$

die Tangentialebene im Punkte xyz schneidet demnach auf den Coordinatenachsen die Strecken ab

$$-\frac{z^4}{a^2 x} = -\frac{x''^2}{x}, \qquad -\frac{z^4}{b^2 y} = -\frac{y'''^2}{y}, \qquad +\tfrac{1}{2} z,$$

deren Construction sehr leicht sein würde. — Für das Volumen V einer Kappe von der Höhe z ergiebt sich nach der allgemeinen Methode

$$V = \tfrac{1}{5}\pi \frac{z^5}{ab},$$

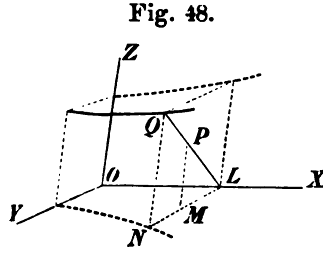
woraus das Volumen einer Zone wie vorhin hergeleitet werden kann.

Die mitgetheilten Betrachtungen lassen noch insofern manche Verallgemeinerung zu, als man die parabolischen Leitlinien durch beliebige andere Curven ersetzen und statt der beweglichen Ellipse irgend eine Curve nehmen kann, deren Natur durch die beiden Strecken $NU = x''$ und $NV = y'''$ bestimmt ist.

2. Keilflächen. Eine veränderliche Gerade möge sich so bewegen, dass sie einer festen Ebene parallel bleibt und ausserdem sowohl eine gegebene Gerade, als eine sonst noch gegebene feste Curve schneidet; die bewegliche Gerade beschreibt in diesem Falle eine Fläche, die längs der festen Geraden in eine Schneide

ausläuft und daher nicht unpassend als eine Keilfläche bezeichnet werden kann. Um ihre Gleichung in möglichst einfacher Form zu erhalten, nehmen wir die feste Gerade zur x-Achse und die feste Ebene zur yz-Ebene; bezeichnen jetzt x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes P der beweglichen Geraden und $x' y' z'$ die Coordinaten ihres Durchschnittes Q mit der Curve, so können, der ersten Bedingung zufolge, die Gleichungen der beweglichen Geraden durch

Fig. 48.



$$x = x', \qquad z = \frac{z'}{y'} y$$

dargestellt werden. Ferner gelten für den Punkt $x' y' z'$ die Gleichungen der gegebenen Curve etwa

$$5) \qquad y' = \varphi(x'), \qquad z' = \psi(x'),$$

und nun ergiebt sich aus den vier aufgestellten Gleichungen durch Elimination von x', y', z'

$$6) \qquad z = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} y$$

als Gleichung der beschriebenen Fläche.

Ist z. B. die Leitcurve eine Gerade, mithin

$$y' = Bx' + b, \qquad z' = Cx' + c,$$

so lautet die Gleichung der erzeugten Fläche

$$z = \frac{Cx + c}{Bx + b} y$$

oder

$$Cxy - Bxz + cy - bz = 0;$$

letztere ist demnach ein hyperbolisches Paraboloid, wie schon in §. 43 Aufgabe 7 gefunden wurde.

Wenn die feste Gerade senkrecht auf der festen Ebene steht und die Leitcurve eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt auf der z-Achse und deren Ebene parallel zur xy-Ebene liegt, so gelten für y' und z' die Gleichungen

$$y' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x'^2}, \qquad z' = c$$

und daraus ergiebt sich als Gleichung der elliptischen Keilfläche

$$z = \frac{acy}{b\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Die horizontalen Schnitte derselben sind Ellipsen, denn für $z = h$ erhält man

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{bh}{c}}\right)^2 = 1;$$

alle sonstigen zur yz-Ebene nicht parallelen Schnitte geben Curven vierten Grades.

Die durch den Punkt xyz gehende Berührungsebene bestimmt sich wie früher auf die Weise, dass man durch die Punkte xyz, x_1yz_1, xy_2z_2 zunächst eine Schnittebene legt und nachher diese Punkte zusammenfallen lässt. Die Gleichung der genannten Ebene ist

$$\frac{z_1 - z}{x_1 - x}(\xi - x) + \frac{z_2 - z}{y_2 - y}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0$$

und vermöge der Gleichung der Fläche

$$\frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{acy\left(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x_1^2}\right)}{b\sqrt{a^2 - x_1^2}\sqrt{a^2 - x^2}\,(x_1 - x)},$$

$$\frac{z_2 - z}{y_2 - y} = \frac{ac}{b\sqrt{a^2 - x^2}};$$

der erste Quotient rechter Hand bedarf noch einer Transformation und zwar besteht dieselbe darin, dass man Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x_1^2}$$

multiplicirt, wodurch der Zähler rational $= x_1^2 - x^2 = (x_1 + x)(x_1 - x)$ wird. Nach Hebung des letzten Factors bleibt

$$\frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{acy}{b\sqrt{(a^2 - x_1^2)(a^2 - x^2)}\left[\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x_1^2}\right]};$$

setzt man diese Werthe in die Gleichung der Schnittebene ein und lässt dann die Punkte xyz, x_1yz_1, xy_2z_2 zusammenfallen, so bleibt als Gleichung der Tangentialebene:

$$\frac{ac\,xy}{b\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}(\xi - x) + \frac{ac}{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0,$$

oder, wenn $\sqrt{a^2 - x^2}$ durch z ausgedrückt und das Gleichartige vereinigt wird,

$$\frac{1}{x}\xi + \frac{a^2c^2y}{b^2x^2z^2}\eta - \frac{a^2c^2y^2}{b^2x^2z^3}\zeta = 1.$$

Um das Volumen einer Kappe von der Höhe z zu ermitteln, benutzen wir wieder die Methode der ein- und umschriebenen Cylinder; letztere sind elliptische Cylinder, weil der in der Höhe h

parallel zur xy-Ebene gelegte Querschnitt eine aus den Halbachsen a und $\frac{bh}{c}$ construirte Ellipse ist, deren Fläche $\pi\frac{abh}{c}$ beträgt. Hiernach überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Ungleichungen

$$V > \pi\frac{ab}{c}0\frac{z}{n} + \pi\frac{ab}{c}\frac{z}{n}\frac{z}{n} + \pi\frac{ab}{c}\frac{2z}{n}\frac{z}{n} + \dots$$

$$\dots + \pi\frac{ab}{c}\frac{(n-1)z}{n}\frac{z}{n},$$

$$V < \pi\frac{ab}{c}\frac{z}{n}\frac{z}{n} + \pi\frac{ab}{c}\frac{2z}{n}\frac{z}{n} + \pi\frac{ab}{c}\frac{3z}{n}\frac{z}{n} + \dots$$

$$\dots + \pi\frac{ab}{c}\frac{nz}{n}\frac{z}{n};$$

man zieht daraus

$$V = \text{dem Grenzwerthe von:}$$

$$\pi\frac{ab}{c}\frac{1+2+3+\dots+(n-1)}{n^2}z^2$$

und durch Ausführung des Grenzenüberganges

$$V = \tfrac{1}{2}\pi\frac{ab}{c}z^2.$$

Das Volumen einer Zone des elliptischen Keiles ist hiernach leicht zu finden.

§. 47.

Fusspunkteflächen.

Denkt man sich durch einen beliebigen Punkt P einer gegebenen Fläche an diese eine Berührungsebene gelegt und auf letztere von einem festen Punkte C eine Senkrechte herabgelassen, deren Fusspunkt Q heissen möge, so entspricht jedem Punkte P ein neuer Punkt Q im Raume, und wenn P die gegebene Fläche durchläuft, so wird auch der Punkt Q eine gewisse Fläche beschreiben, welche man die entsprechende Fusspunktenfläche nennen kann. Nicht ohne Interesse sind die aus den Flächen zweiten Grades abgeleiteten Fusspunktenflächen, deren Betrachtung uns im Folgenden beschäftigen wird.

Die centralen Flächen zweiten Grades lassen sich, wenn die Hauptachsen zu Coordinatenachsen genommen werden, durch die allgemeine Gleichung

$$1)\qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$$

ausdrücken, und die Gleichung der Berührungsebene im Punkte xyz ist dann

$$Ax\xi + By\eta + Cz\zeta = D.$$

Eine Senkrechte vom Mittelpunkte der Fläche (dem Coordinatenanfange) auf die Tangentialebene schneidet letztere in einem Punkte, dessen Coordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 nach §. 19 Nr. 21 gefunden werden; sie sind

$$2)\quad \begin{cases} \xi_0 = \dfrac{ADx}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}, \\ \eta_0 = \dfrac{BDy}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}, \\ \zeta_0 = \dfrac{CDz}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}. \end{cases}$$

Die Gleichung der Fusspunktenfläche darf ausser ξ_0, η_0, ζ_0 nur noch die bekannten Grössen A, B, C, D enthalten und ist folglich durch Elimination von x, y, z aus den Gleichungen 1) und 2) zu entwickeln. Aus Nr. 2) findet man einerseits:

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = \frac{D^2}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2},$$

andererseits bei Rücksicht auf die Gleichung 1)

$$D\left(\frac{\xi_0^2}{A} + \frac{\eta_0^2}{B} + \frac{\zeta_0^2}{C}\right) = \frac{D^4}{(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2)^2},$$

die rechte Seite dieser Gleichung ist das Quadrat von der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung, mithin

$$(\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2)^2 = D\left(\frac{\xi_0^2}{A} + \frac{\eta_0^2}{B} + \frac{\zeta_0^2}{C}\right)$$

oder, wenn man x, y, z für ξ_0, η_0, ζ_0 schreibt,

$$3)\quad \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{D} = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}.$$

Demnach ist für die Fusspunktenfläche des dreiachsigen Ellipsoides:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2,$$

des einfachen Hyperboloides:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2,$$

und des getheilten Hyperboloides:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = -a^2x^2 - b^2y^2 + c^2z^2.$$

Diese drei Flächen besitzen gemeinschaftlich eine bemerkenswerthe Eigenschaft; schneidet man nämlich die Fläche 3) durch eine concentrische Kugelfläche mit dem Halbmesser r, so gilt für alle

Punkte der Durchschnittslinie ausser der Gleichung 3) noch die folgende

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

oder

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = r^2 (x^2 + y^2 + z^2),$$

deren Substitution in Nr. 3) giebt

$$\frac{r^2 (x^2 + y^2 + z^2)}{D} = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}$$

oder

$$\left(\frac{r^2}{D} - \frac{1}{C}\right) z^2 = \left(\frac{1}{A} - \frac{r^2}{D}\right) x^2 + \left(\frac{1}{B} - \frac{r^2}{D}\right) y^2.$$

Diese Gleichung repräsentirt einen elliptischen Kegel, die Schnittcurve ist also ein sphärischer Kegelschnitt.

Die nichtcentralen Flächen zweiten Grades können durch die allgemeine Gleichung

$$4) \qquad Ax^2 + By^2 = 2z$$

ausgedrückt werden, derzufolge die Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz ist:

$$Ax\xi + By\eta - \zeta = z.$$

Eine Senkrechte vom Scheitel der Fläche (dem Coordinatenanfange) auf die Berührungsebene schneidet letztere in einem Punkte $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$, dessen Coordinaten sind:

$$5) \qquad \begin{cases} \xi_0 = \dfrac{Axz}{A^2x^2 + B^2y^2 + 1}, \\ \eta_0 = \dfrac{Byz}{A^2x^2 + B^2y^2 + 1}, \\ \zeta_0 = \dfrac{-z}{A^2x^2 + B^2y^2 + 1}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt erstens

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = \frac{z^2}{A^2x^2 + B^2y^2 + 1},$$

ferner unter Rücksicht auf Nr. 4)

$$\frac{\xi_0^2}{A} + \frac{\eta_0^2}{B} = \frac{2z^3}{(A^2x^2 + B^2y^2 + 1)^2};$$

multiplicirt man das erste Ergebniss mit $2\zeta_0$ und vereinigt es mit dem zweiten, so erhält man als Gleichung der Fusspunktenfläche

$$2(\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2)\zeta_0 + \frac{\xi_0^2}{A} + \frac{\eta_0^2}{B} = 0,$$

oder, wenn $x, y, -z$ für ξ_0, η_0, ζ_0 geschrieben wird,

$$6)\qquad (x^2+y^2+z^2)\,z=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}\right).$$

Hiernach ist für die Fusspunktenfläche des elliptischen Paraboloides:

$$(x^2+y^2+z^2)\,z=\tfrac{1}{2}\,(a\,x^2+b\,y^2),$$

und des hyperbolischen Paraboloides:

$$(x^2+y^2+z^2)\,z=\tfrac{1}{2}\,(a\,x^2-b\,y^2).$$

Die auf der z-Achse senkrechten (horizontalen) Querschnitte der ersten Fläche sind Ellipsen, die der zweiten Hyperbeln; jeder die z-Achse in sich enthaltende Schnitt ist die Fusspunktencurve einer Parabel (eine Cissoide). Schneidet man die erste Fusspunktenfläche durch eine aus dem Halbmesser r beschriebene Kugelfläche, so genügt jeder Punkt des Schnittes der Gleichung

$$r^2 z=\tfrac{1}{2}\,(a x^2+b y^2),$$

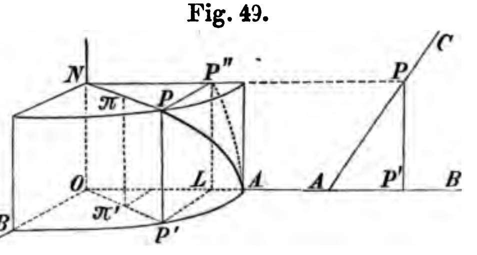
d. h. geometrisch, es lässt sich immer ein elliptisches Paraboloid angeben, welches mit der Kugel denselben Schnitt bildet wie jene Fusspunktenfläche; eine ähnliche Eigenschaft besitzt die Fusspunktenfläche des hyperbolischen Paraboloides.

§. 48.

Schraubenlinie und Schraubenfläche.

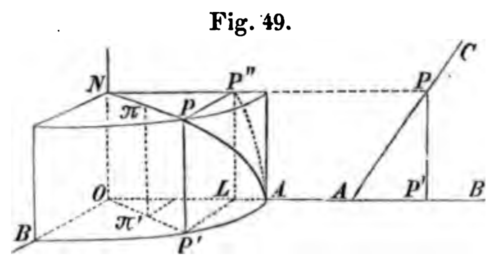
I. Wenn die Ebene eines gegebenen Winkels BAC dergestalt um einen geraden Kreiscylinder herumgewickelt wird, dass der eine Winkelschenkel AB mit einem normalen Querschnitte des Cylinders zusammenfällt, so beschreibt der andere Winkelschenkel AC auf der Cylinderfläche eine Curve, welche die Schraubenlinie genannt wird; der Halbmesser des Cylinders heisst ihr Radius, und der constante Winkel ihr Steigungswinkel.

Fig. 49.



Um die Schraubenlinie vollständig zu erhalten, muss man sich den gegebenen Winkel durch seinen Scheitelwinkel ergänzt und diesen gleichzeitig mit aufgewickelt denken; die Curve erstreckt sich daher sowohl auf- als abwärts von dem normalen Querschnitte ins Unendliche. Ferner ist zu berücksichtigen, dass jene Umwickelung auf zwei verschiedene Weisen — rechts herum und links

Fig. 49.



herum — geschehen kann, dass also aus den gegebenen Daten (Steigungswinkel und Radius) zwei symmetrisch gleiche Schraubenlinien construirbar sind, welche man durch die Benennungen rechtsgängige und linksgängige Schraubenlinie zu unterscheidan pflegt; die Figur zeigt einen Theil der letzteren, nebst deren Verticalprojection.

Um die Gleichungen der Schraubenlinie zu erhalten, nehmen wir die Cylinderachse zur z-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, dessen xy-Ebene mit der Ebene des genannten normalen Querschnittes zusammenfallen möge; den Punkt A, in welchem letztere von der Schraubenlinie getroffen wird, verbinden wir mit dem Mittelpunkte des Querschnittes durch eine Gerade, und wählen letztere zur Achse der x. Der Radius $OA = OB$ sei $= r$, der Steigungswinkel $BAC = \alpha$. Ist nun P ein beliebiger Punkt des Schenkels AC und P' seine Projection auf den Schenkel AB, so kommt bei der Aufwickelung P' so auf den normalen Querschnitt $AP'B$ zu liegen, dass der Bogen AP' gleich der vorherigen Geraden AP' wird; die Linie $P'P$ dagegen bleibt gerade und fällt auf eine der erzeugenden Geraden des Cylinders. Bezeichnen wir die drei Coordinaten des Punktes P der Schraubenlinie mit $OL = x$, $LP' = PP'' = y$, $P'P = LP'' = z$ und den Bogen AP' mit s, so ist

$$x = OP' \cos AOP' = r \cos \frac{s}{r},$$

$$y = OP' \sin AOP' = r \sin \frac{s}{r},$$

und in dem ebenen rechtwinkligen Dreiecke PAP'

$$PP' = AP' \,.\, \tan \alpha \text{ d. h. } z = s \tan \alpha;$$

der Werth von s, aus der letzten Gleichung in die vorhergehenden substituirt, giebt

$$x = r \cos \frac{z}{r \tan \alpha}, \qquad y = r \sin \frac{z}{r \tan \alpha}.$$

)ie Grösse $r \tan \alpha$ bedeutet geometrisch dasjenige z der Schrauben-
nie, welches für $s = r$ d. h. für $\angle AOP' = 57^0\,17'\,44''\,8$ zum Vor-
schein kommt; diese bestimmte und für jede gegebene Schrauben-
nie unveränderliche Grösse wollen wir den Parameter der Curve
ennen und mit c bezeichnen; es sind jetzt

$$1) \qquad x = r \cos \frac{z}{c}, \qquad y = r \sin \frac{z}{c}$$

ie Gleichungen der Verticalprojectionen der Schraubenlinie,
oraus sich noch

$$2) \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

ls Gleichung der Horizontalprojection findet. Für die Schrauben-
nie entgegengesetzter Drehung (rechtsgängig) ändert der Bogen s
ein Vorzeichen und die Gleichungen werden daher

$$3) \quad x = r \cos \frac{z}{c}, \qquad y = -r \sin \frac{z}{c}, \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

Nimmt man in den Gleichungen 1) erst $z = 0$ und nachher
$= \pi c$, so erhält man im ersten Falle $x = +r$, im zweiten
$= -r$; bei einem halben Umgange steigt also die Schrauben-
inie um πc, bei einem ganzen Umgange um $2\pi c$, letztere Grösse
flegt man daher die Höhe eines Schraubenganges zu nennen.

Die gerade Verbindungslinie zweier Punkte xyz und $x_1 y_1 z_1$
er betrachteten Curve kann durch folgende Gleichungen darge-
tellt werden

$$4) \quad \xi - x = \frac{x_1 - x}{z_1 - z}(\zeta - z), \qquad \eta - y = \frac{y_1 - y}{z_1 - z}(\zeta - z),$$

vobei die vorkommenden Quotienten kurz M und N heissen mögen;
a die genannten Punkte der Schraubenlinie angehören, so ist

$$x_1 - x = r\left(\cos \frac{z_1}{c} - \cos \frac{z}{c}\right)$$
$$= -2r \sin \frac{z_1 + z}{2c} \sin \frac{z_1 - z}{2c},$$
$$y_1 - y = r\left(\sin \frac{z_1}{c} - \sin \frac{z}{c}\right)$$
$$= -2r \cos \frac{z_1 + z}{2c} \sin \frac{z_1 - z}{2c},$$

voraus sich ergiebt

$$M = -\frac{r}{c} \sin \frac{z_1 + z}{2c} \frac{\sin \frac{z_1 - z}{2c}}{\frac{z_1 - z}{2c}},$$

$$N = +\frac{r}{c} \cos \frac{z_1 + z}{2c} \frac{\sin \frac{z_1 - z}{2c}}{\frac{z_1 - z}{2c}}.$$

Lassen wir den Punkt $x_1 y_1 z_1$ dem als fest gedachten Punkte xyz immer näher rücken, so dreht sich die Verbindungsgerade (Secante) um den ersten Punkt und nähert sich mehr und mehr der tangentialen Lage; letztere tritt in dem Grenzfalle $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$ ein und diesem entsprechen gewisse Grenzwerthe von M und N, welche sich aus dem bekannten Satze ergeben, dass der Quotient $\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$ bei verschwindenden ϑ in die Einheit übergeht. Jene Grenzwerthe sind demnach

$$-\frac{r}{c} \sin \frac{z}{c} = -\frac{y}{c} \text{ und } +\frac{r}{c} \cos \frac{z}{c} = +\frac{x}{c};$$

die Gleichungen 4) werden jetzt zu den folgenden

$$5) \quad \xi - x = -\frac{y}{c}(\zeta - z), \qquad \eta - y = +\frac{x}{c}(\zeta - c).$$

und bestimmen die im Punkte xyz an die Schraubenlinie gelegte Tangente. Aus den vorstehenden Gleichungen zieht man noch

$$x(\xi - x) + y(\eta - y) = 0$$

oder

$$x\xi + y\eta = x^2 + y^2 = r^2,$$

d. h. geometrisch die Horizontalprojection der Tangente berührt die kreisförmige Horizontalprojection der Curve, wie zu erwarten war. Die Tangentenconstruction ist hiernach sehr einfach; in der xy-Ebene legt man nämlich durch den Punkt P' eine Tangente an den mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreis, in der xz-Ebene zieht man durch den Punkt P'' eine Gerade, welche mit der x-Achse einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente $= -\frac{c}{y}$ ist; die erhaltenen Geraden sind die Horizontal- und die Verticalprojection der gesuchten Tangente.

Die im Berührungspunkte der letzteren senkrecht zu ihr gelegte Ebene heisst die Normalebene im Punkte xyz; aus den beiden genannten Bedingungen findet man leicht als deren Gleichung

$$-\frac{y}{c}(\xi - x) + \frac{x}{c}(\eta - y) + \zeta - z = 0$$

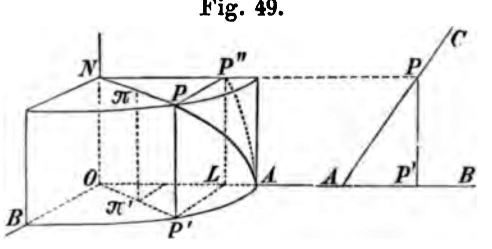
oder

$$6) \qquad -\frac{y}{cz}\xi + \frac{x}{cz}\eta + \frac{1}{z}\zeta = 1,$$

wonach auch die direkte Construction der Normalebene (oder ihrer Spuren) sehr leicht ist.

II. Lässt man eine Gerade sich so bewegen, dass sie an der Schraubenlinie hingleitet und zugleich die Achse der Schraubenlinie senkrecht schneidet, so beschreibt sie eine sogenannte Schraubenfläche; in der Figur ist NP die bewegliche Gerade in einer ihrer Lagen. Die Coordinaten eines beliebigen Punktes Π der beweglichen Geraden (also auch der Fläche) mögen ξ, η, ζ und x, y, z die Coordinaten des Punktes P heissen, in welchen sie die Schraubenlinie schneidet; die Gleichungen der veränderlichen Geraden sind in diesem Falle

Fig. 49.



$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x} \text{ und } \zeta = z,$$

setzt man die Werthe von x und y aus Nr. 1) ein, so ist

$$\frac{\eta}{\xi} = \tan\frac{z}{c} = \tan\frac{\zeta}{c}$$

die Gleichung der Schraubenfläche, wobei im Folgenden wieder x, y, z für ξ, η, ζ also

$$7) \qquad \frac{y}{x} = \tan\frac{z}{c}$$

geschrieben werden möge. Bei Zugrundelegung der rechtsgängigen Schraubenlinie ergiebt sich

$$\frac{y}{x} = -\tan\frac{z}{c}$$

als Gleichung der entsprechenden Schraubenfläche.

Eine Ebene, welche mit der Fläche die Punkte xyz, x_1yz_1 und xy_2z_2 gemein hat, wird repräsentirt durch die Gleichung

$$8) \quad \frac{z_1 - z}{x_1 - x}(\xi - x) + \frac{z_2 - z}{y_2 - y}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0,$$

wobei für jene Punkte die Bedingungen

$$\frac{y}{x} = \tan\frac{z}{c}, \qquad \frac{y}{x_1} = \tan\frac{z_1}{c}, \qquad \frac{y_2}{x} = \tan\frac{z_2}{c}$$

erfüllt sein müssen. Unter Benutzung der bekannten Formel

$$\tan u - \tan v = \frac{\sin(u-v)}{\cos u \cos v}$$

zieht man aus jenen Gleichungen, indem man die erste von der zweiten und von der dritten subtrahirt

$$-y\frac{x_1 - x}{x_1 x} = \frac{\sin\frac{z_1 - z}{c}}{\cos\frac{z_1}{c}\cos\frac{z}{c}},$$

$$\frac{y_2 - y}{x} = \frac{\sin\frac{z_2 - z}{c}}{\cos\frac{z_2}{c}\cos\frac{z}{c}},$$

dies giebt weiter

$$\frac{z_1 - z}{x_1 - x} = -\frac{cy}{x_1 x}\cos\frac{z_1}{c}\cos\frac{z}{c}\frac{\frac{z_1 - z}{c}}{\sin\frac{z_1 - z}{c}},$$

$$\frac{z_2 - z}{y_2 - y} = +\frac{c}{x}\cos\frac{z_2}{c}\cos\frac{z}{c}\frac{\frac{z_2 - z}{c}}{\sin\frac{z_2 - z}{c}}.$$

Lassen wir die Punkte xyz, $x_1 y z_1$ und $x y_2 z_2$ zusammenrücken, so geht die schneidende Ebene in die berührende Ebene über und die Quotienten $\frac{z_1 - z}{x_1 - x}$, $\frac{z_2 - z}{y_2 - y}$ erhalten gewisse Grenzwerthe, die sich aus dem Satze ergeben, dass der Quotient $\frac{\vartheta}{\sin\vartheta}$ für $\vartheta = 0$ zur Einheit wird. Die betreffenden Grenzwerthe sind

$$-\frac{cy}{x^2}\left(\cos\frac{z}{c}\right)^2 \text{ und } \frac{c}{x}\left(\cos\frac{z}{c}\right)^2$$

oder, wenn $\cos\frac{z}{c}$ durch $\tan\frac{z}{c} = \frac{y}{x}$ ausgedrückt wird,

$$-\frac{cy}{x^2 + y^2} \text{ und } + \frac{cx}{x^2 + y^2}.$$

Die Gleichung 8) wird jetzt

$$-\frac{cy}{x^2+y^2}(\xi-x)+\frac{cx}{x^2+y^2}(\eta-y)-(\zeta-z)=0$$

und nach gehöriger Zusammenziehung

$$9)\qquad \frac{cy}{(x^2+y^2)z}\xi-\frac{cx}{(x^2+y^2)z}\eta+\frac{1}{z}\zeta=1;$$

sie bestimmt die Tangentialebene im Punkte xyz. Letztere ist sehr leicht mittelst der Abschnitte zu construiren, welche sie auf den Achsen bildet.

Aus der Gleichung 9) findet man noch

$$10)\ \xi-x=\frac{cy}{x^2+y^2}(\zeta-z),\qquad \eta-y=-\frac{cx}{x^2+y^2}(\zeta-z)$$

als Gleichungen der im Punkte xyz auf der Schraubenfläche errichteten Normalen.

Zehntes Capitel.

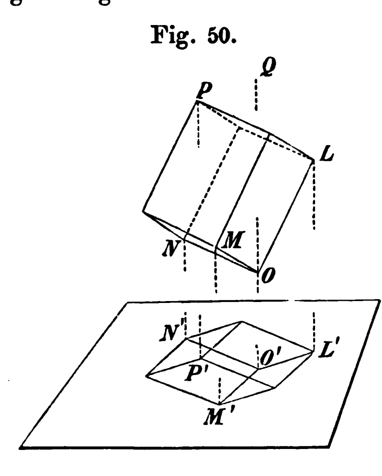
Analytische Projectionslehre.

§. 49.

Die axonometrische Projection.

Wenn es darauf ankommt, räumliche Gegenstände durch Zeichnung in einer Ebene graphisch darzustellen, so hat man bekanntlich eine doppelte Wahl, insofern dazu ebensowohl die Parallelprojection als die perspectivische Projection benutzt werden kann. Die Mittel zur Ausführung der Zeichnung selbst giebt die descriptive Geometrie, deren Kenntniss wir voraussetzen, sie lassen sich aber auch unabhängig von dieser entwickeln, wenn man die Aufgabe vom analytischen Gesichtspunkte aus ansieht, wie es im Folgenden geschehen soll.

Fig. 50.



Wir denken uns einen Punkt P auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen und durch die Coordinaten $OL = x$, $OM = y$, $ON = z$ gegeben; das ganze Liniensystem werde rechtwinklig auf eine bestimmte Ebene projicirt und es soll nun die gegenseitige Lage der Projectionen O', L', M', N', P' ermittelt werden. Da die orthogonalen Projectionen zweier parallelen Geraden wiederum parallel sind, so besteht die Projection des

rwähnten Liniensystemes aus zwölf Geraden (den Projectionen er zwölf Kanten des aus x, y, z construirten Parallelopipedes), on denen je vier parallel laufen, und es ist dieser Liniencomplex estimmt, wenn man die drei Geraden $O'L' = x'$, $O'M' = y'$, $'N' = z'$ und die von ihnen eingeschlossenen Winkel kennt.

Bezeichnen wir die Stellungswinkel der Projectionsebene mit

$$\angle LOQ = \alpha, \qquad \angle MOQ = \beta, \qquad \angle NOQ = \gamma,$$

ıd die Neigungswinkel der Achsen OL, OM, ON gegen die Proctionsebene mit λ, μ, ν, so ist zunächst

$$\lambda = 90^0 - \alpha, \qquad \mu = 90^0 - \beta, \qquad \nu = 90^0 - \gamma,$$

ithin, wenn diese Werthe in die Formel

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

bstituirt werden,

$$1) \quad \begin{cases} \sin^2 \lambda + \sin^2 \mu + \sin^2 \nu = 1, \\ \cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 2. \end{cases}$$

'as die Grössen von x', y', z' anbelangt, so hat man unmittelbar

$$2) \quad x' = x \cos \lambda, \qquad y' = y \cos \mu, \qquad z' = z \cos \nu;$$

ı die zwischen x', y' z' liegenden Winkel zu finden, bedarf es nur ır Erinnerung an den bekannten Satz, dass die Projection einer enen Fläche auf eine andere Ebene gleich der ersten Fläche, ıltiplicirt mit dem Cosinus des Winkels zwischen beiden Ebenen :. Wendet man ihn der Reihe nach auf die Dreiecke LOM, LON, ON und ihre Projectionen an indem man berücksichtigt, dass r Winkel zwischen zwei Ebenen gleich dem Winkel zwischen ren Normalen ist, so hat man als Projectionen jener Dreiecks-chen:

$$\tfrac{1}{2} xy \sin \nu, \qquad \tfrac{1}{2} xz \sin \mu, \qquad \tfrac{1}{2} yz \sin \lambda;$$

rch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ausgedrückt, ıd die nämlichen Flächen $L'O'M'$, $L'O'N'$, $M'O'N'$:

$$\tfrac{1}{2} x'y' \sin(x'y'), \qquad \tfrac{1}{2} x'z' \sin(x'z'), \qquad \tfrac{1}{2} y'z' \sin(y'z'),$$

d aus der Vergleichung der gleichnamigen Flächen folgen die ırmeln:

$$3) \quad \begin{cases} \sin(x'y') = \dfrac{xy}{x'y'} \sin \nu, \qquad \sin(x'z') = \dfrac{xz}{x'z'} \sin \mu, \\ \sin(y'z') = \dfrac{yz}{y'z'} \sin \lambda, \end{cases}$$

er auch, wenn man Alles durch λ, μ, ν ausdrückt,

$$4)\quad \begin{cases} \sin(x'y') = \dfrac{\sin\nu}{\cos\lambda\cos\mu}, \quad \sin(x'z') = \dfrac{\sin\mu}{\cos\lambda\cos\nu}, \\ \sin(y'z') = \dfrac{\sin\lambda}{\cos\mu\cos\nu}. \end{cases}$$

Für den praktischen Gebrauch der erwähnten Projectionsmethode bedürfen diese Formeln noch einer Modification; in der Regel sieht man nämlich nicht die Winkel λ, μ, ν als unmittelbar bekannt an, sondern man setzt voraus, dass die Projectionen von drei gleichen auf den Achsen abgeschnittenen Strecken (von den in O zusammentreffenden Kanten eines Würfels) gegeben seien und berechnet hieraus rückwärts λ, μ, ν und die Winkel $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$. Dies geschieht auf folgende Weise. Die auf jeder Achse abgeschnittene Strecke sei d und ihre Projectionen mögen a', b', c' heissen; die vorigen Formeln geben dann für $x = y = z = d$ und $x' = a'$, $y' = b'$, $z' = c'$

$$5)\quad a' = d\cos\lambda, \qquad b' = d\cos\mu, \qquad c' = d\cos\nu$$

oder wenn man quadrirt und addirt

$$6)\quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 2d^2.$$

Durch Substitution des hieraus folgenden Werthes von d liefern die vorhergehenden Gleichungen die Werthe

$$7)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{a'\sqrt{2}}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \\ \cos\mu = \dfrac{b'\sqrt{2}}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \\ \cos\nu = \dfrac{c'\sqrt{2}}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \end{cases}$$

an welche sich die nachstehenden reihen:

$$8)\quad \begin{cases} \sin\lambda = \sqrt{\dfrac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \\ \sin\mu = \sqrt{\dfrac{a'^2 + c'^2 - b'^2}{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \\ \sin\nu = \sqrt{\dfrac{a'^2 + b'^2 - c'^2}{a'^2 + b'^2 + c'^2}}. \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Werthe lassen sich die Formeln 4) durch die folgenden ersetzen:

$$9) \begin{cases} \sin(x'y') = \dfrac{\sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)(a'^2 + b'^2 - c'^2)}}{2\,a'b'}, \\ \sin(x'z') = \dfrac{\sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)(a'^2 + c'^2 - b'^2)}}{2\,a'c'}, \\ \sin(y'z') = \dfrac{\sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)(b'^2 + c'^2 - a'^2)}}{2\,b'c'}. \end{cases}$$

Bemerkenswerth ist die hieraus folgende leichte Construction der Winkel $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$. Setzt man nämlich

$$\angle(x'y') = 90^0 + \tfrac{1}{2}C, \quad \angle(x'z') = 90^0 + \tfrac{1}{2}B, \quad \angle(y'z') = 90^0 + \tfrac{1}{2}A,$$

so zeigen die nunmehrigen Formeln

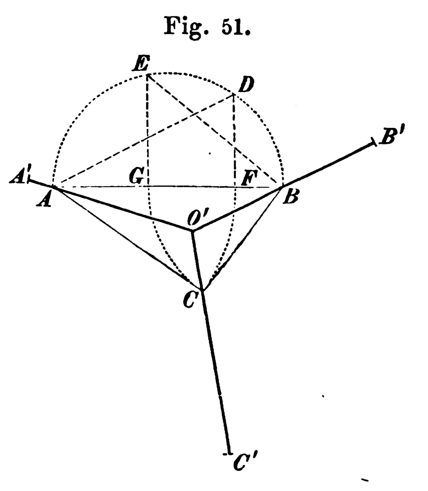
$$\cos\tfrac{1}{2}C = \frac{\sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)(a'^2 + b'^2 - c'^2)}}{2\,a'b'},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B = \frac{\sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)(a'^2 + c'^2 - b'^2)}}{2\,a'c'},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \frac{\sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)(b'^2 + c'^2 - a'^2)}}{2\,b'c'},$$

dass A, B, C die Winkel eines Dreiecks bilden, dessen Seiten a'^2, b'^2, c'^2 oder diesen Grössen proportional sind. Dies giebt folgende Construction: über der grössten von den Linien a', b', c', welche $c' = AB$ sein möge, beschreibe man einen Halbkreis, trage in diesen $AD = b'$ und $BE = a'$ als Sehnen ein, fälle auf AB die Senkrechten DF, EG und beschreibe aus den Seiten AB, AF, BG das Dreieck ABC. Die Seiten desselben sind

Fig. 51.



$$AB = c', \qquad AC = AF = \frac{b'^2}{c'}, \qquad BC = BG = \frac{a'^2}{c'}$$

und stehen in den Verhältnissen

$$BC : CA : AB = a'^2 : b'^2 : c'^2;$$

die Winkel des Dreiecks ABC sind folglich die vorhin mit A, B, C bezeichneten Winkel. Die Halbirungslinien derselben schneiden

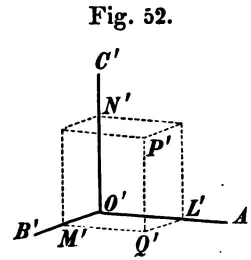
sich in einem Punkte O' und zwar ist aus naheliegenden geometrischen Gründen

$$\angle AO'B = 90^0 + \tfrac{1}{2}C, \quad \angle AO'C = 90^0 + \tfrac{1}{2}B, \quad \angle BO'C = 90^0 + \tfrac{1}{2}A;$$

trägt man also von O' aus auf die winkelhalbirenden Geraden die Strecken $O'A' = BE = a'$, $O'B' = AD = b'$ und $O'C' = AB = c'$, so hat man die drei Projectionen von d der Grösse und Lage nach*).

Sind nun die Winkel $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$ durch die erwähnte Construction oder durch die Formeln 9) bestimmt und ebenso die Winkel λ, μ, ν mittelst der Formeln 7) gefunden, so dienen die Gleichungen 2) zur Construction der Projection jedes beliebigen Punktes xyz, indem man auf der Linie $O'A'$ die Strecke $O'L' = x'$ abschneidet, durch L' die Gerade $L'Q' \parallel O'B'$ und gleich $O'M' = y'$ zieht und endlich $Q'P' = O'N' = z'$ parallel zu $O'C'$ legt, wobei man in der Praxis die Berechnung von x', y', z' durch den Gebrauch von Maassstäben umgeht, deren Einheiten sich wie $1 : \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu$ verhalten. Man ist hierdurch in den Stand gesetzt, alle Ergebnisse der analytischen Geometrie in einer Ebene graphisch darzustellen.

Fig. 52.



Die gewöhnlichsten Verhältnisse sind folgende. Für $a' = b' = c'$ erhält man die sogenannte isometrische Projection, bei welcher

$$\angle(x'y') = \angle(x'z') = \angle(y'z') = 120^0,$$
$$\lambda = \mu = \nu = 35^0\ 15'\ 52''$$
$$\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0{,}8165.$$

Nimmt man zwei der Linien a', b', c' gleich und giebt der dritten

---

*) Es ist nicht ohne Interesse, das Dreieck ABC oder ein ihm ähnliches in der ursprünglichen Figur nachzuweisen. Denken wir uns OL, OM, ON bis zu ihren Durchschnitten L_0, M_0, N_0, mit der Projectionsebene verlängert, so sind L_0M_0, L_0N_0, M_0N_0, die Spuren der Ebenen LOM, LON, MON, und nach dem bekannten Satze, dass die Projection einer Geraden senkrecht auf der Spur ihrer Normalebene steht, ist $O'L' \perp M_0N_0$, $O'M' \perp L_0N_0$, $O'N' \perp L_0M_0$, mit einem Worte, die Geraden $O'L'$, $O'M'$, $O'N'$ sind die verlängerten Höhen des Spurendreiecks $L_0M_0N_0$. Nennen wir U, V, W die Fusspunkte dieser Höhen, so sind $O'L'$, $O'M'$, $O'N'$ die Winkelhalbirungslinien des Dreieckes UVW und ausserdem hat man

$$VW : UW : UV = a'^2 : b'^2 : c'^2$$

wie man durch eine leichte Rechnung findet, sobald $OL = OM = ON = d$ und $O'L' = a'$, $O'M' = b'$, $O'N' = c'$ gesetzt werden.

ein beliebiges Verhältniss zu jenen, so heisst die Projetion monodimetrisch; eine sehr gewöhnliche Wahl ist

$$a' = c', \qquad b' = \tfrac{1}{2} a',$$

woraus

$$\angle(x'y') = \angle(y'z') = 131^{0}\, 24'\, 30'', \qquad \angle(x'z') = 97^{0}\, 11',$$
$$\lambda = \nu = 19^{0}\, 28', \qquad \mu = 61^{0}\, 52',$$
$$\cos\lambda = \cos\nu = \sqrt{\tfrac{8}{9}} = 0{,}9428, \qquad \cos\mu = \sqrt{\tfrac{2}{9}} = 0{,}4714.$$

In dem allgemeinen Falle endlich, wo die Grössen a', b', c' von einander verschieden sind, erhält man die sogenannte anisometrische Projection; passende Verhältnisse hierzu sind:

$$a' = \tfrac{9}{10} c', \qquad b' = \tfrac{1}{2} c',$$

sie geben:

$$\angle(x'y') = 157^{0}\, 0', \quad \angle(x'z') = 95^{0}\, 11', \quad \angle(y'z') = 107^{0}\, 49';$$
$$\lambda = 27^{0}\, 31', \qquad \mu = 60^{0}\, 29', \qquad \nu = 9^{0}\, 50',$$
$$\cos\lambda = 0{,}8868, \qquad \cos\mu = 0{,}4927, \qquad \cos\nu = 0{,}9853.$$

Letzteres Werthesystem empfiehlt sich besonders zum Krystallzeichnen; in der vorigen Figur sind seine Verhältnisse eingehalten.

§. 50.

Projectionen von Flächen.

Denken wir uns in einer beliebigen Ebene eine willkürlich begrenzte Figur von bekannter Fläche s gezeichnet, so können wir leicht deren Projectionen auf drei unter einander senkrechte Ebenen finden; wir wählen nämlich letztere zu Coordinatenebenen, nennen α, β, γ die Stellungswinkel der Ebene von s und bezeichnen die Projectionen von s auf die Ebenen yz, xz, xy der Reihe nach mit a, b, c; es ist dann

$$1) \qquad a = s\cos\alpha, \qquad b = s\cos\beta, \qquad c = s\cos\gamma$$

und dabei sind die Projectionen a, b, c positiv oder negativ, jenachdem die Winkel α, β, γ spitz oder stumpf ausfallen. Die Projection von s auf irgend eine vierte Ebene, welche mit der Ebene von s den Neigungswinkel ϑ bildet, ist ferner

$$p = s\cos\vartheta$$

und wenn man $\cos\vartheta$ durch die Stellungswinkel der Ebene s und durch die Stellungswinkel λ, μ, ν der neuen Ebene ausdrückt, so hat man auch

$$p = s(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu)$$

d. i. unter Rücksicht auf die Gleichungen 1)

$$2) \qquad p = a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu.$$

Diese bemerkenswerthe Formel giebt die Projection einer Figur auf eine beliebige Ebene, sobald die Projectionen der Figur auf die drei Coordinatenebenen bekannt sind. Hat man überhaupt verschiedene nicht in einer Ebene liegende Figuren $s_1, s_2, s_3 \ldots$, deren Projectionen auf die Coordinatenebenen

$$a_1, b_1, c_1; \quad a_2, b_2, c_2; \quad a_3, b_3, c_3 \text{ u. s. w.}$$

heissen mögen, so kann man die Formel 2) auf jede derselben anwenden und es ergiebt sich durch Addition aller so entstehenden Gleichungen

$$\begin{aligned} & p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \ldots \\ = & (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots) \cos\lambda \\ + & (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots) \cos\mu \\ + & (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots) \cos\nu \end{aligned}$$

oder kürzer

$$3) \qquad P = A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu;$$

dabei bezeichnet A die Summe der Projectionen aller Figuren auf die Ebene yz, ebenso B die Projectionssumme auf xz, C die Projectionssumme auf xy, endlich P die Projectionssumme auf die vierte Ebene, deren Stellungswinkel λ, μ, ν sind.

Die Formel 3) wollen wir benutzen, um die vorhandenen Figuren auf drei neue unter einander senkrechte Ebenen $y'z'$, $x'z'$, $x'y'$ zu projiciren; wir haben in diesem Falle der Reihe nach zu setzen:

$$\begin{array}{llll} P = A', & \lambda = (x'x), & \mu = (x'y), & \nu = (x'z); \\ P = B', & \lambda = (y'x), & \mu = (y'y), & \nu = (y'z); \\ P = C', & \lambda = (z'x), & \mu = (z'y), & \nu = (z'z); \end{array}$$

es entstehen so folgende drei Gleichungen:

$$4) \quad \begin{cases} A' = A\cos(x'x) + B\cos(x'y) + C\cos(x'z), \\ B' = A\cos(y'x) + B\cos(y'y) + C\cos(y'z), \\ C' = A\cos(z'x) + B\cos(z'y) + C\cos(z'z). \end{cases}$$

Betrachtet man umgekehrt die Ebenen $y'z'$, $x'z'$, $x'y'$ als die primitiven und yz, xz, xy als die secundären Projectionsebenen, vertauscht also die accentuirten Buchstaben gegen die gleichnamigen nicht accentuirten, so ist entsprechend

$$5) \quad \begin{cases} A = A'\cos(xx') + B'\cos(xy') + C'\cos(xz'), \\ B = A'\cos(yx') + B'\cos(yy') + C'\cos(yz'), \\ C = A'\cos(zx') + B'\cos(zy') + C'\cos(zz'). \end{cases}$$

Zwischen den Cosinus der neun vorkommenden Winkel finden die

schon in §. 25 unter Nr. 2, 3, 5 und 6 erwähnten Beziehungen statt, mittelst welcher man sehr leicht zu der folgenden Relation gelangt

$$6) \qquad A'^2 + B'^2 + C'^2 = A^2 + B^2 + C^2;$$

hierin liegt der bemerkenswerthe Satz, dass die Quadratsumme der Projectionen aller Figuren auf drei unter einander senkrechte Ebenen constant bleibt, mithin von der Lage jener Ebenen unabhängig ist.

Aus Nr. 6) folgt:

$$7) \qquad C' = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - A'^2 - B'^2}$$

und hier erhält C' offenbar seinen grössten Werth für $A' = 0$ und $B' = 0$, was letzteres aus dem Grunde möglich ist, weil A' und B' Aggregate aus einzelnen Projectionen sind, die eben sowohl positiv als negativ sein können; der Ausdruck

$$8) \qquad C' = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

giebt in diesem Falle den grössten Werth an, welchen die Gesammtprojection aller Figuren auf eine Ebene $(x'y')$ überhaupt erhalten kann. Um die Lage dieser Ebene zu bestimmen, substituiren wir die Werthe $A' = 0$, $B' = 0$ in die Gleichungen 5) und bezeichnen die Stellungswinkel der Ebene $x'y'$, um die es sich nur noch handelt, kurz mit α', β', γ'; dies giebt

$$9) \quad A = C' \cos \alpha', \quad B = C' \cos \beta', \quad C = C' \cos \gamma',$$

mit Rücksicht auf die Gleichung 8) folgen hieraus die Werthe

$$10) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos \alpha' &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \beta' &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \gamma' &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned} \right.$$

und damit ist die Stellung derjenigen Projectionsebene bestimmt, für welche die Summe der Projectionen aller gegebenen Figuren ihren Maximalwerth erreicht.

Projicirt man dieselben Figuren noch auf eine andere von der vorigen verschiedene Ebene, deren Stellungswinkel λ, μ, ν sind, so hat man wie früher

$$P = A \cos \lambda + B \cos \mu + C \cos \nu$$

und durch Substitution der in Nr. 9) angegebenen Werthe

$$P = C' (\cos \alpha' \cos \lambda + \cos \beta' \cos \mu + \cos \gamma' \cos \nu)$$

oder kurz

$$11) \qquad P = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cos \Theta,$$

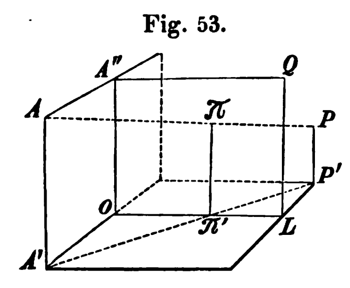
wo Θ den Neigungswinkel der beliebigen Ebene gegen die Ebene der grössten Projectionssumme bedeutet. Die Gleichung 11) lässt unmittelbar erkennen, dass die Projectionssumme P für alle Ebenen dieselbe bleibt, welche gegen die Ebene der grössten Projectionssumme denselben Neigungswinkel Θ bilden. Für $\Theta = 90^0$ wird $P = 0$, also verschwindet die Projectionssumme für alle zu jener Ebene senkrechten Ebenen.

§. 51.

Die perspectivische Projection.

Es sei eine feste Ebene OQ und vor derselben ein fester Punkt A gegeben; zieht man von diesem aus nach jeden beliebigen hinter der Ebene liegenden Punkte P eine Gerade AP, welche die Ebene in einem bestimmten Punkte Π schneidet, so heisst bekanntlich Π die perspectivische Projection von P in Beziehung auf A als Projectionscentrum. Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Lage von Π in der festen Ebene (Projectionsebene) zu finden, wenn die Lagen von A und P gegen jene Ebene bekannt sind.

Fig. 53.



Die Projectionsebene OQ sei die Ebene xz, eine durch A senkrecht zu ihr gelegte Ebene $A'AA''$ die Ebene yz; auf dem Durchschnitte beider Ebenen (der z-Achse) wählen wir den Coordinatenanfang O willkürlich und legen durch ihn die Coordinatenebene xy senkrecht zur z-Achse. In Beziehung auf dieses rechtwinklige Coordinatensystem bezeichnen wir die Coordinaten von A mit 0, $OA' = g$, $OA'' = h$, und die von P mit $OL = x$, $LP' = -y$, $P'P = z$; sind ferner ξ, η, ζ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden AP, so haben wir als Gleichungen der letzteren

$$1) \qquad \eta = -\frac{y+g}{x}\xi + g, \qquad \zeta = \frac{z-h}{x}\xi + h,$$

und daraus erhalten wir für $\eta = 0$ die Coordinaten von Π, welche $O\Pi' = \xi$, $\Pi'\Pi = \zeta$ heissen mögen. Die erste Gleichung liefert unmittelbar ξ, die zweite ζ wenn man den Werth von ξ substituirt; die resultirenden Formeln sind:

$$2)\qquad \xi = \frac{gx}{g+y}, \qquad \zeta = \frac{hy+gz}{g+y}.$$

Hieran knüpft sich von selbst die Bestimmung der Projection einer beliebigen geraden oder krummen Linie; man hat nämlich in diesem Falle zwei Gleichungen zwischen x, y, z, verbindet man sie mit den vorigen, so lassen sich x, y, z eliminiren und die übrig bleibende Gleichung zwischen ξ und ζ bestimmt die Projection der Linie. Einige Beispiele hierzu sind folgende.

Für eine Gerade im Raume hat man

$$3)\qquad y = Bx + b, \qquad z = Cx + c$$

mithin

$$4)\qquad \xi = \frac{gx}{Bx+b+g}, \qquad \zeta = \frac{(Bh+Cg)\,x + bh + cg}{Bx+b+g}$$

und durch Elimination von x

$$5)\qquad [B(c-h) - C(b+g)]\,\xi + (b+g)\,\zeta = bh + cg.$$

Die perspectivische Projection einer Geraden ist demnach wieder eine Gerade, doch findet dabei die Eigenthümlichkeit statt, dass die letztere Gerade, insoweit sie wirklich durch Prrojection entsteht, nur eine endliche Ausdehnung erlangt, wenn auch die ursprüngliche Gerade sich hinter der Bildebene ins Unendliche erstreckt. Giebt man nämlich den Formeln 4) die Gestalt

$$\xi = \frac{g}{B + \frac{b+g}{x}}, \qquad \zeta = \frac{Bh + Cg + \frac{bh+cg}{x}}{B + \frac{b+g}{x}}$$

und lässt x ins Unendliche wachsen, so nähern sich ξ und ζ den Grenzen

$$6)\qquad \xi_\infty = \frac{g}{B}, \qquad \zeta_\infty = h + \frac{cg}{B},$$

und nun sind die endlichen Grössen ξ_∞, ζ_∞ die Coordinaten der Projection des unendlich entfernten Endpunktes der gegebenen Geraden. Da ferner in den Formeln 6) die Grössen b und c nicht mehr vorkommen, so bleiben ξ_∞ und ζ_∞ unveränderlich für alle Geraden, welche durch dieselben B und C und beliebige b, c bestimmt sind. Geometrisch heisst dies: die perspectivischen Projectionen eines Systemes paralleler Geraden vereinigen sich in einem Punkte $(\xi_\infty \zeta_\infty)$; jeder solche Punkt heisst der F l u c h t p u n k t des entsprechenden Parallelensystemes. — Sind z. B. die

Geraden in der xy-Ebene enthalten und senkrecht zur x-Achse, so hat man $B = tan\, 90^0 = \infty$, $C = 0$, mithin

$$\xi_\infty = 0, \qquad \zeta_\infty = h;$$

die Projectionen aller in der xy-Ebene auf der x-Achse senkrechten Geraden laufen daher im Punkte A''_1 dem sogenannten Augenpunkte, zusammen. Liegen zweitens die Geraden in der xy-Ebene unter einem Winkel von 45° gegen die x-Achse, so hat man $B = tan\, 45^0 = 1$, $C = 0$, folglich

$$\xi_\infty = g, \qquad \zeta_\infty = h;$$

der Fluchtpunkt des betreffenden Parallelensystemes befindet sich also auf der Geraden $A''Q \,//\, OL$ in der Entfernung g vom Augenpunkte; man pflegt ihn den Distanzpunkt zu nennen. Wenn drittens die Geraden die Richtung einer Würfeldiagonale haben, wie dies bei perspectivischen Schattenconstructionen vorkommt, sobald man sich die Lichtstrahlen von der Linken zur Rechten einfallend denkt, so gelten die Werthe $B = tan\, 45^0 = 1$, $C = tan\, 135^0 = -1$, woraus

$$\xi_\infty = g, \qquad \zeta_\infty = h - g.$$

Als zweite Anwendung diene die Bestimmung der perspectivischen Projection eines in der xy-Ebene liegenden Kreises. Man hat für diesen Fall

$$7) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \qquad z = 0;$$

aus den Formeln 2) erhält man wegen $z = 0$

$$x = \frac{h\xi}{h-\zeta}, \qquad y = \frac{g\zeta}{h-\zeta}$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in die Kreisgleichung

$$8) \left\{ \begin{array}{l} h^2\xi^2 + [a^2 + (b+g)^2 - r^2]\zeta^2 + 2ah\xi\zeta \\ -2ah^2\xi - 2[a^2 + b(b+g) - r^2]h\zeta + (a^2 + b^2 - r^2)h^2 = 0. \end{array} \right.$$

Der blosse Anblick dieser Gleichung lehrt, dass die Projection im Allgemeinen ein Kegelschnitt ist und zwar eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem $b + g$ grösser, gleich oder kleiner als r ist. Für die Coordinaten des Mittelpunktes der Projection findet man leicht:

$$p = \frac{a(b+g)g}{(b+g)^2 - r^2}, \qquad q = \frac{[b(b+g) - r^2]h}{(b+g)^2 - r^2};$$

bezeichnet ferner ω den Winkel, welchen irgend eine der Hauptachsen mit der x-Achse einschliesst, so erhält man:

$$tan\, 2\omega = \frac{2ah}{h^2 - [a^2 + (b+g)^2 - r^2]}.$$

Dieser Ausdruck ist leicht zu construiren; bildet man nämlich aus den drei Seiten

$$a, \qquad \sqrt{(b+g)^2 - r^2}, \qquad h$$

ein Dreieck und errichtet die zur Seite a gehörende Höhe, so theilt letztere die Seite a in zwei Theile und zwar ist der an der Seite $\sqrt{(b+g)^2 - r^2}$ liegende Abschnitt

$$k = \frac{a^2 + (b+g)^2 - r^2 - h^2}{2a}$$

mithin

$$\tan 2\omega = -\frac{h}{k},$$

woraus eine einfache Construction für ω folgt.

Soll die Projection zu einem Kreise werden, so muss der Coefficient von $\xi\zeta$ verschwinden und der Coefficient von ξ^2 gleich dem von ζ^2 sein; diese Bedingungen lauten:

$$a = 0, \qquad h^2 = (g+b)^2 - r^2.$$

Die erste giebt zu erkennen, dass der Mittelpunkt des Kreises in einer Verticalebene (yz) mit dem Projectionscentrum liegen muss, die zweite Bedingung enthält, wenn man sich g und h als veränderlich denkt, den bemerkenswerthen Satz, dass alle Projectionscentra, von welchen aus gesehen der gegebene Kreis wiederum als Kreis erscheint, auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen, deren Halbachse r und deren Scheitel der Coordinatenanfang ist.

Wir haben endlich noch zu erörtern, was man unter der perspectivischen Projection einer Fläche verstehen soll. Denkt man sich von dem Projectionscentrum aus an die Fläche alle möglichen Tangenten gezogen, so bilden diese in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine Kegelfläche; letztere wird von der Projectionsebene in einer bestimmten Curve geschnitten und diese muss nun als perspectivische Abbildung der ursprünglichen Fläche gelten. — Um hiervon eine Anwendung auf die Projection der Kugelfläche zu machen, sei

$$(x-a)^2 + (y+b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

die Gleichung dieser Fläche; irgend eine durch das Projectionscentrum gehende Gerade wird durch die Gleichungen

$$9) \qquad \eta = P\xi + g, \qquad \zeta = Q\xi + h$$

ausgedrückt und berührt die Kugelfläche, wenn die Bedingung

$$10) \begin{cases} (1+P^2+Q^2)r^2 \\ = (Pa+g+b)^2 + (Qa+h-c)^2 + [P(h-c) - Q(g+b)]^2 \end{cases}$$

erfüllt ist, wie man am leichtesten mittelst der Bemerkung findet, dass der Abstand einer Tangente vom Kugelmittelpunkte jederzeit dem Kugelhalbmesser gleich sein muss. Eliminirt man P und Q aus den beiden letzten Gleichungen, indem man die Werthe

$$P = \frac{\eta - g}{\xi}, \qquad Q = \frac{\zeta - h}{\xi}$$

in Nr. 10) einsetzt, so charakterisirt die neue Gleichung

$$11) \begin{cases} [\xi^2 + (\eta - g)^2 + (\zeta - h)^2]\, r^2 \\ = [a(\eta - g) + (g + b)\xi]^2 + [a(\zeta - h) + (h - c)\xi]^2 \\ + [(h - c)(\eta - g) - (g + b)(\zeta - h)]^2 \end{cases}$$

diejenige Kegelfläche, welche ihren Mittelpunkt im Projectionscentrum hat und ausserdem die gegebene Kugel berührt (die projicirende Kegelfläche). Die Gleichung der Kugelprojection ergiebt sich hieraus für $\eta = 0$, nämlich

$$12) \begin{cases} r^2 [\xi^2 + g^2 + \zeta^2] \\ = [-ag + (g + b)\xi]^2 + [a(\zeta - h) + (h - c)\xi]^2 \\ + [g(h - c) + (g + b)(\zeta - h)]^2, \end{cases}$$

und diese Gleichung lässt erkennen, dass die Projection der Kugelfläche im Allgemeinen eine Ellipse ist, welche nur in dem speciellen Falle $a = 0$ und $c = h$ zu einem Kreise werden kann.

Verbesserungen.

S. 25 Formel 7) statt $\frac{f_3 - f_1}{f_3 - f_1}$ lies $\frac{f_3 - f_1}{f_3 - f_2}$,
„ 41 Z. 16 v. u. statt wir lies wie.
„ 68 „ 9 v. o. statt Gerade lies Ebene.
„ 111 Formel 5) statt $\psi(x_1, z_1)$ lies $\psi(y_1, z_1)$.
„ 216 Fig. 45 statt P lies P_0.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

